Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1.

1.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

V: "O paciente contraiu o vírus."

T: "O teste apresenta um resultado positivo."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(V) = 0{,}25$
- $P(T|V) = 0{,}9$
- $P(V|T) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Pretende-se determinar o valor de $P(\overline{V} \cap \overline{T})$.

Assim:

	T	$\overline{T}$	
V	0,225	0,025	0,25
$\overline{V}$	0,075	0,675	0,75
	0,3	0,7	1

Portanto, $P(\overline{V} \cap \overline{T}) = 0{,}675$.

Cálculos auxiliares

- $P(T|V) = 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{P(T\cap V)}{P(V)} = 0{,}9$

  $\Leftrightarrow P(T \cap V) = 0{,}9 \times 0{,}25$

  $\Leftrightarrow P(T \cap V) = 0{,}225$

- $P(V|T) = 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{P(V\cap T)}{P(T)} = 0{,}75$

  $\Leftrightarrow \frac{0{,}225}{P(T)} = 0{,}75$

  $\Leftrightarrow P(T) = \frac{0{,}225}{0{,}75}$

  $\Leftrightarrow P(T) = 0{,}3$

1.2. Opção (D)

$$\underbrace{\underline{V}\ \ \underline{V}\ \ \underline{9}\ \ \underline{9}\ \ \underline{\text{alg.}}\ \ \underline{\text{alg.}}\ \ \underline{\text{alg.}}}_{5 \times 5 \times 1 \times 1 \times 8 \times 8 \times 8} \times {}^7C_2 \times {}^5C_2 = 2\,688\,000$$

onde ${}^7C_2$ é o número de maneiras de escolher duas das sete posições para colocar as duas vogais escolhidas e ${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher duas das cinco posições restantes para colocar os dois algarismos 9.

2. Opção (A)

Sabemos que ${}^nC_0 + {}^nC_1 + \dots + {}^nC_n = 64$, isto é, $2^n = 64$, ou seja, $n = 6$.

O termo geral do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - ax^3\right)^6$ é:

$$ {}^6C_k \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{6-k} \times (-ax^3)^k, \text{ com } k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$ {}^6C_k \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{6-k} \times (-ax^3)^k = {}^6C_k \frac{2^{6-k}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{6-k}} \times (-a)^k \times x^{3k} =$$

$$= {}^6C_k \times 2^{6-k} \times (-a)^k \times \frac{x^{3k}}{x^{2-\frac{k}{3}}} =$$

$$= {}^6C_k \times 2^{6-k} \times (-a)^k \times x^{\frac{10k}{3}-2}$$

Pretendemos determinar o termo de grau 8:

$$\frac{10k}{3}-2=8 \Leftrightarrow \frac{10k}{3}=10 \Leftrightarrow k=3$$

O termo de ordem 8 é, então, igual a:

$$^6C_3 \times 2^3 \times (-a)^3 \times x^8 = -160a^3x^8$$

Logo:

$$-160a^3 = 20\,000 \Leftrightarrow a^3 = 125 \Leftrightarrow a = 5$$

3.

3.1. $w_1 = \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{24}(-i^0-i^3)} = \frac{2\sqrt{3}+2i-4\sqrt{3}+4i}{\sqrt{24}(-1+i)} =$

$= \frac{-2\sqrt{3}+6i}{\sqrt{24}(-1+i)} =$

$= \frac{\sqrt{48}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{24}\times\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} =$

$= e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)} =$

$= e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

Cálculos auxiliares

- $2020 = 4 \times 505 + 0$

  $i^{2020} = i^0 \qquad i^{-5} = i^{-5+8} = i^3$
- $\left|-2\sqrt{3}+6i\right| = \sqrt{12+36} = \sqrt{48}$

  $\text{tg}\theta = \frac{6}{-2\sqrt{3}} \wedge \theta \in 2^{\text{º}}\text{ Q} \Leftrightarrow \text{tg}\theta = \sqrt{3} \wedge \theta \in 2^{\text{º}}\text{ Q}$

  $\theta = \frac{2\pi}{3}$, por exemplo
- $|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

  $\text{tg}\beta = -1 \wedge \beta \in 2^{\text{º}}\text{ Q}$

  $\beta = \frac{3\pi}{4}$, por exemplo

$w = (w_1)^8 = e^{i\left(-\frac{8\pi}{12}\right)} =$

$= e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} =$

$= \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3.2. $\left|\frac{3|z|}{z} - \frac{4i\bar{z}}{|z|}\right| = \left|\frac{3|z|^2-4i\bar{z}z}{z|z|}\right| = \left|\frac{3|z|^2-4i|z|^2}{z|z|}\right| =$

$= \left|\frac{|z|^2(3-4i)}{z|z|}\right| =$

$= \left|\frac{|z|(3-4i)}{z}\right| =$

$= \frac{\left||z|(3-4i)\right|}{|z|} =$

$= \frac{|z||3-4i|}{|z|} =$

$= \sqrt{9+16} =$

$= \sqrt{25} =$

$= 5$

4.

4.1. Pretende-se provar que $\exists c \in \,]14,16[$ tal que $d(c) = 30$.

Comecemos por provar que d é uma função contínua no seu domínio $\mathbb{R}_0^+$:

- d é contínua em $[0, 15[$, visto, neste intervalo, a função d estar definida pela soma de duas funções contínuas (uma função constante e o produto de duas funções contínuas);
- d é contínua em $]15, +\infty[$, visto, neste intervalo, a função d estar definida pela soma de duas funções contínuas (uma função constante e o produto de duas funções contínuas);
- d é contínua em $x = 15$, visto que $\lim\limits_{t \to 15^-} d(t) = \lim\limits_{t \to 15^+} d(t) = d(15)$::

$$\lim_{t \to 15^-} \left(20 + t\cos(\pi t)\right) = 20 + 15\cos(15\pi) =$$
$$= 20 + 15 \times (-1) =$$
$$= 5$$

$$\lim_{t \to 15^+} \left(20 + 15e^{15-t}\cos(\pi t)\right) = 20 + 15\,e^{15-15}\cos(15\pi) =$$
$$= 20 + 15 \times e^0 \times (-1) =$$
$$= 5 = d(15)$$

d é então uma função contínua em todo o seu domínio $\mathbb{R}_0^+$, logo é contínua, em particular, em $[14, 16] \subset \mathbb{R}_0^+$.

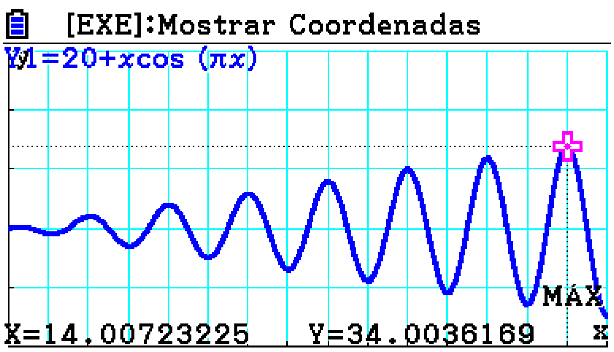
$d(14) = 20 + 14\cos(14\pi) = 20 + 14 \times 1 = 34 > 30$

$d(16) = 20 + 15e^{15-16}\cos(16\pi) \approx 25{,}52 < 30$

Como d é contínua em $[14, 16]$, e como $d(16) < 30 < d(14)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \,]14,16[$ tal que $d(c) = 30$.

4.2. Pretende-se calcular a distância máxima atingida entre a cadeira e o muro e o respetivo instante em que tal se verificou, durante os primeiros 15 segundos em que a criança está a dar balanço.

$y = 20 + x\cos(\pi x)$, com $x \in [0, 15[$



A distância máxima é igual a 34 dm, para t = 14 segundos, aproximadamente.

5.

5.1. Opção (C)

O ponto B pertence ao plano α e tem abcissa e ordenada igual a 2, logo as coordenadas de B são da forma $(2, 2, z),\ z \in \mathbb{R}$.

$2 \times 2 - 5 \times 2 - 2z + 80 = 0 \Leftrightarrow z = 37$

Logo, $B(2, 2, 37)$.

O ponto C pertence ao plano α e ao eixo das cotas, logo as coordenadas de C são da forma $(0, 0, z),\ z \in \mathbb{R}$.

$2 \times 0 - 5 \times 0 - 2z + 80 = 0 \Leftrightarrow z = 40$

Logo, $C(0, 0, 40)$.

$\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 2, 3) - (2, 2, 37) = (-1, 0, -34)$

$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 34^2} = \sqrt{1157}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, 0, 40) - (2, 2, 37) = (-2, -2, 3)$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$

$(-1, 0, -34).(-2, -2, 3) = \sqrt{1157} \times \sqrt{17} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$

$\Leftrightarrow 2 + 0 - 102 = \sqrt{1157} \times \sqrt{17} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{-100}{\sqrt{1157} \times \sqrt{17}}$

Assim, $\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}} \approx 135{,}5°$.

5.2. Seja I o ponto de interseção entre o plano α e a reta perpendicular a α e que passa pelo ponto A.

A altura do prisma é, então, a distância entre os pontos A e I.

Equação vetorial da reta AI: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(2, -5, -2), k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico: $(1 + 2k, 2 - 5k, 3 - 2k),\ k \in \mathbb{R}$

Para que o ponto pertença ao plano α, terá que verificar:

$$\begin{aligned} 2(1 + 2k) - 5(2 - 5k) - 2(3 - 2k) + 80 = 0 &\Leftrightarrow 2 + 4k - 10 + 25k - 6 + 4k + 80 = 0 \\ &\Leftrightarrow 33k = -66 \\ &\Leftrightarrow k = -2 \end{aligned}$$

Assim, o ponto I (ponto de interseção de α com a reta AI) tem coordenadas:

$(1 + 2 \times (-2), 2 - 5 \times (-2), 3 - 2 \times (-2)) = (-3, 12, 7)$

A altura do prisma é:

$d(A, I) = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (12 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{16 + 100 + 16} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$

6. Opção (A)

A reta r tem inclinação $45°$, logo:

$m_r = \text{tg}\,(45°) \Leftrightarrow m_r = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$

Assim:

- Número de casos possíveis: $\underbrace{6}_{a} \times \underbrace{6}_{b} \times \underbrace{6}_{c} = 216$
- Número de casos favoráveis: $\underbrace{6}_{a} \times \underbrace{1}_{b} \times \underbrace{6}_{c} = 36$

Deste modo, a probabilidade pedida é $\frac{36}{216}$, ou seja, $\frac{1}{6}$.

7.

7.1. Opção (D)

(u_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo positivo e razão superior a um, logo (u_n) é monótona crescente e $\lim(u_n) = \lim(a \times r^{n-1}) = +\infty$.

Assim, concluímos que (u_n) não é limitada nem convergente.

Como (u_n) é crescente, então:

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow 1 > \frac{u_n}{u_{n+1}}$ (os termos de (u_n) são positivos)

$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1$

7.2. $a \times \frac{1-r^4}{1-r} = a \times r^4 \times \frac{1-r^2}{1-r} \Leftrightarrow 1 - r^4 = r^4(1-r^2)$

$\Leftrightarrow \frac{1-r^4}{1-r^2} = r^4$

$\Leftrightarrow \frac{(1-r^2)(1+r^2)}{1-r^2} = r^4$

$\Leftrightarrow 1 + r^2 = r^4$

$\Leftrightarrow r^4 - r^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\times(-1)}}{2}$

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad \underbrace{r^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}}$$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad \vee \quad r = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Como $r > 1$, então $r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

8. Opção (A)

$$\lim u_n = \lim\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n = \lim\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n =$$

$$= \lim \frac{\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{\lim\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{e^2} =$$

$$= e^{-3}$$

Atendendo a que e^{-3} é solução da equação $\ln(ex) = k$, vem que:

$\ln(e \times e^{-3}) = k \Leftrightarrow \ln(e^{-2}) = k \Leftrightarrow -2 = k$

9.

9.1. Opção (A)

Sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe se e só se $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x)-1}{x} = \frac{\ln(0^+)-1}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} =$$

Consideremos a mudança de variável $\frac{1}{x} = y; x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} =$$

$$= +\infty$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

9.2. $\boldsymbol{x \to -\infty}$**:**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{x} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right) - \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

Consideremos a mudança de variável $-x = y; : x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{-y} - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$$

$= -\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\ln(y)}{y} - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} =$

$= -0 - 0 =$

$= 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

$\boldsymbol{x \to +\infty}$**:**

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\frac{1}{+\infty}} =$$

$$= e^0 =$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} =$$

Consideremos a mudança de variável $\frac{1}{x} = y; x \to +\infty \Rightarrow y \to 0^+$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} =$$

$$= 1$$

A reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

9.3. Em $]-\infty, 0[, g(x) = \frac{\ln(-x) - 1}{x}$

$$g'(x) = \frac{\frac{-1}{-x} \times x - (\ln(-x) - 1)}{x^2} = \frac{1 - \ln(-x) + 1}{x^2} =$$

$$= \frac{2 - \ln(-x)}{x^2}$$

$$g''(x) = \frac{-\frac{-1}{-x} \times x^2 - (2 - \ln(-x)) \times 2x}{x^4} = \frac{-x - 4x + 2x\ln(-x)}{x^4} =$$

$$= \frac{-5x + 2x\ln(-x)}{x^4} =$$

$$= \frac{-5 + 2\ln(-x)}{x^3}$$

Para $x < 0$:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-5 + 2\ln(-x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -5 + 2\ln(-x) = 0 \quad \wedge \quad x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(-x) = 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x = e^{\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -e^{\frac{5}{2}}$$

x	$-\infty$	$-e^{\frac{5}{2}}$		0
$-5+2\ln(-x)$	+	0	−	n.d.
x^3	−	−	−	n.d.
Sinal de g''	−	0	+	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de g	∩	P.I.	∪	n.d.

Cálculos auxiliares

$-5+2\ln\left(-(-e^3)\right) = -5+2\times 3 = 1\ (>0)$

$-5+2\ln\left(-(-e^2)\right) = -5+2\times 2 = -1\ (<0)$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -e^{\frac{5}{2}}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[-e^{\frac{5}{2}}, 0\right[$

$$g\left(-e^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{\ln\left(-\left(-e^{\frac{5}{2}}\right)\right)-1}{-e^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{5}{2}-1}{-e^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{-e^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{2e^{\frac{5}{2}}}$$

$\left(-e^{\frac{5}{2}}, -\frac{3}{2e^{\frac{5}{2}}}\right)$ são as coordenadas do ponto de inflexão do gráfico de g.

10.

10.1. Opção (A)

f é contínua em $x=0$ se e só se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,, ou seja, se e só se:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} (2\operatorname{sen}(x)\cos(x)) = 2\operatorname{sen} 0 \cos 0 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+k\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\operatorname{sen}^2 x}+k =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2}\times\frac{3x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}\right)+k =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2}\times\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\times\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\times 3\right)+k =$$

$$= \lim_{3x^2 \to 0^+} \frac{\text{sen}\,(3x^2)}{3x^2} \times \frac{1}{\lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(x)}{x}} \times \frac{1}{\lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(x)}{x}} \times 3 + k =$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times 3 + k =$$

$$= 3 + k$$

Como $3 + k = 0 \Leftrightarrow k = -3$, conclui-se que o valor de k para o qual f é contínua em $x = 0$ é -3.

10.2. Em $]0, \pi[$: $f(x) = 2\text{sen}x \cos x = \text{sen}(2x)$

$f'(x) = 2\cos(2x)$

$f''(x) = -4\text{sen}(2x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4\,\text{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(2x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Em $]0, \pi[$: $x = \frac{\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sinal de f''	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
Variação de f'	n.d.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	n.d.

Cálculo auxiliar

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\pi = -2$

-2 é o mínimo da função f' no intervalo considerado; portanto, -2 é o declive da reta r.