TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

Tem-se que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{5}$ e $P(A|B) = \frac{2}{3}$.

- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{5} = P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

- $P(A|B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{5}}{P(B)} = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{6}{10}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{5}$$

Pretende-se determinar o valor de $P(B|A)$:

$$P(B \backslash A) = P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} =$$

$$= 0{,}2$$

2.

2.1. O número de maneiras distintas de colocar os cinco amigos lado a lado, sem restrições, é igual a 5! = 120.

Determinemos agora o número de maneiras distintas de colocar os cinco amigos lado a lado com a Raquel e o namorado juntos:

$$\underbrace{\underline{\ R\ }\ \underline{\ N\ }}_{2!} \times \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{3!} \times 4 = 48$$

2! é o número de maneiras de a Raquel e o namorado trocarem entre si; 3! é o número de maneiras de os três amigos trocarem entre si e 4 é o número de posições diferentes que o casal de namorados pode ocupar na fila.

Assim, se ao número de maneiras distintas de colocar os cinco amigos, sem restrições, subtrairmos o número de maneiras distintas de colocar os cinco amigos com o casal de namorados juntos, temos o número de maneiras de colocar os cinco amigos em fila com a Raquel e o namorado separados: 120 – 48 = 72

2.2.

2.2.1. Número de casos possíveis:

$$\underbrace{^{16}C_8}_{\substack{\text{Número de maneiras}\\ \text{de colocar as}\\ \text{cápsulas pretas}}} \times \underbrace{^{8}C_5}_{\substack{\text{Número de maneiras de}\\ \text{colocar as 5 cápsulas}\\ \text{douradas nos 8}\\ \text{compartimentos que sobram}}} \times \underbrace{^{3}C_2}_{\substack{\text{Número de maneiras}\\ \text{de colocar as}\\ \text{2 cápsulas verdes nos}\\ \text{3 compartimentos que sobram}}} \times 1$$

Número de casos favoráveis:

$$\underbrace{4}_{\substack{\text{Escolher a coluna}\\ \text{ocupada com}\\ \text{cápsulas}\\ \text{douradas}}} \times \underbrace{12}_{\substack{\text{Número de maneiras}\\ \text{de colocar a}\\ \text{cápsula dourada}\\ \text{restante}}} \times \underbrace{^{11}C_8}_{\substack{\text{Número de maneiras}\\ \text{de colocar as 8}\\ \text{cápsulas pretas nos 11}\\ \text{compartimentoe}\\ \text{restantes}}} \times \underbrace{^{3}C_2}_{\substack{\text{Número de maneiras}\\ \text{de colocar as 5}\\ \text{cápsulas douradas}\\ \text{nos 8 compartimentos}\\ \text{que sobram}}} \times 1$$

	D		D
	D		
	D		
	D		

Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{4 \times 12 \times {}^{11}C_8 \times {}^{3}C_2 \times 1}{{}^{16}C_8 \times {}^{8}C_5 \times {}^{3}C_2 \times 1} = \frac{23\,760}{2\,162\,160} = \frac{1}{91}$$

2.2.2. $P(A \cap B|\bar{C})$ representa a probabilidade de a Raquel escolher uma cápsula roxa e duas cápsulas verdes, sabendo que as cápsulas escolhidas não são todas da mesma cor.

De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis e em número finito. Admitindo que a Raquel não escolheu todas as cápsulas da mesma cor, temos ${}^{16}C_5 - {}^{8}C_5 - {}^{5}C_5$ casos possíveis.

Se ao número de maneiras de escolher cinco cápsulas de entre as dezasseis, sem restrições, ${}^{16}C_8$, retirarmos o número de maneiras de escolher cinco cápsulas pretas, ${}^{8}C_5$, e o número de maneiras de escolher cinco cápsulas douradas, ${}^{5}C_5$, obtemos ${}^{16}C_5 - {}^{8}C_5 - {}^{5}C_5$, que representa o número de conjuntos de cinco cápsulas que não são todos da mesma cor.

Como, destes casos, pretendemos determinar aqueles em que a Raquel escolhe uma cápsula roxa e duas cápsulas verdes, temos ${}^{1}C_1 \times {}^{2}C_2 \times {}^{13}C_2$ casos favoráveis.

Só existe um modo de escolher a cápsula roxa, ${}^{1}C_1$, e um modo de escolher as duas cápsulas verdes, ${}^{2}C_2$, e existem ${}^{13}C_2$ modos distintos de escolher as duas cápsulas restantes de entre treze cápsulas (oito pretas e cinco douradas) para completar o conjunto de cinco cápsulas. Assim, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{{}^{1}C_1 \times {}^{2}C_2 \times {}^{13}C_2}{{}^{16}C_5 - {}^{8}C_5 - {}^{5}C_5} = \frac{78}{4311} = \frac{26}{1437}$$

3. O termo geral deste desenvolvimento é:

$${}^6C_p \times \left(2\sqrt{x}\right)^{6-p} \times \left(\frac{k}{x}\right)^p, p \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$= {}^6C_p \times 2^{6-p} \times x^{3-\frac{p}{2}} \times k^p \times x^{-p}, p \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$= {}^6C_p \times 2^{6-p} \times k^p \times x^{3-\frac{3p}{2}}, p \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

Para determinarmos o termo independente, faz-se:

$$3 - \frac{3p}{2} = 0 \Leftrightarrow 3 = \frac{3p}{2} \Leftrightarrow p = 2$$

Logo:

$${}^6C_2 \times 2^{6-2} \times k^2 = 3840 \Leftrightarrow 15 \times 16 \times k^2 = 3840 \Leftrightarrow k^2 = \frac{3840}{240} \Leftrightarrow k^2 = 16 \Leftrightarrow k = \pm 4$$

Como $k > 0$, então $k = 4$.

4. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: "a aluna escolhida frequenta o 9.º ano."

B: "a aluna escolhida tem altura superior a 1,7 metros."

Sabemos que $P(B|A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{11}{21}$ e $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$.

Comecemos por construir uma tabela de dupla entrada com a informação recolhida:

	A	$\overline{A}$	Total
B	$\frac{2}{7}$		$\frac{11}{21}$
$\overline{B}$			
Total			1

$$P(B|A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{7}}{P(A)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{3}} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{6}{14}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{7}$$

- $P\left(B \cap \overline{A}\right) = \frac{11}{21} - \frac{2}{7} = \frac{5}{21}$
- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \frac{4}{7} - \frac{5}{21} = \frac{7}{21}$

	A	$\overline{A}$	Total
B	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{11}{21}$
$\overline{B}$		$\frac{7}{21}$	
Total	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

Pretendemos determinar:

$$P\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{7}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{49}{84} \approx 0{,}58$$

5. Opção (A)

Sabemos que ${}^{n}C_{12} = {}^{n}C_{19}$. Logo, $n = 12 + 19 = 31$. O elemento central da linha seguinte é ${}^{32}C_{16}$.

6. $P(A|(B \cap C)) \times P(C) + P(A|(B \cap \overline{C})) \times P(\overline{C}) = \frac{P(A\cap(B\cap C))}{P(B\cap C)} \times P(C) + \frac{P(A\cap(B\cap\overline{C}))}{P(B\cap\overline{C})} \times P(\overline{C}) =$

$$\underbrace{=}_{\substack{B \text{ e } C \text{ acontecimentos}\\ \text{independentes}}} \frac{P(A\cap(B\cap C))}{P(B)\times P(C)} \times P(C) + \frac{P(A\cap(B\cap\overline{C}))}{P(B)-P(B\cap C)} \times P(\overline{C}) =$$

$$\underbrace{=}_{\substack{B \text{ e } C \text{ acontecimentos}\\ \text{independentes}}} \frac{P((A\cap B)\cap C)}{P(B)} + \frac{P((A\cap B)\cap\overline{C})}{P(B)-P(B)\times P(C)} \times P(\overline{C}) =$$

$$= \frac{P((A\cap B)\cap C)}{P(B)} + \frac{P((A\cap B)\cap\overline{C})}{P(B)(1-P(C))} \times P(\overline{C}) =$$

$$= \frac{P((A\cap B)\cap C)}{P(B)} + \frac{P((A\cap B)\cap\overline{C})}{P(B)\,P(\overline{C})} \times P(\overline{C}) =$$

$$= \frac{P((A\cap B)\cap C) + P((A\cap B)\cap\overline{C})}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} =$$

$= P(A|B)$, como queríamos demonstrar.

7. Opção (B)

2^{10} é o número total de subconjuntos de um conjunto com dez elementos, onde está incluído o conjunto vazio, dez conjuntos com apenas 1 elemento e ${}^{10}C_2$ conjuntos com 2 elementos.

Como se pretende que as pizas tenham pelo menos três ingredientes, podemos então fazer

$2^{10} - 1 - 10 - {}^{10}C_2 = 1024 - 1 - 10 - 45 = 968$ pizas diferentes nas condições pretendidas.

8.

8.1. Opção (A)

Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2 = 66$

Número de casos favoráveis: 6

A probabilidade pretendida é igual a $\frac{6}{66} = \frac{1}{11}$.

8.2.

8.2.1. Números primos de 1 a 7: 2, 3, 5 e 7

${}^{4}C_2 \times 2! \times 5! = 1440$ maneiras

- ${}^{4}C_2$ é o número de maneiras de escolher os dois números primos de entre os quatro existentes, para colocar nas duas bases;

- 2! é o número de maneiras de permutar esses dois números primos entre si;
- 5! é o número de maneiras de permutar os restantes algarismos que faltam colocar nas restantes cinco faces laterais que ainda não estão numeradas.

8.2.2. Como dispomos apenas de 4 algarismos ímpares e 3 algarismos pares, apenas podemos considerar as seguintes maneiras de numerar as restantes cinco faces laterais:

- com 4 ímpares e 1 par;
- com 3 ímpares e 2 pares;
- com 2 ímpares e 3 pares;

sendo a soma par no primeiro e no terceiro formato e ímpar no formato do meio. Assim:

$$\_8\_ \quad \underbrace{\_i\_ \quad \_i\_ \quad \_i\_ \quad \_i\_} \quad \_p\_$$

$$1 \times \underbrace{4!}_{\substack{\text{Número de maneiras de} \\ \text{permutar os algarismos} \\ \text{ímpares (1,3,5 e 7) entre si}}} \times \underbrace{3}_{\substack{\text{Escolha do} \\ \text{algarismo} \\ \text{par (2,4 ou 6)}}} \times \underbrace{5}_{\substack{\text{Número de} \\ \text{posições para o} \\ \text{algarismo par}}} \times \underbrace{2!}_{\substack{\text{Número de maneiras} \\ \text{de permutar os} \\ \text{restantes 2 algarismos} \\ \text{para as bases}}}$$

ou

$$\_8\_ \quad \underbrace{\_i\_ \quad \_i\_} \quad \underbrace{\_p\_ \quad \_p\_ \quad \_p\_}$$

$$1 \times \underbrace{4 \times 3}_{\substack{\text{Número de maneiras} \\ \text{de escolher} \\ \text{ordenadamente} \\ \text{dois algarismos ímpares}}} \times \underbrace{3!}_{\substack{\text{Número de maneiras} \\ \text{de permutar os} \\ \text{algarismos pares} \\ \text{restantes entre si (2,4 e 6)}}} \times \underbrace{{}^{5}C_2}_{\substack{\text{Número de} \\ \text{maneiras de escolher} \\ \text{2 posições para os} \\ \text{algarismos ímpares}}} \times \underbrace{2!}_{\substack{\text{Número de maneiras} \\ \text{de permutar os} \\ \text{restantes 2 algarismos} \\ \text{para as bases}}}$$

Logo, $4! \times 3 \times 5 \times 2! + 4 \times 3 \times 3! \times {}^{5}C_2 \times 2! = 2160$ é o número de maneiras nas condições pedidas.

8.3. Opção (C)

Número de casos possíveis: __ __ __ __ __ __ __ __

$$n \times n \times n \times n \times n \times n \times n \times n = n^8 = {}^{n}A'_8$$

Número de casos favoráveis: ${}^{8}C_2 \times {}^{n}C_1 \times {}^{n-1}A_6$

- ${}^{8}C_2$ é o número de maneiras de escolher qual o conjunto de duas faces de entre as oito que serão pintadas da mesma cor;
- ${}^{n}C_1$ é o número de maneiras de escolher qual a cor de entre as n a utilizar nas faces pintadas da mesma cor;
- ${}^{n-1}A_6$ é o número de maneiras de pintar ordenadamente as restantes seis faces com as $n-1$ cores ainda disponíveis.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\dfrac{{}^{8}C_2 \times {}^{n}C_1 \times {}^{n-1}A_6}{{}^{n}A'_8}$.