TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. $\underbrace{\_C\_ \quad \_P\_ \quad \_E\_ \quad \_O\_}$

$3! \ \times \ 3! \ \times \ 3! \ \times \ 3! \ \times \ 4! = 31\,104$

- 3! é o número de maneiras distintas de as três figuras do naipe de copas permutarem entre si;
- 3! é o número de maneiras distintas de as três figuras do naipe de paus permutarem entre si;
- 3! é o número de maneiras distintas de as três figuras do naipe de espadas permutarem entre si;
- 3! é o número de maneiras distintas de as três figuras do naipe de ouros permutarem entre si;
- 4! é o número de maneiras distintas de os quatro blocos (copas, paus, espadas e ouros) permutarem entre si.

1.2. $\underbrace{{}^{4}C_2 \times {}^{48}C_3}_{\substack{\text{retirar exatamente} \\ \text{2 ases}}} + \underbrace{{}^{4}C_3 \times {}^{48}C_2}_{\substack{\text{retirar exatamente} \\ \text{3 ases}}} + \underbrace{{}^{4}C_4 \times {}^{48}C_1}_{\substack{\text{retirar exatamente} \\ \text{4 ases}}} = 108\,336$

1.3. Número de casos possíveis: ${}^{9}C_6$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{1}_{\substack{\text{escolher a} \\ \text{carta com "3"}}} \times \underbrace{1}_{\substack{\text{escolher a} \\ \text{carta com "9"}}} \times \underbrace{{}^{5}C_4}_{\substack{\text{número de maneiras de escolher 4 cartas} \\ \text{de entre as 5 cartas com o 4,5,6,7 e 8}}}$

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{5}C_4}{{}^{9}C_6} = \frac{5}{84}$.

2. Pretendemos determinar todos os números naturais pares de sete algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, dois algarismos 4, três algarismos 5 e um algarismo 7.

Existem dois casos mutuamente exclusivos: ou terminam em 0 ou terminam em 4.

$\_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_0\_ \qquad \text{ou} \qquad \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \ \_4\_$

${}^{6}C_2 \times {}^{4}C_3 \quad + \quad 5 \times 5 \times {}^{4}C_3 \quad = 160$

- No caso de o número terminar em 0, existem ${}^{6}C_2$ maneiras distintas de escolher as posições dos dois algarismos 4 e, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{4}C_3$ maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 5. Para cada uma destas maneiras, só existe uma posição para colocar o algarismo 7.
- No caso de o número terminar em 4, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do 0 (não pode ocupar a posição da unidade do milhão) e, por cada uma destas maneiras, existem cinco maneiras distintas de escolher a posição do algarismo 4 restante. Para cada uma destas

maneiras, existem ${}^{4}C_3$ maneiras distintas de escolher as posições dos três algarismos 5. Feito isto, o algarismo 7 só tem uma maneira de ser colocado.

3. Opção (B)

Sabemos que os três últimos elementos de qualquer linha do triângulo de Pascal são iguais aos três primeiros elementos dessa mesma linha.

Assim:

$$1 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 191$$

Logo:

$${}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 190$$

Ou seja:

$${}^{n+1}C_2 = 190$$

Isto é, o terceiro elemento da linha seguinte é 190.

4. O termo geral do desenvolvimento de $(2 - kx)^5$, com $k \in \mathbb{R}$ é:

$${}^{5}C_p \; 2^{5-p} \times (-kx)^p = {}^{5}C_p \; 2^{5-p} \times (-1)^p \times k^p \times x^p$$

O coeficiente de x^3 é:

$${}^{5}C_3 \; 2^2 \times (-1)^3 \times k^3$$

Logo, vem que:

${}^{5}C_3 \times 4 \times (-1) \times k^3 = -1080 \Leftrightarrow k^3 = 27 \Leftrightarrow k = 3$

5. Opção (A)

Sabemos que $P(A) = P(B)$ e que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Assim:

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \frac{9}{8} \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) + P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) + 1 - P(A \cap B) = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(A) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(A) - 2\left(P(A)\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow -16\left(P(A)\right)^2 + 8P(A) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times (-16) \times (-1)}}{-32}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

Caderno 2

6. Opção (D)

O número de polígonos convexos é dado pelo número de subconjuntos com mais do que dois elementos escolhidos de entre os n pontos.

Se ao número total de subconjuntos do conjunto dos n pontos retirarmos o conjunto vazio, o número dos subconjuntos com um só elemento e o número dos subconjuntos com dois elementos, ficamos com o número pretendido:

$$2^n - 1 - n - {}^nC_2 = 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= 2^n - 1 - n - \frac{n^2-n}{2}$$

7. Opção (B)

$$\underbrace{p \times (p-1) \times (p-1) \times \ \dots \ \times (p-1)}_{n \text{ listas}} = p \times (p-1)^{n-1}$$

Para a primeira lista, existem p cores disponíveis e, portanto, p maneiras de a colorir. Por cada uma destas maneiras, existem $(p-1)$ maneiras de pintar a segunda lista, uma vez que a cor utilizada anteriormente não pode ser agora usada para pintar a segunda lista.

Por cada uma destas formas, existem também $(p-1)$ maneiras de pintar a terceira lista, já que só não pode ser utilizada a que foi usada para pintar a lista imediatamente anterior, e assim sucessivamente até perfazer as listas restantes.

8. Por um lado, ${}^{15}C_4 - {}^{13}C_2$ é uma resposta correta ao problema, pois ${}^{15}C_4$ é o número de comissões que se podem formar escolhendo 4 dos 15 professores sem qualquer restrição. Se a este número total de possibilidades retirarmos o número de comissões em que ambos os elementos do casal estão presentes (o que pode ser feito de ${}^{13}C_2$ maneiras diferentes, já que o António e a Susana fazem parte e basta escolher 2 dos restantes 13 professores para completar a comissão), obtemos então o número de comissões em que o António e a Susana não se encontram juntos.

Por outro lado, ${}^{13}C_4 + 2 \times {}^{13}C_3$ é também uma resposta correta ao problema, uma vez que existem duas possibilidades mutuamente exclusivas de formar uma comissão de 4 professores sem o António e a Susana juntos: ou o António e a Susana não pertencem ambos à comissão ou pertence apenas um deles à comissão.

No primeiro caso, existem ${}^{13}C_4$ maneiras de formar a comissão, já que corresponde ao número de maneiras de escolher 4 dos 13 professores, donde se excluíram os elementos do casal.

No segundo caso, existem 2 maneiras de escolher apenas um dos dois elementos do casal, sendo que, para cada uma destas maneiras, existem ${}^{13}C_3$ formas de escolher os restantes três elementos de entre os 13 professores, de onde se excluíram o António e a Susana, havendo, então, $2 \times {}^{13}C_3$ comissões em que apenas está presente um elemento do casal.

9. $\frac{(n+1)! - {}^nA_n}{(n-1)!} = 2019 \times {}^nC_{n-1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 2019 \times {}^nC_1$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)\times n\times(n-1)! - n\times(n-1)!}{(n-1)!} = 2019 \times n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)!((n+1)-1)}{(n-1)!} = 2019n$$

$$\Leftrightarrow n \times n = 2019n$$

$$\Leftrightarrow n = 2019 \quad (n \neq 0)$$

10. Opção (D)

$n!$ é o número de maneiras de dispor lado a lado, em linha reta, n amigos, sem restrições;

Existem 3! maneiras diferentes de dispor o Pedro, o Salvador e o Tiago, dados três lugares consecutivos. Existem $n-2$ escolhas possíveis de três lugares consecutivos. Finalmente, ocupados esses três lugares consecutivos, há $(n-3)!$ formas de dispor as restantes pessoas nos lugares que sobram.

Portanto, $3!\,(n-2)(n-3)! = 3!\,(n-2)!$ é o número de maneiras de dispor lado a lado, em linha, os n amigos, com o Pedro, o Salvador e o Tiago em lugares consecutivos.

O número pedido é, então, dado por:

$$n! - 3!\,(n-2)! = n(n-1)(n-2)! - 6(n-2)! =$$

$$= (n-2)!\,(n^2 - n - 6)$$

11. $P(\overline{A}) - P(\overline{A \cup B}) - P(B) \times \left[1 - P\left((\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})|B\right)\right] =$

$$= 1 - P(A) - P(\overline{A \cup B}) - P(B) \times [1 - P((A \cap B)|B)] =$$

$$= 1 - P(\overline{A \cup B}) - P(A) - P(B)\left[1 - \frac{P(A \cap B \cap B)}{P(B)}\right] =$$

$$= P(A \cup B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$= P(A \cup B) - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$= P(A \cup B) - P(A \cup B) =$$

$$= 0$$

12. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: "ser rapaz"

B: "pretender candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada"

Sabemos que:

- $P(A) = 2P(B)$
- $P(A|B) = \frac{2}{3}$
- $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{5}{6}$

Então:

$P(A|B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(B)$

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - 2P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - 2P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2P(B) - P(B) + \frac{2}{3}P(B)}{1 - 2P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{7}{3}P(B)}{1 - 2P(B)} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6\left(1 - \frac{7}{3}P(B)\right) = 5(1 - 2P(B))$$

$$\Leftrightarrow 6 - 14P(B) = 5 - 10P(B)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

A probabilidade de um aluno escolhido ao acaso pretender candidatar-se ao curso de Matemática Aplicada é $\frac{1}{4}$.