Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Esta prova é constituída por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

A prova inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final de cada caderno.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r\,e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1} u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

Caderno 1: 75 minutos

Tolerância: 15 minutos

É permitido o uso da calculadora.

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 **(P2001/2002)**.

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 **(PMC2015)**.

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 20.

Para determinados valores de a e b, tem-se que $P(a < X < b) = 0{,}7$.

Quais dos seguintes podem ser os valores de a e b?

(A) $a = 20$ e $b = 40$

(B) $a = 0$ e $b = 20$

(C) $a = 10$ e $b = 30$

(D) $a = 30$ e $b = 60$

PMC2015

1.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, num determinado intervalo de tempo I, medido em segundos, de tal forma que a respetiva abcissa é dada por:

$$x(t) = 4\left(\sqrt{3}\cos(\pi t) - \operatorname{sen}(\pi t)\right), \text{ com } t \in I$$

Seja A a amplitude deste oscilador harmónico e φ a fase.

Então, podemos concluir que:

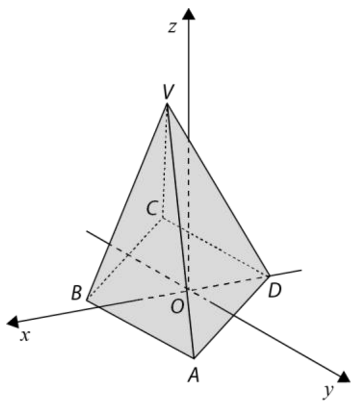
(A) $A = 4$ e $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(B) $A = 4$ e $\varphi = \frac{\pi}{6}$

(C) $A = 8$ e $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(D) $A = 8$ e $\varphi = \frac{\pi}{6}$

2. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,2,-3)$;
- o ponto V tem coordenadas $\left(4,\frac{19}{4},13\right)$;
- a equação $2x+3y+6z+10=0$ define o plano ABC.

2.1. Determine a altura da pirâmide.

2.2. Sejam P_1 e P_2 dois pontos pertencentes aos semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente. Sabe-se que $\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=a$.

Determine os valores de a para os quais o ângulo P_1AP_2 é obtuso.

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

2.3. Pretende-se pintar as cinco faces da pirâmide, dispondo de seis cores distintas. Cada face é colorida com uma só cor. Admita que o sólido vai ser colorido ao acaso, podendo qualquer cor colorir qualquer face.

Determine a probabilidade de a pirâmide não ter faces com arestas comuns pintadas da mesma cor. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Uma empresa de cosméticos dedica-se à venda de produtos de beleza livres de testes em animais, como batom e lápis de olhos, entre outros.

3.1. Foi realizado um estudo de mercado acerca das preferências de cosméticos das mulheres portuguesas. Concluiu-se então que:

- o número de mulheres que usam batom é igual ao número de mulheres que usam lápis de olhos;
- o número de mulheres que usam estes dois cosméticos é um quinto do número de mulheres que usam pelo menos um destes dois cosméticos.

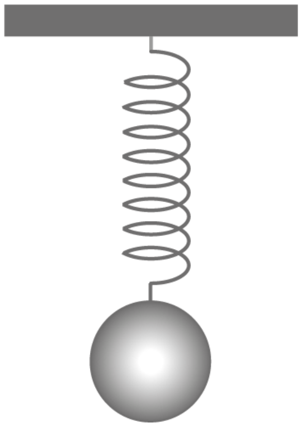
Escolhendo, ao acaso, uma mulher, participante neste estudo de mercado, que usa batom, determine a probabilidade de ela não usar lápis de olhos.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3.2. Todos os produtos dessa empresa têm um código diferente, formado por oito carateres todos diferentes: seis algarismos (1, 2, 3, 4, 5 e 6) e duas vogais. Quantos desses códigos têm as vogais juntas e todos os algarismos primos também juntos?

(A) 960 **(B)** 4320 **(C)** 11 520 **(D)** 14 400

4. Numa aula de Física, suspendeu-se uma esfera do teto da sala por uma mola elástica, como mostra a figura.



Após ter sido alongada verticalmente, a mola iniciou um movimento oscilatório vertical.

Admita que a distância, d, em centímetros, do centro da esfera ao teto da sala, desde o instante em que se largou a mola e durante os primeiros 6 segundos, é dada por:

$$d(t) = 12 + cos(5{,}8t + 1) \text{ , com } t \in [0{,}6]$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

Num determinado instante α, compreendido entre 0 e 1, o centro da esfera encontra-se a uma certa distância do teto da sala e sabe-se que, passado o triplo do tempo, a distância do centro da esfera ao teto da sala aumentou $17{,}5\%$.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α em radianos, arredondado às centésimas.

5. Um dado cúbico equilibrado tem quatro faces numeradas com números reais não nulos e as restantes faces com números imaginários puros.

Lança-se o dado duas vezes e regista-se o produto dos números saídos nos dois lançamentos.

Qual é a probabilidade de o produto obtido ser um número real?

(A) $\frac{4}{9}$

(B) $\frac{5}{9}$

(C) $\frac{13}{36}$

(D) $\frac{1}{2}$

6. Seja a um número real.

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + 5\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Relativamente a esta sucessão, sabe-se que a soma dos dez primeiros termos é igual a 305.

Determine a.

7. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, que admite derivada finita não nula em todos os pontos do seu domínio.

Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = \frac{1}{2\,e^4}$.

Indique qual das expressões seguintes pode definir a função f.

(A) $e^{\,x^2}$

(B) $e^{\,2x}$

(C) $2^{\,x^2}$

(D) $2^{\,2x}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item										
Cotação (em pontos)										
1.1 1.2	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**3.1**	**3.2**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**Pontos**
8	12	12	12	13	8	12	8	12	8	**105**

CADERNO 2: 75 MINUTOS

TOLERÂNCIA: 15 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

8.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 8.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 **(P2001/2002)**.

O **item 8.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 **(PMC2015)**.

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item seleccionado.

P2001/2002

8.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a reta r, definida pela condição $\frac{4-x}{2} = \frac{z-1}{3} \ \wedge \ y = -1$;
- o plano α, definido pela equação $3x + y + 2z + 10 = 0$.

Qual é a posição relativa da reta r e do plano α?

(A) r está contida em α.

(B) r é perpendicular a α.

(C) r é estritamente paralela a α.

(D) r e α são concorrentes, mas não perpendiculares.

PMC2015

8.2. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \ln x$ e seja $a > 1$.

O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $]a-1, a[$, permite concluir que:

(A) $\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) < \frac{1}{a-1}$

(B) $\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) < \frac{1}{a}$

(C) $\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) = \frac{1}{a-1}$

(D) $\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) = \frac{1}{a}$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e w a raiz cúbica de z cujo afixo pertence ao segundo quadrante.

Escreva o número complexo $\frac{w \times \overline{z}}{\sqrt{2}\,z - i^{2019}}$ na forma algébrica.

10.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 **(P2001/2002)**.

O **item 10.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 **(PMC2015)**.

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item seleccionado.

P2001/2002

10.1. Um dado cúbico tem todas as faces numeradas, umas com o número 0 e as restantes com o número 2. Lança-se o dado quatro vezes e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para cima.

Seja X a variável aleatória “soma dos números saídos nos quatro lançamentos”.

Sabe-se que $P(X=0)=\frac{16}{81}$.

Quantas faces estão numeradas com o número 0?

(A) Cinco **(B)** Quatro **(C)** Três **(D)** Duas

PMC2015

10.2. Considere a sucessão de números reais (u_n) tal que $u_n=\left(\frac{3n-9}{3n+6}\right)^{n+2}$.

O valor de $\lim \ln(u_n)$ é igual a:

(A) -9 **(B)** -6 **(C)** -5 **(D)** -2

11. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $e^{(\ln x)^2} > x^2$.

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

12. Para um certo número real a, são perpendiculares as retas r e s, definidas, num referencial o.n. xOy, pelas condições:

$$r:\ 3y-ax-2=0 \quad \text{e} \quad s:(x,y)=(4,5)+k\left(1,\ 1+\sqrt{2}\right), k\in\mathbb{R}$$

Qual é o valor de a?

(A) $3+3\sqrt{2}$ **(B)** $-3-3\sqrt{2}$ **(C)** $3-3\sqrt{2}$ **(D)** $-3+3\sqrt{2}$

13. Considere uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, que admite derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Sabe-se ainda que a função h admite um extremo relativo em $x = 1$.

Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln(x-1)$.

Qual é o valor de $(f^{-1} \circ h')(1)$?

(f^{-1} designa a função inversa da função f, h' designa a derivada da função h e o símbolo $\circ$ designa a composição de funções.)

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

14. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e}{ex - e} & \text{se} \quad x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \\ \dfrac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

14.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1.

14.2. Estude a função g quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

14.3. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]1, +\infty[$.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item									
Cotação (em pontos)									
8.1 8.2	**9.**	**10.1 10.2**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.1**	**14.2**	**14.3**	**Pontos**
8	12	8	13	8	8	12	13	13	**95**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)									**200**