Prova-Modelo de Exame – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (D)

Pretende-se determinar a quantidade de números constituídos por seis algarismos diferentes, múltiplos de 5 e com os algarismos pares todos juntos, usando apenas os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

Assim, existem três casos mutuamente exclusivos (terminar em 0, ou terminar em 5 e começar por um algarismo par, ou terminar em 5 e começar por um algarismo ímpar):

__ __ __ _P_ _P_ _0_ ou _P_ _P_ _P_ __ __ _5_

$3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1$ $\quad$ $2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1$

ou _I_ _P_ _P_ _P_ __ _5_

$+ 2 \times (2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1)$

$= 12 + 8 + 24 =$

$= 44$

2. Opção (C)

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{0{,}16}{P(A \cap B)} \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) \times P(A \cap B) = 0{,}16$$

$$\Leftrightarrow \big(1 - P(A \cap B)\big) \times P(A \cap B) = 0{,}16$$

$$\Leftrightarrow -\big(P(A \cap B)\big)^2 + P(A \cap B) - 0{,}16 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times (-0{,}16)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2 \quad \vee \quad P(A \cap B) = 0{,}8$$

Como $P(A \cap B) \leq P(B)$, então $P(A \cap B) = 0{,}2$.

$$P(A) = \frac{1}{6} P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{6}\big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{6} P(A) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(A) - \frac{1}{6} P(A) = \frac{1}{12} - \frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} P(A) = \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{50}$$

3.

3.1. Dois planos são perpendiculares se e só se o produto escalar entre dois quaisquer vetores normais a cada um dos planos for igual a zero.

$\vec{n}_\alpha(2,-1,1)$ é um vetor normal ao plano α.

$\vec{n}_\beta(1,6,4)$ é um vetor normal ao plano β.

$(2,-1,1).(1,6,4) = 2 - 6 + 4 = 0$

Logo, α e β são perpendiculares.

3.2. Vamos começar por definir vetorialmente a reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto C:

$(x, y, z) = (1, -1, 1) + k(2, -1, 1), k \in \mathbb{R}$

Como V pertence a esta reta, então as suas coordenadas são do tipo $(1 + 2k, -1 - k, 1 + k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Pretende-se que $\|\overrightarrow{CV}\| = 4\sqrt{6}$.

$\overrightarrow{CV} = (1 + 2k, -1 - k, 1 + k) - (1,-1,1) = (2k, -k, k)$

$$\sqrt{4k^2 + k^2 + k^2} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6k^2} = 4\sqrt{6}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6}|k| = 4\sqrt{6}$$
$$\Leftrightarrow k = 4 \quad \vee \quad k = -4$$

Se $k = 4$, então $V(9,-5,5)$.

Se $k = -4$, então $V(-7,3,-3)$.

Como a cota de V é positiva, então $V(9, -5, 5)$.

4. Opção (A)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{4n} = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{n}\right]^4 = e^{-4}$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to e^{-4}} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to e^{-4}} \ln\left(\frac{e^{-4}}{x}\right) =$$
$$= \ln(1)$$
$$= 0$$

5.

5.1. d é contínua em $[0, 15[$ e em $]15, +\infty[$, uma vez que, nestes intervalos, a função é definida pela soma de funções contínuas.

d é contínua em 15, pois $\lim_{t\to15^-} d(t) = \lim_{t\to15^+} d(t) = d(15)$.

$$\lim_{t\to15^-} d(t) = \lim_{t\to15^-}(20 + t\cos(\pi t)) =$$
$$= 20 + 15 \times \cos(15\pi) =$$
$$= 20 - 15 =$$
$$= 5$$

$\lim_{t\to 15^+} d(t) = \lim_{t\to 15^+}(20 + 15e^{15-t}\cos(\pi t)) =$

$= 20 + 15e^{0}\cos(15\pi) =$

$= 20 - 15 =$

$= 5$

$d(15) = 20 + 15e^{0}\cos(15\pi) = 20 - 15 = 5$

1) d é contínua em $[14,16]$.

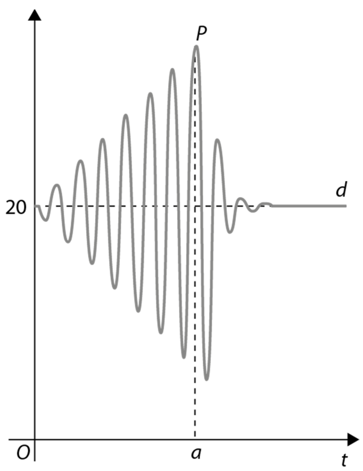
2) $d(16) < 30 < d(14)$

$d(14) = 20 + 14\cos(14\pi) = 34$

$d(16) = 20 + 15e^{-1}\cos(16\pi) = 20 + \frac{15}{e} \approx 25{,}52$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c \in]14{,}16[: d(c) = 30$, isto é, houve, pelo menos, um instante entre os 14 s e os 16 s após o início da contagem do tempo em que a distância da posição da cadeira ao muro foi igual a 30 dm.

5.2.



$P(a,b)$

$a \approx 14$

$b \approx 34$

A distância máxima é 34 dm para $t = 14$ s, aproximadamente.

6. Opção (B)

$(f \times g)(3) = f(3) \times g(3) = \log(3) \times g(-3) = 5\log(3) > 0$

$\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{g\left(-\frac{1}{2}\right)} < 0$, pois $\log\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ e $g\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

$(f \circ g)(4) = f\big(g(4)\big) = f\big(g(-4)\big) = f(5) = \log(5) < \log(10) = 1$

$(f^{-1} + f)(1) = f^{-1}(1) + f(1) =$

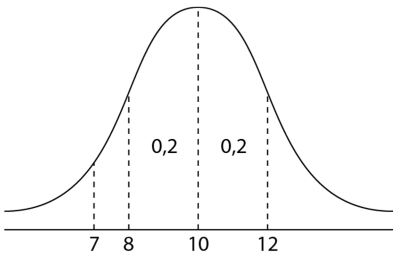
$= 10 + \log(1) =$

$= 10$

7.

7.1. Opção (D)

$X \sim N(10, \sigma)$



Então:

$P(X < 12) = P(X < 10) + P(10 < X < 12) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$

$P(X > 7) = P(7 < X < 8) + P(X > 8) = P(7 < X < 8) + 0{,}7$, logo, $P(X < 12) < P(X > 7)$.

$P(9 \leq X \leq 11) > P(8 \leq X \leq 10) = 0{,}2$, pois a área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equação $x = 9$ e $x = 11$ é superior à área da região limitada pelo eixo Ox, pela curva de Gauss e pelas retas de equação $x = 8$ e $x = 10$.

$P(8 \leq X \leq 12) = 0{,}4$

$P(X \leq 8) = 0{,}3$

$P(X \geq 12) = 0{,}3$

$P(X \leq 8 \quad \vee \quad X \geq 12) = 0{,}6$

7.2. Opção (C)

$-1 \leq 2x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$

$D_f = [-1{,}0]$

$0 \leq \arccos(2x+1) \leq \pi, \forall x \in [-1{,}0] \Leftrightarrow -\pi \leq -\pi + \arccos(2x+1) \leq 0, \forall x \in [-1{,}0]$

$D'_f = [-\pi, 0]$

8. $P(B|\overline{A})$, no contexto da situação descrita, significa a probabilidade de se retirarem da caixa 2 duas bolas brancas, sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 não tinham a mesma cor.

Se as bolas retiradas da caixa 1 não tinham a mesma cor, tal significa que se colocou na caixa 2 uma bola branca e uma bola preta, ficando a caixa 2 com 9 bolas, das quais x são brancas $(x > 0)$ e $9 - x$ são pretas. Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{x(x-1)}{9 \times 8}$.

$\frac{x(x-1)}{9 \times 8} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12(x^2 - x) = 72$

$\Leftrightarrow 12x^2 - 12x - 72 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -2$

Como $x > 0$, então $x = 3$. Logo, existiam inicialmente 2 bolas brancas e 5 bolas pretas.

Caderno 2

9.

9.1. Opção (A)

X: "número de seringas com defeito no lote de 40 seringas"

$X \sim B(40; 0{,}02)$

$P(X = 0) = 0{,}98^{40}$

$P(X = 1) = 40 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{39}$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

Assim, a probabilidade dada é a probabilidade do acontecimento "pelo menos duas seringas terem defeito". Os restantes acontecimentos não têm igual probabilidade, pois:

- a probabilidade de no lote de 40 seringas pelo menos uma seringa ter defeito é dada por:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}98^{40}$$

- a probabilidade de no lote de 40 seringas no máximo duas seringas terem defeito é dada por:

$$P(X \leq 2) = 0{,}98^{40} + 40 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{39} + 780 \times 0{,}02^2 \times 0{,}98^{38}$$

- a probabilidade de no lote de 40 seringas no máximo uma seringa ter defeito é dada por:

$$P(X \leq 1) = 0{,}98^{40} + 40 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{39}$$

9.2. Opção (C)

$a^2 = 25$ e $b^2 = 16$, então $a = 5$ e $b = 4$.

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$, logo $2c = 6$.

$P_{[ABC]} = \underbrace{\overline{AC}}_{2c} + \underbrace{\overline{AB} + \overline{CB}}_{2a} = 6 + 10 = 16$

10. Como $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ existe e é negativo, para qualquer número real x, significa que a segunda derivada existe e é sempre negativa, pelo que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio. Conclui-se, assim, que a afirmação (I) é verdadeira.

Como $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - 2x) = 0$, tal significa que $y = 2x$ é a equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$, logo não admite assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$, tornando assim a afirmação (II) falsa.

Relativamente à afirmação (III), podemos afirmar que é falsa. Supondo que a reta de equação $y = 2x$ é perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0, então o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0 deveria ser $-\frac{1}{2}$ (visto as retas serem perpendiculares), o que é absurdo, pois sabemos que $f'(x) > 0$, para qualquer número real x.

11. Opção (B)

$t \to$ reta tangente ao gráfico de f em $x = 3$.

$m_t = \text{tg}60° = \sqrt{3} = f'(3)$

Sabemos que $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \pm\infty$. Logo:

$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3}x-3\sqrt{3}}{f(x)-f(3)} + \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3}(x-3)}{f(x)-f(3)} + \frac{f(3)}{\pm\infty}$ (f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$; em particular, é contínua em $x = 3$ e $\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$.)

$$= \sqrt{3} \times \frac{1}{\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}} + 0 =$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{1}{f'(3)} =$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= 1$$

12. Opção (D)

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, pois $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (u_n) é crescente. (1)

Assim, $u_1 \leq u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (u_n) é limitada. (2)

Por (1) e (2), conclui-se que (u_n) é convergente.

Como (u_n) é crescente e limitada, então (u_n) não pode ser uma progressão aritmética.

13.

13.1. f é contínua em $x = 0$ se e só se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, isto é:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Sabe-se que $f(0) = k$.

E:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(2x)}{e^x-1} + 3x\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\frac{\sin(2x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}\right) + \lim_{x\to 0^+} (3x) =$$

$$= \frac{\lim_{2x\to 0^+} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2\right)}{\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x}} + 0 =$$

$$= \frac{1\times 2}{1} =$$

$$= 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\ln(-x)} = \frac{0^+}{\ln(0^+)} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, pode concluir-se que não existe um valor de k tal que f seja contínua em $x = 0$.

13.2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(-x)} & \text{se} \quad x < 0 \quad \wedge \quad x \neq -1 \\ k & \text{se} \qquad\quad x = 0 \\ \frac{\text{sen}\,(2x)}{e^x - 1} + 3x & \text{se} \qquad\quad x > 0 \end{cases}$, com $k \in \mathbb{R}$

Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\text{sen}(2x)}{e^x - 1} + 3x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\text{sen}(2x)}{x(e^x - 1)} + 3 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\text{sen}(2x) \times \frac{1}{x(e^x - 1)} \right) + 3 =$$

$$= 0 + 3 =$$

$$= 3$$

Cálculos auxiliares

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}(2x)}{x(e^x - 1)} = 0$, pois $-1 \leq \text{sen}(2x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
  e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(e^x - 1)} = \frac{1}{+\infty(e^{+\infty} - 1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}(2x)}{e^x - 1} = 0$, pois $-1 \leq \text{sen}(2x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
  e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{+\infty} - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\text{sen}(2x)}{e^x - 1} + 3x - 3x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen}(2x)}{e^x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\text{sen}(2x) \times \frac{1}{e^x - 1} \right) =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{\ln(-x)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x \times \ln(-x)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\ln(-x)} =$$

Consideremos a mudança de variável $y = -x$. Se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$.

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{-y}{\ln(y)} =$$

$$= -\frac{1}{\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(y)}{y}} =$$

$$= -\frac{1}{0^+} =$$

$$= -\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, o gráfico de f não admite assíntotas não verticais quando $x \longrightarrow -\infty$.

13.3. Em $\mathbb{R}^-$:

$$g'(x) = \frac{[\ln(-x)]'\,x^2 - (x^2)'\times\ln(-x)}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x\times\ln(-x)}{x^4} =$$

$$= \frac{x - 2x\times\ln(-x)}{x^4} =$$

$$= \frac{1-2\ln(-x)}{x^3}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\ln(-x)}{x^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\ln(-x) = 0 \quad \wedge \quad x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -x = e^{\frac{1}{2}} \quad \wedge \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -e^{\frac{1}{2}} \quad \wedge \quad x \neq 0$$

Assim:

x	$-\infty$	$-e^{\frac{1}{2}}$		0
$1-2\ln(-x)$	$-$	0	$+$	S. S.
x^3	$-$	$-$	$-$	S. S.
Sinal de g'	$+$	0	$-$	S. S.
Variação de g	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	S. S.

S.S.: sem significado

Cálculos auxiliares

$1 - 2\ln(-x) > 0 \Leftrightarrow -2\ln(-x) > -1$

$\Leftrightarrow \ln(-x) < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -x < e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x > -e^{\frac{1}{2}}$

$$g\left(-e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(-e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

g é estritamente crescente em $\left]-\infty, -e^{\frac{1}{2}}\right]$ e estritamente decrescente em $\left[-e^{\frac{1}{2}}, 0\right[$;

g admite um máximo relativo (absoluto) igual a $\frac{1}{2e}$ para $x = -e^{\frac{1}{2}}$.

14. Opção (C)

$z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

$a > b$

$$\frac{z}{i} - \bar{z} = \frac{a+bi}{i} - (a - bi) = \frac{(a+bi)i}{-1} - a + bi =$$

$$= -ai + b - a + bi =$$

$$= \underbrace{(b-a)}_{\text{negativo}} + \underbrace{(b-a)}_{\text{negativo}}\,i$$

Como $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{i} - \bar{z}\right) < 0$ e $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{i} - \bar{z}\right) < 0$, conclui-se que o afixo de $\frac{z}{i} - \bar{z}$ pertence ao 3.º quadrante.

15.

15.1. $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\text{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow \text{tg}\theta = \sqrt{3}$

$\theta \in 3.\text{º Q}$

$\theta = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

$z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \overline{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)} =$

$= \overline{e^{i\frac{\pi}{5}}} =$

$= e^{-i\frac{\pi}{5}}$

$(z_1 \times z_2)^n = \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{5}}\right)^n = 2^n e^{i\left(\frac{17\pi}{15}n\right)}$

$2^n e^{i\left(\frac{17\pi}{15}n\right)}$ é um número real positivo se e só se:

$\frac{17\pi}{15}n = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{30}{17}k, k \in \mathbb{Z}.$

$k = 17 \hookrightarrow n = 30 \;\; (\in \mathbb{N})$

30 é o menor valor de n natural nas condições pretendidas.

15.2. $|z+i|^2 - |z-i|^2 = (z+i)\left(\overline{z+i}\right) - (z-i)\left(\overline{z-i}\right) =$

$= (z+i)\left(\overline{z} + \overline{i}\right) - (z-i)\left(\overline{z} - \overline{i}\right) =$

$= (z+i)(\overline{z} - i) - (z-i)(\overline{z} + i) =$

$= z\overline{z} - iz + i\overline{z} - i^2 - (z\overline{z} + iz - i\overline{z} - i^2) =$

$= z\overline{z} - iz + i\overline{z} + 1 - z\overline{z} - iz + i\overline{z} - 1 =$

$= -2iz + 2i\overline{z} =$

$= -2i(z - \overline{z}) =$

$= -2i \times 2\text{Im}(z)i =$

$= -4\text{Im}(z) \times i^2 =$

$= 4\text{Im}(z)$