TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

A linha do triângulo de Pascal cujo segundo elemento é 2018 é a linha cujos elementos são da forma ${}^{2018}C_k$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq k \leq 2018$. Esta linha tem 2019 elementos.

Escolhendo, ao acaso, dois elementos dessa linha, o número de casos possíveis é ${}^{2019}C_2$.

Para que o produto dos dois elementos escolhidos seja inferior a 10 000, tem-se apenas 5 casos:

- o caso em que são escolhidos o primeiro e o último elementos da linha (ambos "1"): $1 \times 1 = 1 < 10\,000$;
- os 4 casos em que é escolhido o primeiro elemento ou o último (o "1") e o segundo elemento ou o penúltimo (o "2018"): $1 \times 2018 = 2018 < 10\,000$.

O produto entre quaisquer dois outros elementos será sempre superior a $10\,000$, já que se observa que o terceiro elemento da linha em causa é ${}^{2018}C_2 \ = 2\,035\,153$.

O valor da probabilidade pedida é, então, $\frac{5}{{}^{2019}C_2} = \frac{5}{2\,037\,171}$.

2. Opção (A)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como $P(A \cup B) = 0{,}84$ e A e B são equiprováveis, tem-se que:

$0{,}84 = P(A) + P(A) - P(A \cap B)$

Como $P(A|B) = P(A)$, vem que $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ e, assim, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Como A e B são equiprováveis, $P(A \cap B) = P(A) \times P(A)$.

Logo:

$$0{,}84 = P(A) + P(A) - P(A) \times P(A) \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 - 2P(A) + 0{,}84 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}84}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm \sqrt{0{,}64}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 1{,}4 \quad \vee \quad P(A) = 0{,}6$$

Como $P(A) < 1$, tem-se que $P(A) = 0{,}6$.

Assim:

$$P\big(A \cap \overline{B}\big) = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}6 \qquad \text{(pois } P(A \cap B) = P(A) \times P(A)\text{)}$$

$$= 0{,}2$$

3.

3.1. $N'(t)=\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{12}\times t\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{12}{\pi}\times\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{12}t\text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)=$

$=-\frac{\pi}{12}t\text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)$

$N'(t)=0$

$-\frac{\pi}{12}t\text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}t=0 \quad \vee \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow t=0 \quad \vee \quad \frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{2}=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=0 \quad \vee \quad t=-\frac{\pi}{2}\times\frac{12}{\pi}+k\pi\times\frac{12}{\pi}, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=0 \quad \vee \quad t=-6+12k, k\in\mathbb{Z}$

Em [0, 24]: $t=0$, $t=6$ e $t=18$

x	0		6		18		24
Sinal de N'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
Variação de N	Máx. $N(0)$	↘	mín. $N(6)$	↗	Máx. $N(18)$	↘	mín. $N(24)$

Cálculos auxiliares

$N'(3)=-\frac{\pi}{4}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}<0$

$N'(12)=-\pi\text{ sen}\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\pi>0$

$N'(24)=-2\pi\text{ sen}\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-2\pi<0$

$N(0)=-\frac{12}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+10=-\frac{12}{\pi}+10\approx 6{,}1803$

$N(6)=6\cos(\pi)-\frac{12}{\pi}\text{sen}(\pi)+10=4\rightarrow$ mínimo absoluto, pois $4<-\frac{12}{\pi}+10$.

$N(18)=18\cos(2\pi)-\frac{12}{\pi}\text{sen}(2\pi)+10=28\rightarrow$ máximo absoluto, pois $28>-\frac{12}{\pi}+10$.

$N(24)=24\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{12}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+10=-\frac{12}{\pi}+10\approx 6{,}1803$

Logo, $A=28-4=24$ dm

3.2. A taxa média de variação da função N no intervalo [3, 6] é dada por:

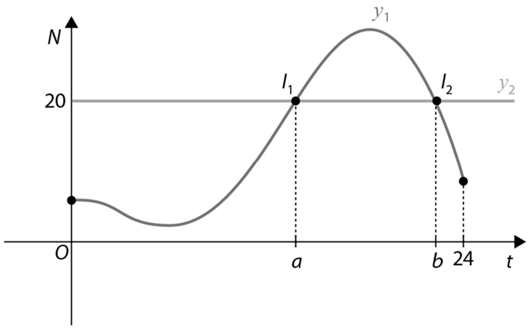
$$\frac{N(6)-N(3)}{6-3}=\frac{6\cos(\pi)-\frac{12}{\pi}\text{sen}(\pi)+10-\left(3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{12}{\pi}\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)+10\right)}{3}=$$

$$=\frac{-6+10+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{12}{\pi}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-10}{3}=$$

$$=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\approx-0{,}4$$

Entre as 3 e as 6 horas, o nível N, de água no depósito do sistema de arrefecimento diminuiu, em média, 0,4 dm por hora, aproximadamente.

3.3.



$y_1 = N(t)$

$y_2 = 20$

$I_1(a, 20)$ e $I_2(b, 20)$

$a \approx 13{,}903$ $\quad$ $b \approx 21{,}513$

$b - a \approx 21{,}513 - 13{,}903 = 7{,}61$

O nível N de água no depósito do sistema de arrefecimento da máquina é superior a 20 dm durante 7,61 horas, aproximadamente.

4. Opção (B)

$$C_0\left(1+\frac{r}{100\times 2}\right)^{2\times 10} = 2C_0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{r}{200}\right)^{20} = 2 \underset{1+\frac{r}{200}>0}{\Leftrightarrow} 1+\frac{r}{200} = \sqrt[20]{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{200} = \sqrt[20]{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow r = \left(\sqrt[20]{2} - 1\right) \times 200$$

$$\Leftrightarrow r \approx 7{,}05$$

Caderno 2

5. $P(B|\overline{A})$ significa a probabilidade de o número do cartão retirado ser maior do que 8, sabendo que o número do cartão retirado é par.

Ora, admitindo que o número do cartão retirado é par, existem $\frac{n}{2}$ casos possíveis, pois n é par.

Destes, apenas $\frac{n}{2} - 4$ são superiores a 8 (pois retiramos os cartões numerados com os números 2, 4, 6 e 8).

Assim, $\frac{\frac{n}{2}-4}{\frac{n}{2}} = \frac{n-8}{n}$ é a probabilidade pedida.

6. Opção (D)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-g(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\ln x+\operatorname{sen}x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - \left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{limite notável}} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right) =$$

$$= 2 - \big((+\infty) + 0 + 0\big) = -\infty$$

Observe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, pois a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f e o seu declive é 2;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}x}{x} = 0$, pois $-1 \leq \text{sen}x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, logo $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\text{sen}x \times \frac{1}{x}\right) = 0$.

7. Pretende-se determinar os valores de x para os quais $f(x) > 0$:

$$e^x + 6e^{-x} - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x + \frac{6}{e^x} - 5 > 0$$
$$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 6 - 5e^x > 0$$
$$\Leftrightarrow e^x < 2 \quad \vee \quad e^x > 3$$
$$\Leftrightarrow x < \ln 2 \quad \vee \quad x > \ln 3$$

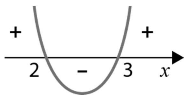
$\text{C.S.} =]-\infty, \ln 2[\, \cup \,]\ln 3, +\infty[$

A função f é positiva em $]-\infty, \ln 2[$ e em $]\ln 3, +\infty[$.

Cálculos auxiliares

Seja $y = e^x$:

$$y^2 + 6 - 5y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{5+1}{2} \quad \vee \quad y = \frac{5-1}{2}$$
$$\Leftrightarrow y = 3 \quad \vee \quad y = 2$$



Assim:

$y^2 - 5y + 6 > 0$

$\Leftrightarrow y < 2 \ \vee \ y > 3$

8. Opção (A)

$$(\ln(a^3) + \ln(a^4) + \ln(a^5)) \times (\ln 36)^{-1} = \frac{\ln(a^3 \times a^4 \times a^5)}{\ln 36} = \frac{\ln(a^{12})}{\ln(6^2)} =$$
$$= \frac{12\ln(a)}{2\ln(6)} =$$
$$= 6\frac{\ln(a)}{\ln(6)} =$$
$$= 6\log_6(a)$$

9.

9.1.

- **Assíntotas verticais**

  Como g é contínua em $]-\infty, -1[$, por, neste intervalo, se tratar do quociente de duas funções contínuas, apenas a reta de equação $x = -1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de g:

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1 - e^{x+1}}{x^2 - 1} = -\lim_{x \to -1^-} \frac{e^{x+1} - 1}{x + 1} \times \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x - 1} =$$
$$= -\lim_{x \to -1^-} \frac{e^{x+1} - 1}{x+1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= -\lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= -1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}$$

Considerando a mudança de variável $y = x + 1$:

$x \to -1^- \Rightarrow y \to 0^-$

Como o valor obtido é um número real, conclui-se que a reta de equação $x = -1$ não é assíntota vertical ao gráfico de g.

- **Assíntota horizontal**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-e^{x+1}}{x^2-1} =$$

$$= \frac{1-e^{-\infty}}{+\infty-1} =$$

$$= \frac{1-0}{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

9.2. Em $]-1,+\infty[$: $g(x) = x + \ln(1+x^2)$

$$g'(x) = 1 + \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} =$$

$$= 1 + \frac{2x}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$$

$$g''(x) = \frac{(x^2+2x+1)' \times (x^2+1) - (x^2+2x+1) \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(2x+2)(x^2+1)-(x^2+2x+1)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+2x+2x^2+2-2x^3-4x^2-2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

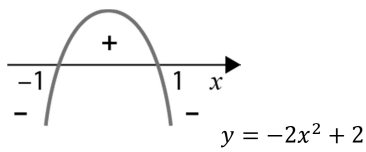
$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2+2 = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{(x^2+1)^2 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad \underbrace{x = -1}_{\notin]-1,+\infty[}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

x	-1		1	$+\infty$
Sinal de g''		$+$	0	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de g		$\cup$	P.I.	$\cap$



O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-1,1[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]1,+\infty[$; admite um ponto de inflexão de abcissa 1.

10. f é contínua em $[f(a), a]$.

$f(f(a)) = a$, pois se $(a, f(a))$ pertence ao gráfico de f^{-1}, então $(f(a), a)$ pertence ao gráfico de f.

$f(a) = -a$

Como $a \in \mathbb{R}^+$, então $f(a) < 0 < f(f(a))$.

Logo, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c \in]f(a), a[: f(c) = 0$, isto é, f tem pelo menos um zero em $]f(a), a[$.

Como f é bijetiva, então é injetiva, logo, está garantida a unicidade do zero de f.