Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Uma loja que vende artigos de Carnaval tem para expor x fatos de princesas, y fatos de super-heróis e z fatos de animais, todos diferentes entre si.

Considerando quaisquer valores naturais de x, y e z, superiores a 1, de quantos modos pode o gerente da loja expor todos os fatos referidos, sendo que se pretende que os fatos de princesas fiquem todos juntos e os de super-heróis também?

(A) $x!\,y!\,z!$ **(B)** $x!\,y!\,z!\,2!$ **(C)** $x!\,y!\,(z+2)!$ **(D)** $x!\,y!\,z!\,3!$

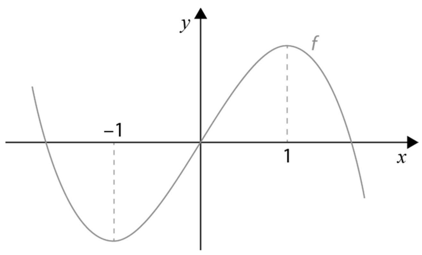
2. Num estudo realizado numa determinada escola, verificou-se que 10% dos alunos têm alergias alimentares e, destes, $\frac{3}{5}$ são do sexo masculino. De entre os alunos que não têm alergias alimentares, 7 em cada 10 são do sexo feminino. O Gonçalo é aluno dessa escola. Calcule a probabilidade de o Gonçalo ser um aluno com alergias alimentares.

Apresente a sua resposta sob a forma de fração irredutível.

3. Acerca de uma determinada linha do triângulo de Pascal, sabe-se que a diferença entre o terceiro termo e o segundo termo é igual a 77. Qual é o maior elemento dessa linha?

(A) 3003 **(B)** 3432 **(C)** 5005 **(D)** 6435

4. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o gráfico de uma função polinomial f de grau 3.



Tal como a figura sugere, a função f tem um mínimo relativo para $x=-1$ e tem um máximo relativo para $x=1$. A origem do referencial é ponto de inflexão do gráfico de f.

Sejam f' e f'' a primeira e a segunda derivadas da função f, respetivamente.

Qual é o conjunto-solução da condição $\frac{f'(x)}{f''(x)} \geq 0$?

(A) $[-1,0] \cup [1,+\infty[$ **(B)** $[-1,0[\cup [1,+\infty[$ **(C)** $]-\infty,-1] \cup [0,1]$ **(D)** $]-\infty,-1] \cup]0,1]$

5. De uma função f, sabe-se que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x-1)=0$. De uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao seu gráfico.

O valor de $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+f(x)+2x\right)-\lim_{x\to0^+}\frac{5}{g(x)}$ é:

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

6. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x\,e^x}{2}$.

6.1. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, mostre que existe, pelo menos, um ponto cuja abcissa pertença ao intervalo $]0,1[$ e no qual a reta tangente ao gráfico da função f nesse ponto seja perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares.

6.2. Considere, num referencial o.n. Oxy, o gráfico da função f e o gráfico da função g definida por $g(x) = \ln(x+2) + 4$.

Sabe-se que:

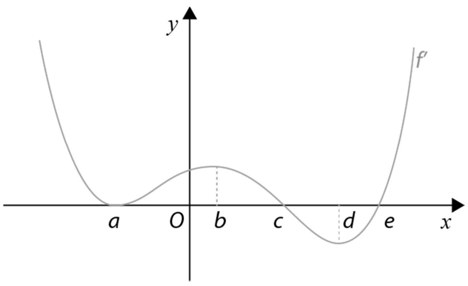
- A é o ponto de interseção do gráfico da função f com o gráfico da função g, de abcissa positiva;
- B é o ponto de interseção do gráfico da função g com o eixo das ordenadas;
- O é a origem do referencial.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[OAB]$.

Na sua resposta deve:

- reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos O, A e B e representar o triângulo $[OAB]$;
- indicar a ordenada do ponto B, com arredondamento às centésimas;
- indicar as coordenadas do ponto A, com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

7. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.



Na figura ao lado está representado o gráfico de f', primeira derivada da função f.

Tal como a figura sugere, a função f' tem:

- um mínimo relativo para $x = a$ e para $x = d$;
- um máximo relativo para $x = b$;
- três zeros: a, c e e.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

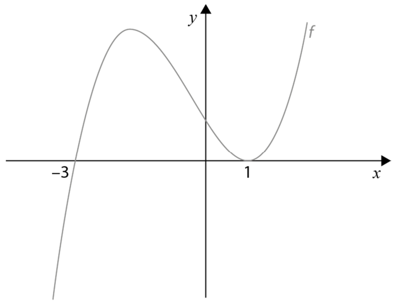
(A) f admite três extremos relativos.

(B) O gráfico de f admite três pontos de inflexão.

(C) A reta tangente ao gráfico de f com declive máximo é a reta tangente em $x = b$.

(D) O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, a]$.

8. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o gráfico de uma função polinomial f de grau 3.



Sabe-se que:

- -3 e 1 são os únicos zeros da função f;
- a função f tem um mínimo relativo em $x = 1$;
- g', primeira derivada de uma função g, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = f(x) \times (x^2 + 1)$.

Considere as seguintes afirmações.

I. A função g tem dois extremos relativos.

II. O gráfico de g' não admite assíntotas verticais.

III. $g''(1) = 0$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

9. Para cada número real k, considere a função f, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - 2\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} & \text{se} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ k & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{2x}{2e^x - 2} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

9.1. Determine o valor de k para o qual a função f é contínua em $x = 0$.

9.2. Estude o gráfico da função f quanto à existência de assíntotas não verticais, e, caso existam, escreva as suas equações.

9.3. Em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, considere a função h definida por $h(x) = f(x) \times \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} \times \operatorname{sen} x$.

Estude a função h quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	2.	3.	4.	5.	6.1.	6.2.	7.	8.	9.1.	9.2.	9.3.	Total
8	20	8	8	8	25	25	8	20	20	25	25	200