TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Opção (D)

$5! \times 8! \times 4! \times 3! = 696\,729\,600$

1.2.

- Número de casos possíveis

  Corresponde ao número de números naturais com seis algarismos (note-se que o algarismo 0 não pode aparecer na primeira posição):

  $$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^5$$

- Número de casos favoráveis

  Corresponde ao número de números naturais com seis algarismos que têm exatamente dois algarismos iguais a zero:

  $9 \times 1 \times 1 \times 9 \times 9 \times 9 \times {}^5C_2$ (observe-se que ${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher as duas posições, de entre as cinco disponíveis, para colocar os dois algarismos 0).

  A probabilidade pedida é igual a $\frac{9\times9\times9\times9\times {}^5C_2}{9\times10^5} = \frac{65\,610}{900\,000} = \frac{729}{10\,000}$, que corresponde a 7,29%.

2. Consideremos os acontecimentos:

R: "O aluno é do sexo feminino."

C: "O aluno estuda Cinema."

Pelo enunciado, sabe-se que:

$P(R) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$P(C|R) = 0{,}25$

$P(\bar{C} \cap \bar{R}) = 0{,}10$

	C	$\bar{C}$	**Total**
R			0,6
$\bar{R}$	0,30	0,10	0,4
Total			1

2.1. Pretende-se saber o valor de $P(R|\bar{C})$:

$P(C|R) = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{P(C\cap R)}{P(R)} = 0{,}25$

$\Leftrightarrow P(C \cap R) = 0{,}6 \times 0{,}25$

$\Leftrightarrow P(C \cap R) = 0{,}15$

	C	$\bar{C}$	**Total**
R	0,15	0,45	0,6
$\bar{R}$	0,30	0,10	0,4
Total	0,45	0,55	1

$$P(R|\bar{C}) = \frac{P(R \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} \Leftrightarrow P(R|\bar{C}) = \frac{0{,}45}{0{,}55} \Leftrightarrow P(R|\bar{C}) = \frac{9}{11}$$

2.2.

- Número de casos possíveis

  Corresponde ao número de maneiras de retirar quatro cartões do saco onde estão vinte cartões, simultaneamente e ao acaso: ${}^{20}C_4$

- Número de casos favoráveis

  Corresponde ao número de maneiras de retirar, no máximo, dois cartões com números primos. Existem oito números primos até vinte: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ e 19

  ✓ ${}^{12}C_4$ é o número de maneiras de retirar zero números primos, isto é, quatro dos doze números que não são primos;.

  ✓ ${}^{12}C_3 \times {}^{8}C_1$ é o número de maneiras de retirar um número primo e três números que não são primos.

  ✓ ${}^{12}C_2 \times {}^{8}C_2$ é o número de maneiras de retirar dois números primos e dois números que não são primos.

  ${}^{12}C_4 + {}^{12}C_3 \times {}^{8}C_1 + {}^{12}C_2 \times {}^{8}C_2$ é, então, o número de casos favoráveis ao acontecimento em causa.

  A probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{12}C_4 + {}^{12}C_3 \times {}^{8}C_1 + {}^{12}C_2 \times {}^{8}C_2}{{}^{20}C_4} = \frac{4103}{4845} \approx 0{,}85$.

3. Opção (D)

Para f ser contínua em $x = 0$, tem que se verificar $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

- $f(0) = a$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x}}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\right) =$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} =$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 1 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(1+\sqrt{1-x}\right) =$$

$$= 1 + \sqrt{1-0} = 2$$

Como tem que se verificar $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, vem que $a = 2$.

E como também tem que se verificar que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, vem que:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(b+\frac{1}{3x}-\frac{\cos^2 x}{3x}\right)=a$$

ou seja:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(b+\frac{1-\cos^2 x}{3x}\right)=2 \Leftrightarrow b+\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\text{sen}^2 x}{3x}\right)=2$$

$$\Leftrightarrow b+\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}x}{x}}_{\text{limite notável}}\times\lim_{x\to 0^+}\text{sen}x=2$$

$$\Leftrightarrow b+\frac{1}{3}\times 1\times \text{sen}0=2$$

$$\Leftrightarrow b+0=2$$

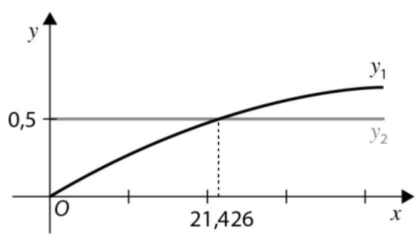
$$\Leftrightarrow b=2$$

Assim, para f ser contínua em $x=0$, tem que $a=2$ e $b=2$.

4. Nestas condições, tem-se que $h=120$, logo $S=0{,}007184p^{0{,}425}\times 120^{0{,}725}$ e $C=\frac{SA}{1{,}7}$.

Pretende-se saber qual o valor de p tal que $C=\frac{A}{2}$, isto é, $\frac{0{,}007184p^{0{,}425}\times 120^{0{,}725}\times A}{1{,}7}=\frac{A}{2}$, ou seja, $0{,}1359326569\,p^{0{,}425}=\frac{1}{2}$.

Usando a calculadora gráfica:



$y_1=0{,}1359326569x^{0{,}425}$

$y_2=0{,}5$

O peso da criança, nestas condições, deve ser, aproximadamente, 21 kg.

5. $f(x)=\cos(2x)+\sin(3x)$ e $g(x)=x^2$

$f'(x)=-2\text{sen}(2x)+3\cos(3x)$ e $g'(x)=2x$

Sejam m_r e m_s os declives, respetivamente, das retas r e s.

$$m_r=f'\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-2\text{sen}\left(2\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\right)+3\cos\left(3\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=-2\text{sen}(2a+\pi)+3\cos\left(3a+\frac{3\pi}{2}\right)=$$

$$=2\text{sen}(2a)+3\text{sen}(3a)$$

$$m_s=g'(a)=2a$$

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = 2x(2\text{sen}(2x) + 3\text{sen}(3x))$.

1) h é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < -1 < h(0)$

$h(0) = 0$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \frac{\pi}{2}\left(2\text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + 3\left(3 \times \frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$= \pi\left(2\text{sen}(\pi) + 3\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) =$

$= \pi(0 - 3) =$

$= -3\pi$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: h(a) = -1$$

isto é:

$$\exists a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: 2a\big(2\text{sen}(2a) + 3\text{sen}(3a)\big) = -1$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: m_s \times m_r = -1$$

Assim, mostramos que existe pelo menos um $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ para o qual as retas r e s são perpendiculares.

<u>Caderno 2</u>

6. Opção (B)

Sabemos que a função f, de domínio $\mathbb{R}$, é duas vezes diferenciável.

a é um ponto interior do domínio de f e $f'(a)$ existe e é finita, logo, se $f(a)$ é um extremo relativo de f, então $f'(a) = 0$.

f' é contínua em $[0, a]$ e é diferenciável em $]0, a[$, logo, pelo teorema de Lagrange, concluímos que existe $c \in]0, a[$ tal que $f''(c) = \frac{f'(a) - f'(0)}{a - 0}$, isto é,$f''(c) = \frac{0 - f'(0)}{a}$, ou seja, $f''(c) = -\frac{f'(0)}{a}$.

Como $\forall x \in [0, a], -5 < f''(x) < -1$, então:

$$-5 < -\frac{f'(0)}{a} < -1$$

$$-5a < -f'(0) < -a$$

$$a < f'(0) < 5a$$

7.

7.1. Opção (C)

Em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [0, +\infty[$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 2x} - x = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 2x} = x$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{4x^2 + 2x}\right)^2 = x^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2x = x^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(3x + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \lor \ x = -\frac{2}{3}$$

Verificação

- Se $x = 0$:

  $\sqrt{4 \times 0^2 + 2 \times 0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo, 0 é solução da equação.

- Se $x = -\frac{2}{3}$:

  $\sqrt{4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$, que é uma proposição falsa, logo, $-\frac{2}{3}$ não é solução da equação.

0 é zero de f.

Em $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+3x+\frac{1}{2}}{-2x-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0 \ \land \ -2x - 1 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow 8x^2 + 6x + 1 = 0 \ \land \ x \neq -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 8}}{16}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2}{16}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \ \lor \ \underbrace{x = -\frac{1}{2}}_{\notin \left]-\frac{1}{2}, 0\right[}$$

$-\frac{1}{4}$ é zero de f.

Logo, a função f tem exatamente dois zeros.

7.2. $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

$x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}\right)}}{x} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}}}{x} - 1 \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}}}{x} - 1 =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{4+\frac{2}{x}}\right) - 1 = -\sqrt{4+0} - 1 =$$

$$= -2 - 1 = -3$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) + 3x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x} - x + 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x} + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+2x-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}\right)}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}}\;-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}}\;-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-\sqrt{4+\frac{2}{x}}-2} = \frac{2}{-\sqrt{4+0}-2} =$$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

A reta de equação $y = -3x - \frac{1}{2}$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

7.3. $$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \lim_{x\to-\frac{1}{4}} \frac{f(x)-f\left(-\frac{1}{4}\right)}{x+\frac{1}{4}} = \lim_{x\to-\frac{1}{4}} \frac{\frac{4x^2+3x+\frac{1}{2}}{-2x-1}}{x+\frac{1}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to-\frac{1}{4}} \frac{(4x+2)\left(x+\frac{1}{4}\right)}{(-2x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\frac{1}{4}} \frac{4x+2}{-2x-1} =$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -2$$

Cálculos auxiliares

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{4\times\frac{1}{16}+3\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}}{-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)-1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} =$$

$$= 0$$

	4	3	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{4}$		-1	$-\frac{1}{2}$
	4	2	0 = *R*

8. $D_f = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

$f(x) = 2\text{sen}x + \cos^2 x$

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos x(-\text{sen}x) = 2\cos x - \text{sen}(2x)$

$f''(x) = -2\text{sen}x - 2\cos(2x)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\text{sen}x - 2\cos(2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\text{sen}x = \cos(2x)$$
$$\Leftrightarrow \text{sen}(-x) = \cos(2x)$$
$$\Leftrightarrow \text{sen}(-x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$
$$\Leftrightarrow -x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \quad \vee \quad -x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{7\pi}{6}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
Sinal de f''	$-$	$-$	0	$-$	0	+	+
Variação de f'	Máx. $f'(0)$	$\searrow$		$\searrow$	mín. $f'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	$\nearrow$	Máx. $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Cálculos auxiliares

$f''(0) = -2\text{sen}(0) - 2\cos(0) = -2$

$f''(\pi) = -2\text{sen}(\pi) - 2\cos(2\pi) = 0 - 2 = -2$

$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2\cos(3\pi) = 2 + 2 = 4$

$f'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ é o declive da reta r.

Assim, $\left(\frac{7\pi}{6}, f\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$ são as coordenadas do ponto de tangência da reta r com o gráfico de f.

Cálculo auxiliar

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

9. $g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} \underbrace{=}_{\text{pois } f \text{ é ímpar}} \frac{-f(x)}{-x} =$

$$= \frac{f(x)}{x} =$$
$$= g(x)$$

Logo, g é par, o que exclui a representação gráfica apresentada no gráfico I.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, pois a reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Logo, exclui-se a representação gráfica apresentada no gráfico III, onde $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 1$.

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' =$$

$$= \frac{f'(x) \times x - f(x) \times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \times f'(x) - f(x) < 0$ (pelas condições do enunciado), então $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) < 0$, ou seja, g é decrescente em $]0, +\infty[$, o que exclui a representação gráfica apresentada no gráfico II.

10. Opção (C)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 7 \Leftrightarrow f'(2) = 7$$

Como $f'(2)$ existe e é finita, f é contínua em $x = 2$, logo, a proposição p é verdadeira.

$$\operatorname{Lim}_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)(x+2)}{f(x) - f(2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{f(x) - f(2)} \times \lim_{x \to 2} [-(x+2)] =$$

$$= \frac{1}{f'(2)} \times (-4) =$$

$$= -\frac{4}{7}$$

A proposição q é falsa.