Prova-Modelo de Exame de Matemática A

2019 / 2020

Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

A prova inclui 4 itens, os itens 5.1, 5.2, 7.1 e 7.2, devidamente identificados com uma moldura no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham a melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Num laboratório farmacêutico foi criado um teste para a deteção de um determinado vírus em pessoas que apresentam um certo conjunto de sintomas.

1.1. Sabe-se que a probabilidade de uma pessoa contrair o vírus é 25%. Dos estudos feitos a pacientes que apresentam esse conjunto de sintomas, concluiu-se que:

- o teste apresenta um resultado positivo em 90% dos pacientes que contraíram o vírus;
- em cada quatro pacientes com resultado positivo no teste, três contraíram o vírus.

O teste foi realizado a um paciente que apresenta o conjunto de sintomas referido. Determine a probabilidade de o paciente não ter contraído o vírus e de o teste apresentar um resultado negativo.

1.2. Todas as embalagens destes testes têm um código diferente formado por sete carateres: cinco algarismos, escolhidos entre os algarismos de 1 a 9, e duas letras, escolhidas de entre as 26 letras do alfabeto. Quantos desses códigos são constituídos apenas por vogais e com exatamente dois algarismos 9?

(A) 12 800 **(B)** 128 000 **(C)** 2 150 400 **(D)** 2 688 000

2. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - ax^3\right)^n$, com $x > 0$, a constante positiva e $n \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que:

- ${}^nC_0 + {}^nC_1 + \ldots + {}^nC_n = 64$;
- $-20\,000x^8$ é o termo de grau 8.

O valor de a é igual a:

(A) 5 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

3. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

3.1. Considere $w_1 = \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}+8e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{24}(-i^{2020}-i^{-5})}$.

Sabe-se que w_1 é uma raiz de ordem 8 de um certo número complexo w.

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de w.

Apresente o resultado na forma algébrica.

3.2. Seja z um número complexo diferente de zero.

Prove que $\left|\frac{3|z|}{z} - \frac{4i\,\bar{z}}{|z|}\right| = 5$.

4. Uma criança está a andar num baloiço num jardim. Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Quinze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço, arrastando os pés no chão.

Admita que a distância, em decímetros, da posição da cadeira ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por:

$$d(t) = \begin{cases} 20 + t\cos(\pi t) & \text{se} \quad 0 \leq t < 15 \\ 20 + 15e^{15-t}\cos(\pi t) & \text{se} \quad t \geq 15 \end{cases}$$

O argumento da função cosseno está expresso em radianos.

4.1. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, justifique que houve, pelo menos, um instante, entre os catorze segundos e os dezasseis segundos, após o início da contagem do tempo, em que a distância da posição da cadeira ao muro foi igual a 30 decímetros.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o instante em que a distância da posição da cadeira ao muro é máxima e o valor da distância máxima.

Apresente os dois valores arredondados às unidades.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular reto. Sabe-se que uma das bases do prisma está contida no plano α de equação $2x - 5y - 2z + 80 = 0$ e que a outra base está contida no plano β que contém o ponto A de coordenadas $(1, 2, 3)$.

5.1. Considere ainda os pontos B e C, dos quais se sabe que:

- o ponto B pertence ao plano α e tem abcissa e ordenada igual a 2;
- o ponto C pertence ao plano α e ao eixo das cotas.

A amplitude do ângulo ABC, com aproximação à décima de grau, é:

(A) $42{,}1°$ **(B)** $44{,}5°$ **(C)** $135{,}5°$ **(D)** $137{,}9°$

5.2. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o valor exato da altura do prisma.

6. Lança-se um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, três vezes consecutivas e regista-se o número da face que ficou voltada para cima em cada um dos lançamentos.

Sejam a, b e c os números obtidos no primeiro, no segundo e no terceiro lançamentos, respetivamente.

Considere, num referencial ortonormado Oxy do plano, a reta r definida pela equação reduzida $y = \frac{a}{b}x + c$.

Qual é a probabilidade de a reta r ter inclinação $45°$?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{36}$ **(C)** $\frac{1}{216}$ **(D)** $\frac{5}{6}$

7. Seja r um número real maior que um.

Seja (u_n) uma progressão geométrica de termos positivos, razão r e primeiro termo a.

7.1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) (u_n) é limitada. **(B)** (u_n) é convergente.

(C) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ **(D)** $\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

7.2. Sabendo que a soma dos quatro primeiros termos da sucessão (u_n) é igual à soma dos dois termos seguintes, determine o valor de r.

8. Seja k um número real. Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n$.

Sabe-se que o valor do limite de (u_n) é solução da equação $\ln(ex) = k$. Qual é o valor de k?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

9. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(-x) - 1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ x\, e^{\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

9.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ **(B)** $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

(C) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ **(D)** Não existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

9.2. Estude, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a função g quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

9.3. Estude, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]-\infty, 0[$.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

10. Para cada número real k, considere a função f, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + k & \text{se} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\[2ex] 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

10.1. O valor de k para o qual a função f é contínua em $x = 0$ é:

(A) -3 **(B)** 0 **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 3

10.2. No intervalo $]0, \pi[$, seja r a reta tangente ao gráfico da função f que tem declive mínimo.

Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o declive da reta r.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="4">5.1.</td><td colspan="4">5.2.</td><td colspan="3">7.1.</td><td colspan="3">7.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="4">16</td><td colspan="4">20</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">20</td><td>72</td></tr>
<tr><td>Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>9.3.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="14">8 x 16 pontos</td><td>128</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td colspan="14"></td><td>200</td></tr>
</table>