Prova-Modelo de Exame – Proposta de resolução

Caderno 1

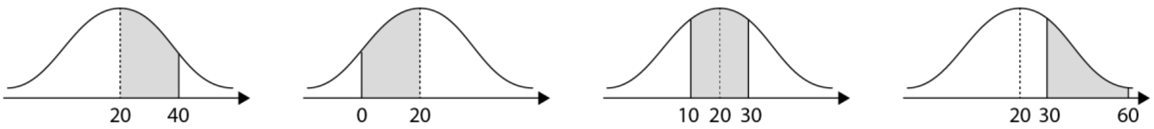
1.

1.1. Opção (C)

$X \sim N(20, \sigma)$ e $P(a < X < b) = 0{,}7$

Sabemos que $P(X < 20) = P(X > 20) = 0{,}5$.

Com exceção da opção (C), em todas as restantes verifica-se que $P(a < X < b) < 0{,}5$.



Apenas na opção (C) é possível que $P(a < X < b)$ seja 0,7.

1.2. Opção (D)

$$x(t) = 4\left(\sqrt{3}\cos(\pi t) - \operatorname{sen}(\pi t)\right) = 4 \times 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi t)\right) =$$

$$= 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi t) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}(\pi t)\right) =$$

$$= 8\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Assim, $A = 8$ e $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

2.

2.1. Consideremos a reta perpendicular ao plano ABC e que contém o ponto V:

$$(x, y, z) = \left(4, \frac{19}{4}, 13\right) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico desta reta é:

$$(x, y, z) = \left(4 + 2k, \frac{19}{4} + 3k, 13 + 6k\right) \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Determinemos a interseção desta reta com o plano ABC:

$$2(4 + 2k) + 3\left(\frac{19}{4} + 3k\right) + 6(13 + 6k) + 10 = 0 \Leftrightarrow 8 + 4k + \frac{57}{4} + 9k + 78 + 36k + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 49k = -\frac{441}{4}$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{9}{4}$$

A interseção desta reta com o plano é, assim, o ponto de coordenadas:

$$\left(4 + 2\left(-\frac{9}{4}\right), \frac{19}{4} + 3\left(-\frac{9}{4}\right), 13 + 6\left(-\frac{9}{4}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$$

Assim, $I\left(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$.

Logo:

$$h = d(V,I) = \sqrt{\left(4+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{19}{4}+2\right)^2 + \left(13+\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4}+\frac{729}{16}+\frac{729}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3969}{16}} =$$

$$= \frac{63}{4}$$

A altura da pirâmide é igual a $\frac{63}{4}$.

2.2. Os pontos P_1 e P_2 pertencem aos semieixos positivos Ox e Oy e, como A pertence ao plano definido por $z = -3$, então $\overrightarrow{AP_1}$ e $\overrightarrow{AP_2}$ não são colineares, logo o ângulo P_1AP_2 não pode ser raso. Assim, o ângulo P_1AP_2 é obtuso se e só se $\overrightarrow{AP_1} . \overrightarrow{AP_2} < 0$.

Sabemos que $P_1(a, 0{,}0)$, $P_2(0, a, 0)$ e $A(1{,}2, -3)$.

$$\overrightarrow{AP_1} . \overrightarrow{AP_2} = (a-1, -2{,}3).(-1, a-2{,}3) = -a + 11 - 2a + 4 + 9 =$$

$$= -3a + 14$$

Assim, o ângulo P_1AP_2 é obtuso se e só se:

$$-3a + 14 < 0 \quad \Leftrightarrow -3a < -14 \quad \Leftrightarrow a > \frac{14}{3}$$

Logo, a ângulo P_1AP_2 é obtuso se e só se $a \in \left]\frac{14}{3}, +\infty\right[$.

2.3. Número de casos possíveis: 6^5

Número de casos favoráveis: ${}^6C_5 \times 5! + {}^6C_4 \times 2 \times 4! + {}^6C_3 \times 3!$

- são utilizadas 5 cores distintas: ${}^6C_5 \times 5!$

  ${}^6C_5$ é o número de maneiras distintas de escolher as 5 cores de entre as 6 disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem 5! maneiras distintas de colorir as 5 faces com as 5 cores.

- são utilizadas 4 cores distintas: ${}^6C_4 \times 2 \times 4!$

  ${}^6C_4$ é o número de maneiras distintas de escolher as 4 cores de entre as 6 disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem 2 possibilidades para escolher as duas faces que vão ser pintadas da mesma cor ($[ABV]$ e $[DCV]$ ou $[ADV]$ e $[BCV]$ e, por cada uma destas possibilidades, existem 4! maneiras distintas de colorir as faces da pirâmide.

- são utilizadas 3 cores distintas: ${}^6C_3 \times 3!$

  ${}^6C_3$ é o número de maneiras distintas de escolher 3 cores de entre as 6 disponíveis. Como só utilizamos 3 cores, as faces $[ABV]$ e $[CDV]$ e as faces $[ADV]$ e $[BCV]$ são pintadas com a mesma cor. Assim, após termos selecionado as cores, existem 3! maneiras diferentes de colorir as faces da pirâmide.

Assim, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{{}^6C_5 \times 5! + {}^6C_4 \times 2 \times 4! + {}^6C_3 \times 3!}{6^5} = \frac{65}{324}$$

3.

3.1. Consideremos os acontecimentos:

B: "Usar batom"

L: "Usar lápis de olhos"

Sabemos que:

- $P(B) = P(L)$
- $P(B \cap L) = \frac{1}{5}P(B \cup L)$

Pretende-se determinar $P(\overline{L}|B)$.

Como:

- $P(B \cap L) = \frac{1}{5}P(B \cup L) \Leftrightarrow P(B \cup L) = 5P(B \cap L)$
- $P(B \cup L) = P(B) + P(L) - P(B \cap L)$

tem-se que $5P(B \cap L) = P(B) + P(L) - P(B \cap L)$.

Como $P(B) = P(L)$, então $5P(B \cap L) = P(B) + P(B) - P(B \cap L)$. Assim, $6P(B \cap L) = 2P(B)$, ou seja, $P(B \cap L) = \frac{1}{3}P(B)$.

Logo:

$$P(\overline{L}|B) = \frac{P(\overline{L} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(B \cap L)}{P(B)} = 1 - \frac{P(B \cap L)}{P(B)} = 1 - \frac{\frac{1}{3}P(B)}{P(B)} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

A probabilidade pedida é $\frac{2}{3}$.

3.2. Opção (D)

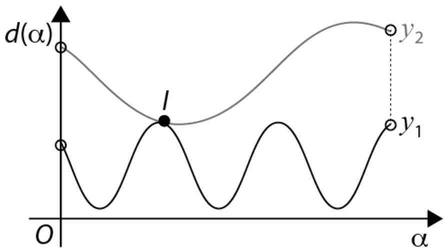
Vogais	Primos: 2, 3, 5	Restantes algarismos 1, 4 e 6
__ __	__ __ __	__ __ __
${}^5A_2$ $\times$	$3!$	$\times\ 5!$

- ${}^5A_2$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente duas das cinco vogais existentes.
- $3!$ é o número de maneiras de permutar entre si os três algarismos primos.
- $5!$ é o número de maneiras de permutar o bloco das vogais, o bloco dos algarismos primos e os algarismos 1, 4 e 6 todos entre si.

${}^5A_2 \times 3! \times 5! = 14\ 400$

4. Pretendemos determinar a solução da equação:

$d(3\alpha) = 1{,}175d(\alpha) \Leftrightarrow \underbrace{12 + \cos(5{,}8 \times 3\alpha + 1)}_{y_1} = \underbrace{1{,}175(12 + \cos(5{,}8\alpha + 1))}_{y_2}$



$I(a, b)$

$a \approx 0{,}31$

A solução pedida é igual a 0,31 rad.

5. Opção (B)

Número de casos possíveis: $6 \times 6 = 36$

Número de casos favoráveis (número de casos em que o produto é um número real, ou seja, o produto de dois números reais e o produto de dois números imaginários puros): $4 \times 4 + 2 \times 2 = 20$

A probabilidade pretendida é $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

6. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 5 e primeiro termo a.

Seja S_{10} a soma dos 10 primeiros termos de (u_n). Então:

$$S_{10} = \frac{u_1 + u_{10}}{2} \times 10$$

ou seja:

$$305 = \frac{a + a + 9 \times 5}{2} \times 10 \Leftrightarrow 305 = (2a + 45) \times 5 \Leftrightarrow 2a + 45 = 61$$

$$\Leftrightarrow a = 8$$

7. Opção (A)

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = \frac{1}{2e^4} \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{f(x) - f(2)} = \frac{1}{2e^4}$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to 2} x \times \lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{f(x) - f(2)} = \frac{1}{2e^4}$, pois os dois limites existem e são finitos.

$\Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2e^4}$

$\Leftrightarrow 4e^4 = f'(2)$

- Se $f(x) = e^{x^2}$, vem que $f'(x) = 2xe^{x^2}$ e $f'(2) = 4e^4$.
- Se $f(x) = e^{2x}$, vem que $f'(x) = 2e^{2x}$ e $f'(2) = 2e^4$.
- Se $f(x) = 2^{x^2}$, vem que $f'(x) = 2x \times 2^{x^2} \times \ln(2)$ e $f'(2) = 4 \times 2^4 \times \ln(2) = 64\ln(2)$.
- Se $f(x) = 2^{2x}$, vem que $f'(x) = 2 \times 2^{2x} \times \ln(2)$ e $f'(2) = 32\ln(2)$.

Caderno 2

8.

8.1. Opção (C)

$$\frac{4-x}{2}=\frac{z-1}{3} \quad \wedge \quad y=-1 \Leftrightarrow \frac{x-4}{-2}=\frac{z-1}{3} \quad \wedge \quad y=-1$$

Um vetor diretor de r é $\vec{r}(-2,0,3)$.

Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(3,1,2)$.

$\vec{r}.\vec{n}=(-2,0,3).(3,1,2)=-6+6=0$

Um ponto pertencente à reta r é $P(4,-1,1)$.

Averiguemos se P pertence ao plano α:

$3\times 4+(-1)+2\times 1+10=0 \Leftrightarrow 12-1+2+10=0 \Leftrightarrow 23=0$, que é uma proposição falsa.

Logo, P não pertence ao plano α.

Como $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são vetores perpendiculares e o ponto P da reta não pertence ao plano α, concluímos que r é estritamente paralela a α.

8.2. Opção (A)

$f(x)=\ln x$

$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad D_{f'}=\mathbb{R}^+$

f é contínua em $[a-1,a]$ e diferenciável em $]a-1,a[$.

Logo, pelo teorema de Lagrange, concluímos que:

existe $c\in\,]a-1,a[: f'(c)=\frac{f(a)-f(a-1)}{1}$

isto é:

existe $c\in\,]a-1,a[: f'(c)=\ln(a)-\ln(a-1)$

ou seja:

existe $c\in\,]a-1,a[: f'(c)=\ln\left(\frac{a}{a-1}\right)$

Como $a-1<c<a$, então $\frac{1}{a-1}>\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$, ou seja, $\frac{1}{a}<f'(c)<\frac{1}{a-1}$. Logo, $\ln\left(\frac{a}{a-1}\right)<\frac{1}{a-1}$.

9. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{4}}$

Cálculo das raízes cúbicas de z:

$$\sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[3]{1}\times e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)}, k\in\{0,1,2\}$$

$$=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k\in\{0,1,2\}$$

$z_1=e^{i\frac{\pi}{12}}$

$z_2 = e^{i\frac{9\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = w$, pois o afixo desta raiz cúbica de z é o único que pertence ao 2.º quadrante.

$z_3 = e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Assim:

$$\frac{w \times \overline{z}}{\sqrt{2}z - i^{2019}} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - i^3} = \frac{e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}}{1 + i - (-i)} =$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{1+2i} =$$

$$= \frac{i \times (1-2i)}{(1+2i) \times (1-2i)} =$$

$$= \frac{i - 2i^2}{1^2 - (2i)^2} =$$

$$= \frac{2+i}{1+4} =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

10.

10.1. Opção (B)

$P(x = 0) = \frac{16}{81}$

A soma dos números saídos nos quatro lançamentos é zero apenas no caso em que sai face com o número zero voltada para cima nos quatro lançamentos.

Sendo n o número de faces do cubo com o número zero, tem-se que:

$$P(x = 0) = \frac{n \times n \times n \times n}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{n^4}{6^4}$$

Assim:

$$\frac{n^4}{6^4} = \frac{16}{81} \Leftrightarrow n^4 = 6^4 \times \frac{2^4}{3^4} \Leftrightarrow n^4 = \left(\frac{6 \times 2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow n^4 = 4^4$$

Como $n > 0$, vem que $n = 4$.

10.2. Opção (C)

$$\lim \ln(u_n) = \lim \ln\left(\frac{3n-9}{3n+6}\right)^{n+2} = \lim \ln\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= \lim \ln\left(1 + \frac{-5}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= \ln \lim \left(1 - \frac{5}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= \ln(e^{-5}) =$$

$$= -5$$

11. $D = \mathbb{R}^+$

Neste domínio:

$$e^{(\ln x)^2} > x^2 \Leftrightarrow (\ln x)^2 > \ln(x^2) \Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln(x^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x > 0$$

Consideremos a mudança de variável $y = \ln x$:

$y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow y < 0 \;\lor\; y > 2$

Como $y = \ln x$, em $\mathbb{R}^+$, vem que:

$$(\ln x)^2 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \;\lor\; \ln x > 2$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \;\lor\; x > e^2$$

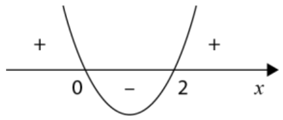
C.S. $= (\,]-\infty, 1[\, \cup \,]e^2, +\infty[\,) \cap \mathbb{R}^+ = \,]0, 1[\, \cup \,]e^2, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0 \;\lor\; y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow y = 0 \;\lor\; y = 2$



12. Opção (C)

$r: 3y - ax - 2 = 0 \Leftrightarrow 3y = ax + 2 \Leftrightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{2}{3}$

Sejam m_r o declive da reta r e m_s o declive da reta s.

Como r e s são perpendiculares, então tem-se que $m_r = -\frac{1}{m_s}$, isto é:

$$\frac{a}{3} = -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{-3\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)} \Leftrightarrow a = \frac{-3+3\sqrt{2}}{1-2}$$

$$\Leftrightarrow a = 3 - 3\sqrt{2}$$

13. Opção (D)

$(f^{-1} \circ h')(1) = f^{-1}\left(h'(1)\right) = f^{-1}(0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

$f(2) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 2$

Logo, $(f^{-1} \circ h')(1) = 2$.

14.

14.1. g é contínua em $x = 1$ se e só se existir $\lim_{x\to 1} g(x)$, isto é:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$$

- $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{xe^x - e}{ex - e} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{xe^{x-1} - 1}{x - 1} =$

  Consideremos a mudança de variável $x - 1 = y$: se $x \to 1^- \Rightarrow y \to 0^-$

  $$= \lim_{y\to 0^-} \frac{(y+1)e^y - 1}{y} =$$

  $$= \lim_{y\to 0^-} \frac{ye^y + e^y - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} e^y + \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= 1 + 1 =$$

$$= 2$$

- $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x} = \frac{2}{1} = 2$
- $g(1) = 2$

Logo, g é contínua em $x = 1$.

14.2. Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln(x^2)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) =$$

(i) Consideremos a mudança de variável $x^2 = y$: se $x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$.

$$= 1 + \overbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}^{(i)} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} =$$

$$= 1 + 0 + 0 =$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \ln(x^2) + 1 - x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2) + 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2\ln|x|}{x} + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} =$$

$$= 2 \times 0 + 0 =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x - e}{x(ex - e)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - \frac{e}{x}}{ex - e} =$$

$$= \frac{0}{-\infty} =$$

$$= 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x - e}{ex - e} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - \frac{e}{x}}{e - \frac{e}{x}} =$$

$$= \frac{0}{e} =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

14.3. Em $]1, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{\left(2x + \frac{2x}{x^2}\right)x - \left(x^2 + \ln(x^2+1)\right)}{x^2} = \frac{2x^2 + 2 - x^2 - \ln(x^2) - 1}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 1 - \ln(x^2)}{x^2} =$$

$$g''(x) = \frac{\left(2x - \frac{2x}{x^2}\right)x^2 - \left(x^2 + 1 - \ln(x^2)\right) \times 2x}{4} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x + 2x\ln(x^2)}{x^4} =$$

$$= \frac{-4x + 2x\ln(x^2)}{x^4} =$$

$$= \frac{-4 + 2\ln(x^2)}{x^3}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4 + 2\ln(x^2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -4 + 2\ln(x^2) = 0 \ \wedge \ x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2) = 2 \ \wedge \ \underbrace{x \neq 0}_{\text{condição universal em }]1,+\infty[}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = e^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -e}_{\text{condição impossível em }]1,+\infty[} \ \vee \ x = e$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

Assim:

x	1		e	$+\infty$
Sinal de g''		$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de g		$\cap$	P.I.	$\cup$

Cálculos auxiliares

$e^0 < e^{\frac{1}{2}} < e$

$1 < \sqrt{e} < e$

$-4 + 2\ln\left(\left(\sqrt{e}\right)^2\right) = -4 + 2 = -2$

$-4 + 2\ln\left((e^2)\right) = -4 + 2 \times 4 = 4$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]1, e]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[e, +\infty[$.

$$g(e) = \frac{e^2 + \ln(e^2) + 1}{e} = e + \frac{3}{e}$$

$\left(e, e + \frac{3}{e}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de g.