TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (C)

$$\underbrace{[\_\_\ \ \_\_\ \cdots\ \_\_]}_{x\text{ fatos de princesas}}\qquad \underbrace{[\_\_\ \ \_\_\ \cdots\ \_\_]}_{y\text{ fatos de super-heróis}}\qquad \underbrace{\underbrace{\_\_}\ \underbrace{\_\_}\ \cdots\ \underbrace{\_\_}}_{z\text{ fatos de animais}}$$

Existem $x!$ formas de ordenar os x fatos de princesas. Por cada uma destas formas, existem $y!$ maneiras de ordenar os y fatos de super-heróis.

Por cada uma das formas de ordenar os fatos de princesas e de super-heróis entre si, existem $(z+2)!$ maneiras de permutar os z fatos de animais entre si e também com os dois blocos dos fatos de princesas e dos fatos de super-heróis.

Uma resposta é, então, $x! \times y! \times (z+2)!$.

2. Sejam A e M os acontecimentos:

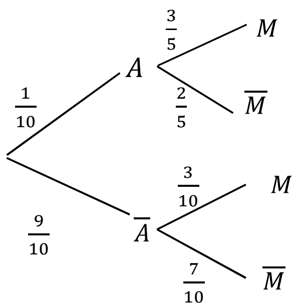
A: "o aluno tem alergias alimentares"

M: "o aluno é do sexo masculino"

Sabe-se que:

- $P(A) = \frac{1}{10}$
- $P(M|A) = \frac{3}{5}$
- $P(\overline{M}|\overline{A}) = \frac{7}{10}$

Pretende-se determinar o valor de $P(A|M)$:



$$P(A \cap M) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{50}$$

$$P(A \cap \overline{M}) = \frac{1}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{25}$$

$$P(\overline{A} \cap M) = \frac{9}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{27}{100}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{M}) = \frac{9}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{63}{100}$$

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{3}{50} + \frac{27}{100}} = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{33}{100}} = \frac{2}{11}$$

3. Opção (B)

Seja n a linha do triângulo de Pascal, da qual se sabe que a diferença entre o terceiro termo e o segundo termo é igual a 77.

Assim:

$$ {}^{n}C_2 - {}^{n}C_1 = 77 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!\,(n-2)!} - n = 77 \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1)}{2} - n = 77 $$

$$ \Leftrightarrow n^2 - n - 2n - 154 = 0 $$

$$ \Leftrightarrow n^2 - 3n - 154 = 0 $$

$$ \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-154)}}{2 \times 1} $$

$$ \Leftrightarrow n = 14 \quad \vee \quad n = -11 \notin \mathbb{N} $$

O maior elemento da linha é o elemento central. Assim, o maior elemento da linha $n = 14$ é ${}^{14}C_7 = 3432$.

4. Opção (B)

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Sinal de f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
Sinal de $\frac{f'}{f''}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

$$ \frac{f'(x)}{f''(x)} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0 \quad \vee \quad x \geq 1 $$

$\text{C.S.} = [-1,0[\, \cup \, [1, +\infty[$

5. Opção (A)

Sabe-se que a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g, logo $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \pm\infty$.

Sabe-se, também, que a reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$. Logo, concluímos que:

$$ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x) = 1 $$

Assim:

$$ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + f(x) + 2x \right) - \lim_{x \to 0^+} \frac{5}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x) - \lim_{x \to 0^+} \frac{5}{g(x)} = $$

$$ = -2 + 1 - \frac{5}{\pm\infty} = $$

$$ = -2 + 1 - 0 = $$

$$ = -1 $$

6.

6.1. $f'(x) = \frac{1}{2}(xe^x)' = \frac{1}{2}(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{2}(1+x)$

$D_{f'} = \mathbb{R}$

- f' é uma função contínua, por se tratar do produto de duas funções contínuas. Em particular, f' é contínua em [0, 1].
- $f'(0) = \frac{e^0}{2}(1+0) = \frac{1}{2} < 1$

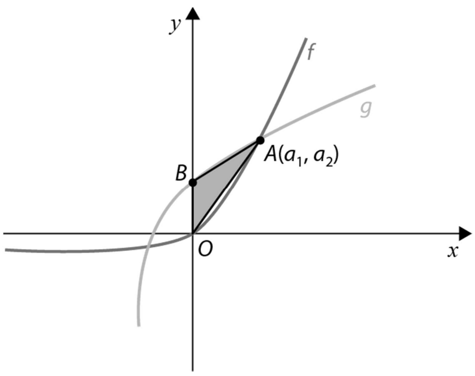
$f'(1) = \frac{e^1}{2}(1+1) = e > 1$

$f'(0) < 1 < f'(1)$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists c \in]0, 1[: f'(c) = 1$, isto é, existe, pelo menos, um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 1[$, no qual a reta tangente ao gráfico da função f nesse ponto tem declive igual a 1, ou seja, é perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares ($y = -x$).

6.2. $f(x) = \frac{xe^x}{2}$ $\qquad$ $g(x) = \ln(x+2) + 4$

$D_f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $D_g =]-2, +\infty[$



$B(0, b)$

$b \approx 4{,}69$

$A(a_1, a_2)$

$a_1 \approx 1{,}79$

$a_2 \approx 5{,}33$

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times \text{abcissa de } A}{2} \approx \frac{4{,}69 \times 1{,}79}{2} \approx 4{,}2 \text{ u.a.}$$

7. Opção (B)

A partir da representação do gráfico de f', conseguimos obter as informações seguintes:

x		a		c		e	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	+	0	−	0	+
Variação de f	↗		↗	Máx.	↘	mín.	↗

Daqui, concluímos que f admite dois extremos relativos. Logo, a opção (A) é falsa.

x	$-\infty$	a		b		d	$+\infty$
Sinal de f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação de f'	↘	mín.	↗	Máx.	↘	mín.	↗

x		a		b		d	$+\infty$
Sinal de f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	∩	P.I.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

Daqui, concluímos que o gráfico de f admite três pontos de inflexão. Logo, a afirmação (B) é verdadeira.

Em $]-\infty, a]$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo. Logo, a opção (D) é falsa.

Apesar de $f'(b)$ ser máximo, não é máximo absoluto, como se pode observar pela representação gráfica de f', logo a afirmação (C) é falsa.

8. Estudemos a monotonia e a existência de extremos da função g na tabela abaixo:

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
Sinal de f	$-$	0	$+$	0	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Sinal de g'	$-$	0	$+$	0	$+$
Variação de g	↘	mín.	↗		↗

Concluímos, assim, que a função g tem apenas um extremo relativo, logo a afirmação I é falsa.

A função g' é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar do produto de duas funções contínuas (f é uma função polinomial e $x \mapsto x^2+1$ também é uma função polinomial).

Logo, o seu gráfico não admite assíntotas verticais. A afirmação II é verdadeira.

Determinemos, agora, o valor de $g''(1)$.

$g''(x) = f'(x) \times (x^2+1) + f(x) \times 2x$

$g''(1) = f'(1) \times (1^2+1) + f(1) \times 2 = 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0$

Sabemos que $f'(1) = 0$, pois a reta tangente ao gráfico de f é uma reta horizontal, isto é, tem declive 0. Concluímos, assim, que a afirmação III é verdadeira.

9.

9.1. f é contínua em $x=0$ se e só se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, isto é, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{2-2\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0^-} \frac{2(1-\cos x)}{\operatorname{sen}(x^2)} =$

$$= 2\lim_{x\to0^-} \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)(1+\cos x)} =$$

$$= 2\lim_{x\to0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)} \times \lim_{x\to0^-} \frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= 2\times \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}} \times \frac{1}{1+1} =$$

$$= 2\times \frac{\lim\limits_{x\to0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}} \times \frac{1}{2} =$$

  Considerando a mudança de variável $x^2 = y$: se $x \to 0^-$, então $y \to 0^+$.

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}{\lim\limits_{y\to0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} =$$

$$= \frac{1^2}{1} =$$

$$= 1$$

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{2x}{2e^x-2} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{2x}{2(e^x-1)} =$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x}{e^x-1} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{1} =$$

$$= 1$$

- $f(0) = k$

  Logo, $k = 1$.

9.2. Como o domínio de f é limitado inferiormente, só faz sentido procurar assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{2e^x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x(e^x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} =$$

$$= \frac{1}{+\infty-1} =$$

$$= 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{+\infty - 0} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

9.3. $h(x) = f(x) \times \operatorname{sen}(x^2) \times \frac{\operatorname{sen}x}{2} =$

$$= \frac{2-2\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} \times \operatorname{sen}(x^2) \times \frac{\operatorname{sen}x}{2} =$$

$$= (1-\cos x)\operatorname{sen}x$$

$D_h = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

$$h'(x) = (1-\cos x)'\operatorname{sen}x + (1-\cos x)(\operatorname{sen}x)' =$$

$$= \operatorname{sen}x \operatorname{sen}x + (1-\cos x)\cos x =$$

$$= \operatorname{sen}^2 x + \cos x - \cos^2 x =$$

$$= \cos x - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) =$$

$$= \cos x - \cos(2x)$$

$h'(x) = 0$

$\cos x - \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x)$

$$\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \lor x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x - 2x = 2k\pi \lor x + 2x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -x = 2k\pi \lor 3x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -2k\pi \lor x = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ $h'(x) = 0$ é uma equação impossível.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0
Sinal de h'	$+$	$+$	n. d.
Variação de g	mín.	$\nearrow$	n. d.

Cálculos auxiliares

$h'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi) = 0 + 1 = 1 > 0$

$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (1-0) \times (-1) = -1$

h é estritamente crescente em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e -1 é mínimo relativo para $x = -\frac{\pi}{2}$.