TESTE N.º 1
Matemática A
Proposta de resolução

CADERNO 1

1. Opção (B)

$9\;4\;\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_}$

${}^{7}C_2 \times {}^{5}C_2 \times 3! = 1260$

- ${}^{7}C_2$ é o número de maneiras de escolher 2 das 7 posições para colocar o algarismo “5”;
- ${}^{5}C_2$ é o número de maneiras de escolher 2 das 5 posições ainda disponíveis para colocar o algarismo “3”;
- $3!$ é o número de maneiras de permutar os 3 algarismos diferentes entre si (1, 7 e 9).

2.

2.1. ${}^{9}C_2 \times {}^{3}C_2 + {}^{9}C_3 \times {}^{3}C_1 + {}^{9}C_4 = 486$

Como existem 9 familiares e 3 amigas, para formar este grupo de 5 pessoas nestas condições, existem três tipos de hipóteses em alternativa:

- O grupo é formado pela Rita, 2 familiares e 2 amigas – existem ${}^{1}C_1 \times {}^{9}C_2 \times {}^{3}C_2$ maneiras;
- O grupo é formado pela Rita, 3 familiares e 1 amiga – existem ${}^{1}C_1 \times {}^{9}C_3 \times {}^{3}C_1$ maneiras;
- O grupo é formado pela Rita e 4 familiares – existem ${}^{1}C_1 \times {}^{9}C_4 \times {}^{3}C_0$ maneiras.

2.2. $4! \times 3! \times 8! = 5\,806\,080$

$\underbrace{\boxed{\_\,\_\,\_\,\_}}_{\text{4 avós}}\quad \underbrace{\boxed{\_\,\_\,\_}}_{\text{3 amigas}}\quad \underbrace{\boxed{\_}\,\boxed{\_}\,\boxed{\_}\,\boxed{\_}\,\boxed{\_}\,\boxed{\_}}_{\text{as restantes 6 pessoas}}$

- $4!$ é o número de maneiras de os 4 avós se colocarem para a fotografia, permutando entre si;
- $3!$ é o número de maneiras de as 3 amigas se colocarem para a fotografia, permutando entre si;
- $8!$ é o número de maneiras de permutar as restantes 6 pessoas entre si e também com o bloco dos avós e o bloco das amigas.

2.3. ${}^{13+n}C_2 \ = 210$

$$\Leftrightarrow \frac{(13+n)!}{2! \times (13+n-2)!} = 210 \ \Leftrightarrow \frac{(n+13)\times(n+12)\times\cancel{(n+11)!}}{2\ \times\cancel{(n+11)!}} = 210$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 12n + 13n + 156 = 420 \ \Leftrightarrow n^2 + 25n - 264 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4\times 1 \times (-264)}}{2\times 1} \Leftrightarrow n = \frac{-25+41}{2} \vee n = \frac{-25-41}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 8 \ \vee n = -33$$

Juntaram-se à festa 8 amigos.

3. **Opção (B)**

$2\times 10 + 2\times\left({}^{10}C_2 \ - 10\right) = 90$

- 2×10 é o número de diagonais das faces laterais, já que o prisma tem 10 faces laterais e cada uma delas tem 2 diagonais;
- $2\times\left({}^{10}C_2 \ - 10\right)$ é o número de diagonais das 2 bases: ${}^{10}C_2$ é o número de segmentos de reta definidos pelos vértices de uma das bases, o que inclui os 10 lados dessa base, logo ${}^{10}C_2 \ - 10$ é o número de diagonais de cada uma das bases.

4. Sabemos que $1 \ + \ n \ = \ 47$, isto é, $n \ = \ 46$.

A linha de ordem $n \ = \ 46$ tem 47 elementos. Assim, existem ${}^{47}C_2$ maneiras distintas de escolher dois elementos dessa linha e $23 \ \times \ 1$ maneiras distintas de escolher dois elementos iguais, pois, os elementos equidistantes dos extremos são iguais.

Logo, $\frac{23}{{}^{47}C_2} \ \approx \ 0{,}021$ é a probabilidade pedida.

5. O termo geral do desenvolvimento de $\left(3+\frac{x}{3}\right)^5$ é ${}^5C_k \ \times 3^{5-k}\times\left(\frac{x}{3}\right)^k = {}^5C_k \ \times 3^{5-2k}\times x^k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$.

O termo geral do desenvolvimento de $(a+x)^6$ é ${}^6C_p \ \times a^{6-p} \times \ x^p, \ p \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$

O coeficiente do termo em x^3 é dado por ${}^5C_3 \ \times 3^{-1} + \ {}^6C_3 \ a^3$

Então, $\frac{{}^5C_3}{3} + \ {}^6C_3 \ \times a^3 = \frac{3850}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{3} + 20a^3 = \frac{3850}{3} \Leftrightarrow 10 + 60a^3 = 3850 \Leftrightarrow 60a^3 = 3840 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3 = 64 \Leftrightarrow a = 4$

CADERNO 2

6. Opção (C)

2^n é o número total de subconjuntos de um conjunto com n elementos, onde está incluído o conjunto vazio e n subconjuntos com apenas 1 elemento.

Como se pretende fazer ramos com pelo menos duas espécies de flores, tem-se que $2^n - 1 - n$ é uma resposta correta ao problema.

7. Opção (C)

$$^{2018}C_p + {}^{2019}C_{p+2} + {}^{2018}C_{p+1}$$
$$= \underbrace{^{2018}C_p + {}^{2018}C_{p+1}} + {}^{2019}C_{p+2}$$
$$= \quad {}^{2019}C_{p+1} \quad + {}^{2019}C_{p+2}$$
$$= {}^{2020}C_{p+2}$$
$$= a$$

8. Pretendemos determinar o número de números pares que podem ser formados utilizando os sete algarismos que constituem o número $5\,454\,531$.

Uma resposta correta é ${}^6\mathrm{C}_3 \times 3!$. Comecemos por notar que, para ser par, tem que terminar obrigatoriamente em 4. Assim, restam três algarismos iguais a 5, um algarismo 4, um algarismo 3 e um algarismo 1 para colocar em 6 posições.

Existem ${}^6\mathrm{C}_3$ maneiras distintas de escolher as três posições de entre as 6 possíveis para colocar os três algarismos 5. E, por cada uma destas maneiras, existem $3!$ maneiras distintas de colocar os algarismos 4, 3 e 1 em três posições distintas.

Uma resposta igualmente correta é $\frac{6!\times 2}{3!\times 2!}$. Como para o número ser par tem que terminar em 4, existem 2 possibilidades para o último algarismo (os dois algarismos 4). E, para cada uma destas maneiras, existem $6!$ maneiras distintas de colocar seis algarismos em seis posições. No entanto, como existem três algarismos iguais a 5 e dois algarismos iguais a 4 que não alteram o número quando permutam entre si, dividimos por $3! \times 2!$.

9. Note-se que para a expressão do primeiro membro da igualdade fazer sentido, é necessário que $n - 4 \geq 0$. Assim, $n \geq 4$.

$$^{n+1}A_2 + \frac{(n-2)(n-3)!}{(n-4)! + (n-3)!} = 5 \Leftrightarrow (n+1)n + \frac{(n-2)(n-3)!}{(n-4)! + (n-3)(n-4)!} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n+\frac{(n-2)(n-3)!}{(n-4)!\,(1+n-3)}=5 \Leftrightarrow n^2+n+(n-3)=5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+2n-8=0 \Leftrightarrow n=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\times(-8)}}{2} \Leftrightarrow n=2\ \vee n=-4$$

Como $n \geq 4$, então a equação é impossível.

$c.s. = \emptyset$

10. Opção (B)

$n!$ é o número de maneiras de se colocarem lado a lado n amigos, sem restrições.

$2! \times (n-2)! \times (n-1)$ é o número de maneiras de se colocarem lado a lado com o André e o Diogo juntos.

$n! - 2! \times (n-1)! \ = \ n(n-1)! - 2 \times (n-1)! = (n-1)! \times (n-2)$ é a resposta pedida.

11. Sabemos que:

$P(\bar{A}) = 0{,}3$ e $P(A \cap B) = 0{,}2$

Então, $P(A) = 0{,}7$

E, como $P(A \cup B) \leq 1$, então, $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$, logo,

$P(B) \leq 1 - 0{,}7 + 0{,}2$, ou seja,

$P(B) \leq 0{,}5$

De onde se conclui que:

$$\frac{1}{P(B)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0{,}4 \Leftrightarrow P(A|B) \geq \frac{2}{5}$$

12. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: “ter chegado ao Porto na companhia aérea *low cost*”

B: “ter idade inferior a 40 anos”

Sabemos que:

$P(A) = \frac{3}{4}$

$P(B|A) = \frac{2}{5}$, ou seja, $\frac{P(B \cap A)}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{3}{10}$

$P(A|\bar{B}) = \frac{3}{4}$, ou seja, $\frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\bar{B})} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} = P(\bar{B}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{9}{20}}{\frac{3}{4}} = P(\bar{B}) \Leftrightarrow P(\bar{B}) = \frac{3}{5}$$