TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (B)

${}^{5}C_3$ é o número de maneiras distintas de escolher as posições que as três vogais vão ocupar de entre os cinco lugares disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem ${}^{5}A_3$ modos diferentes de escolher três vogais, de entre cinco, e de as colocar ordenadamente. E, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{10}A_2$ modos diferentes de escolher dois algarismos de entre dez e de os colocar ordenadamente.

Assim, ${}^{5}C_3 \times {}^{5}A_3 \times {}^{10}A_2 = 54\,000$ é o número de códigos pedido.

1.2. Número de casos possíveis: ${}^{15}A'_5$

${}^{15}A'_5$ é o número de códigos de cinco carateres, repetidos ou não, que é possível formar com 15 carateres.

Número de casos favoráveis: $5! + 5!$

Sabemos que 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35 e 9 + 8 + 7 + 6 + 4 = 34, logo, para que o código seja constituído por cinco algarismos diferentes cuja soma seja um número superior a 33, existem apenas dois casos mutuamente exclusivos: ou o código é constituído pelos algarismos 9, 8, 7, 6 e 5 ou o código é constituído pelos algarismos 9, 8, 7, 6 e 4.

5! é o número de códigos diferentes que existem permutando os algarismos 9, 8, 7, 6 e 5 e analogamente 5! é o número de códigos diferentes que existem permutando os algarismos 9, 8, 7, 6 e 4.

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{5!+5!}{{}^{15}A'_5} = \frac{240}{759\,375} \approx 0,00032$.

2.

2.1. $f(\alpha) = 2\left(\overline{OB} + \overline{OD} + \overline{BD}\right) = 2\left(1 + \text{sen}\alpha + (-\cos\alpha)\right) = 2(1 + \text{sen}\alpha - \cos\alpha)$

$\downarrow$

Observe-se que, como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\cos\alpha < 0$. Logo, $\overline{BD} = -\cos\alpha$.

Sabe-se que, para um determinado valor de α, $f(\alpha + 1) = f(\alpha) - 0{,}25 \times f(\alpha)$, isto é, $f(\alpha + 1) = 0{,}75 \times f(\alpha)$.

Pretende–se, então, resolver a equação:

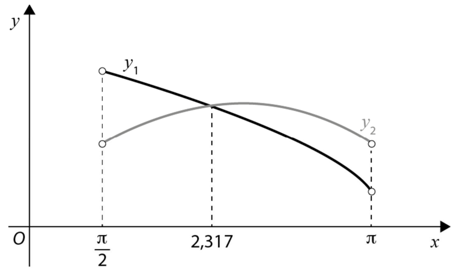
$2(1 + \text{sen}(\alpha + 1) - \cos(\alpha + 1)) = 0{,}75 \times 2(1 + \text{sen}\alpha - \cos\alpha)$

Recorrendo à calculadora gráfica:

$y_1 = 2(1 + \text{sen}(x+1) - \cos(x+1))$

$y_2 = 0{,}75 \times 2(1 + \text{sen}x - \cos x)$

Assim, $\alpha \approx 2{,}32$ rad.



2.2.

2.2.1. $g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1+\text{sen}x-\cos x)-0}{x} =$

$= 2\left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\text{sen}x}{x}\right)$

Cálculo auxiliar

$g(0) = 2(1 + \text{sen}0 - \cos 0) =$

$= 2(1 + 0 - 1) =$

$= 0$

Como:

- $\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}}_{\text{indeterminação } \left(\frac{0}{0}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} =$

$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{1+\cos x} =$

$= 1 \times \frac{0}{1+1} =$

$= 0$

- $\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x}}_{\text{limite notável}} = 1$

Tem-se que:

$2\left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\text{sen}x}{x}\right) = 2\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} + 2\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} =$

$= 2 \times 0 + 2 \times 1 =$

$= 2$

Assim, $g'(0) = 2$.

2.2.2. Opção (D)

$m_t = g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= 1 - \sqrt{3} < 0$

Cálculo auxiliar

$g'(x) = \left(2(1 + \text{sen}x - \cos x)\right)' =$

$= 2(0 + \cos x + \text{sen}x) =$

$= 2(\cos x + \text{sen}x)$

A inclinação da reta t é o ângulo α, compreendido entre $90°$ e $180°$ (já que o declive da reta é negativo), tal que $\text{tg}\alpha = 1 - \sqrt{3}$. Recorrendo à calculadora, $\text{tg}^{-1}\left(1 - \sqrt{3}\right) \approx -36°$, logo a inclinação da reta t é $-36° + 180° = 144°$.

3.

3.1. Opção (C)

Para a função f ser contínua em $x=0$ tem que se verificar $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

• $f(0) = k^2 - 5k + 4$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1-x}\ -\ 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2-1^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{1-x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{-x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} -\left(\sqrt{1-x}+1\right) =$

$= -\left(\sqrt{1-0}+1\right) =$

$= -2$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{2x}{x+5} - 2\right) = \frac{0}{5} - 2 = -2$

Assim, $f(0) = -2$. Logo:

$k^2 - 5k + 4 = -2 \Leftrightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow k = 2 \ \vee \ k = 3$

Das opções apresentadas, apenas a (C) satisfaz esta condição.

3.2. $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

• $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x}-1}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x}-1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$b = \lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2-1^2} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{1-x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} -\left(\sqrt{1-x}+1\right) =$

$= -(+\infty) =$

$= -\infty$

Como b não é um número real, conclui-se que o gráfico de f não apresenta assíntotas não verticais quando $x \to -\infty$.

• $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{2x}{x+5} - 2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x+5} - \frac{2}{x}\right) = 0 - 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x+5} - 2\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)} - 2\right) =$$

$$= \frac{2}{1+0} - 2 =$$

$$= 0$$

Como $m = 0$ e $b = 0$, conclui-se que a reta de equação $y = 0$ é assíntota não vertical, em particular, é assíntota horizontal ao gráfico da função f quando $x \to +\infty$.

3.3. Em $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x+5} - 2\right)' = \frac{(2x)' \times (x+5) - 2x \times (x+5)'}{(x+5)^2} - 0 = \frac{2(x+5) - 2x \times 1}{(x+5)^2} =$$

$$= \frac{10}{(x+5)^2} > 0$$

Como $f'(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$, conclui-se que f é crescente em $]0, +\infty[$.

4. Sejam S e C os acontecimentos:

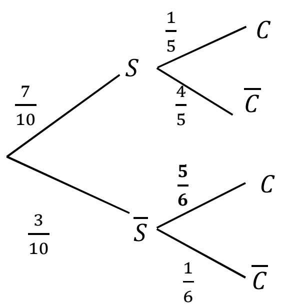
S: “o aluno é do Ensino Secundário”

C: “o aluno almoça diariamente na cantina”

Sabe-se que:

- $P(S) = \frac{7}{10}$
- $P(C|S) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- $P(\overline{C}|\overline{S}) = \frac{1}{6}$

Pretende-se determinar o valor de $P(\overline{S} \cup C) - P(\overline{S} \cap C)$:



$$P(S \cap C) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{50}$$

$$P(S \cap \overline{C}) = \frac{7}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{50}$$

$$P(\overline{S} \cap C) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$$

$$P(\overline{S} \cap \overline{C}) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{20}$$

$$P(C) = \frac{7}{50} + \frac{1}{4} = \frac{39}{100}$$

Assim:

$$P(\overline{S} \cup C) - P(\overline{s} \cap C) = P(\overline{S}) + P(C) - P(\overline{S} \cap C) - P(\overline{S} \cap C) =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{39}{100} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{19}{100}$$

A probabilidade pretendida é, então, 19%.

5.

5.1. Opção (A)

$$f(\pi + x) + f\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos^2(\pi + x) - 2\text{sen}(\pi + x) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) =$$

$$= \cos^2 x - 2(-\text{sen}x) + \text{sen}^2 x - 2(-\cos x) =$$

$$= \cos^2 x + \text{sen}^2 x + 2\text{sen}x + 2\cos x =$$

$$= 1 + 2\text{sen}x + 2\cos x$$

5.2. $f(x) = \cos^2 x - 2\text{sen}x$

$$f'(x) = 2 \times \cos x \times (\cos x)' - 2\cos x = -2\cos x \times \text{sen}x - 2\cos x =$$

$$= -\text{sen}(2x) - 2\cos x$$

$$f''(x) = -2\cos(2x) + 2\text{sen}x$$

$$f''(x) = 0$$

$$-2\cos(2x) + 2\text{sen}x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}x = 2\cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{2} - x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee \ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left]0, \frac{5\pi}{6}\right[$, o zero de f'' é $\frac{\pi}{6}$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$
Sinal de f''		$-$	0	$+$	
Sentido das concavidades do gráfico de f		$\cap$	P.I.	$\cup$	

Cálculo auxiliar

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

No intervalo $\left]0, \frac{5\pi}{6}\right[$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{\pi}{6}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$; tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$.

6. Opção (D)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)\times g(2) - f(2)\times g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{-\frac{1}{4}\times(-3) - \frac{1}{2}\times(-1)}{(-3)^2} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{9} =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{9} =$$

$$= \frac{5}{36}$$

Cálculos auxiliares

- $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $f'(2) = -\frac{1}{4}$
- $g'(2) = -1$, pois $g'(2)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de g em $x = 2$ e esta reta é perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares, cujo declive é 1.

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - x$.

- g é contínua, por se tratar da diferença de duas funções contínuas (f e $x \mapsto x$, função polinomial). Em particular, g é contínua em $[f^{-1}(a), a]$.
- $g(f^{-1}(a)) = \underbrace{f(f^{-1}(a))}_{=a} - \underbrace{f^{-1}(a)}_{f(a)} = a - f(a) > 0$, pois $a > f(a)$.

  $g(a) = f(a) - a < 0$, pois $f(a) < a$.

  $g(a) < 0 < g(f^{-1}(a))$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \,]f^{-1}(a), a[: g(c) = 0$$

ou seja:

$$\exists c \in \,]f^{-1}(a), a[: f(c) - c = 0$$

isto é:

$$\exists c \in \,]f^{-1}(a), a[: f(c) = c$$

Provámos, assim, que a equação $f(x) = x$ é possível no intervalo $]f^{-1}(a), a[$.