TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

O termo geral deste desenvolvimento é da forma:

$$^4C_k\ (2x\cos\alpha)^{4-k} \times \left(-\frac{\text{sen}\alpha}{x}\right)^k = {}^4C_k \times 2^{4-k} \times x^{4-k} \times (\cos\alpha)^{4-k} \times (-1)^k \times (\text{sen}\alpha)^k \times x^{-k} =$$

$$= {}^4C_k \times 2^{4-k} \times (-1)^k \times x^{4-2k} \times (\cos\alpha)^{4-k} \times (\text{sen}\alpha)^k =$$

A expressão $^4C_k \times 2^{4-k} \times (-1)^k \times x^{4-2k} \times (\cos\alpha)^{4-k} \times (\text{sen}\alpha)^k$ não depende da variável x se e só se $4-2k=0 \Leftrightarrow k=2$.

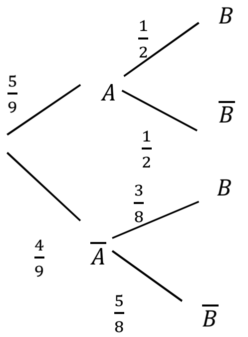
O termo independente de x é, portanto:

$$^4C_2 \times 2^{4-2} \times (-1)^2 \times (\cos\alpha)^2 \times (\text{sen}\alpha)^2 = 6 \times 4 \times \cos^2\alpha \times \text{sen}^2\alpha =$$

$$= 6 \times (2\text{sen}\alpha\cos\alpha)^2 =$$

$$= 6\text{sen}^2(2\alpha)$$

2.



$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(\overline{A})\times P(B|\overline{A})}{P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})} =$$

$$= \frac{P(\overline{A})\times P(B|\overline{A})}{P(A)\times P(B|A)+P(\overline{A})\times P(B|\overline{A})} =$$

$$= \frac{\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}}{\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} =$$

$$= \frac{3}{8}$$

3. Opção (A)

$A(2\cos\alpha, 2\text{sen}\alpha)$, com $2\cos\alpha < 0$ e $2\text{sen}\alpha > 0$

$A_{[OCBA]} = \frac{\overline{OC}+\overline{AB}}{2} \times$ ordenada de A

- $\overline{OC} = 2$
- $\overline{AB} = 2 \times |2\cos\alpha| = -4\cos\alpha$
- Ordenada de $A = 2\text{sen}\alpha$

Logo:

$$A_{[OCBA]} = \frac{2-4\cos\alpha}{2} \times 2\text{sen}\alpha =$$
$$= (1 - 2\cos\alpha) \times 2\text{sen}\alpha =$$
$$= 2\text{sen}\alpha - 2 \times 2\text{sen}\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2\text{sen}\alpha - 2\text{sen}(2\alpha)$$

4.

4.1. $d(t) = 5\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) =$

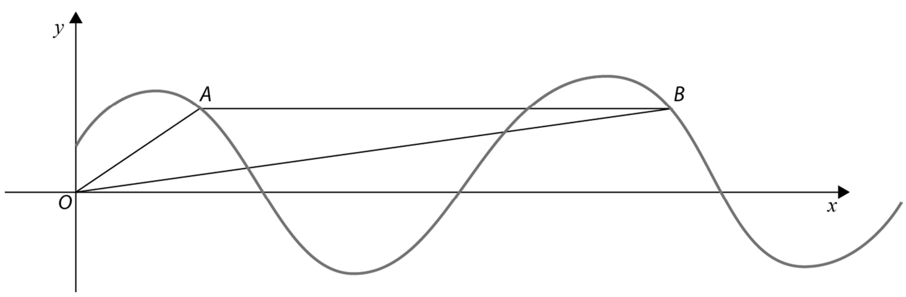
$$= 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) =$$
$$= 5\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 5\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) =$$
$$= 5\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

Como $d(t) = 5\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right)$ e $5 > 0$, $\frac{\pi}{4} > 0$ e $\frac{5\pi}{3} \in [0,2\pi[$, então $d(t)$ é um oscilador harmónico.

A amplitude é igual a 5, o período é igual a $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$, a frequência é igual a $\frac{1}{8}$ e o ângulo de fase é igual a $\frac{5\pi}{3}$.

4.2. Sabemos que $b - a = 8 \Leftrightarrow b = a + 8$ e 8 é o período de d, logo $d(a) = d(b)$.

Tal como a figura abaixo ilustra, para qualquer posição do ponto A, a altura do triângulo $[OAB]$ relativa à base $[AB]$ é dada, em função da abcissa a do ponto A, por $d(a)$.



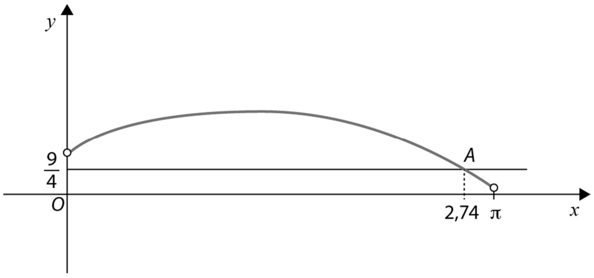
Então, a área do triângulo $[OAB]$ é dada por:

$$\frac{\overline{AB} \times d(a)}{2} = 4 \times d(a)$$

Daqui vem:

$4 \times d(a) = 9 \Leftrightarrow d(a) = \frac{9}{4}$, com $0 < a < \pi$

Na figura estão representados o gráfico de função definida por $y = d(x)$ e a reta de equação $y = \frac{9}{4}$, bem como o ponto de interseção destas duas linhas no intervalo $]0, \pi[$:



A abcissa do ponto A, para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é 9 é, aproximadamente, 2,74.

5. Opção (D)

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+\cos(2018x)+f(x)}{-2x} = 2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \times \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{\cos(2018x)}{x} + \frac{f(x)}{x}\right) = 2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cos(2018x)}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$

$\Leftrightarrow \frac{0}{-\infty} + \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\cos(2018x) \times \frac{1}{x}\right) + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$

$\Leftrightarrow 0 + 0 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$, pois $-1 \le \cos(2018x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$

Logo, se o gráfico de f admitir assíntota não vertical, o seu declive é igual a -4.

6.

6.1. $\frac{P(t+1)}{P(t)} = \frac{1500e^{0,3(t+1)}}{1500e^{0,3t}} =$

$= \frac{e^{0,3t+0,3}}{e^{0,3t}} =$

$= e^{0,3t+0,3-0,3t} =$

$= e^{0,3}$

$\approx 1,35$

Observe-se que $P(t+1) = 1,35P(t)$, ou seja, $P(t+1) = P(t) + 0,35P(t)$, o que significa que a cada dia que passa o número de indivíduos desta colónia está a crescer à taxa de, aproximadamente, 35%.

6.2. $f(-1) = 1500e \Leftrightarrow P(-1+k) = 1500e$

$$\Leftrightarrow 1500e^{0,3(-1+k)} = 1500e$$

$$\Leftrightarrow e^{0,3(-1+k)} = e$$

$$\Leftrightarrow 0{,}3(-1+k) = 1$$

$$\Leftrightarrow -1+k = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{13}{3}$$

Caderno 2

7. Opção (D)

A proposição (I) é falsa:

Como $u_{2018} = \cos(2018\pi) = 1, u_{2019} = \cos(2019\pi) = -1$ e $u_{2020} = \cos(2020\pi) = 1$, a sucessão (u_n) não é monótona.

A proposição (II) é verdadeira:

- se $n < 2018$, $u_1 \leq u_n \leq u_{2017}$, isto é, $2 \leq u_n \leq 2018$;
- se $n \geq 2018$, $-1 \leq u_n \leq 1$.

Assim, $-1 \leq u_n \leq 2018, \forall n \in \mathbb{N}$.

8.

8.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) > 0$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}(6x)}{x^3+3x} - k^2\right) > -7 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}(6x)}{x(x^2+3)} - k^2 > -7$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}(6x)}{x} \times \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2+3} - k^2 > -7$$

$$\Leftrightarrow \lim_{6x\to 0^-}\left(\frac{\text{sen}(6x)}{6x}\times 6\right)\times\frac{1}{0^2+3} - k^2 > -7$$

$$\Leftrightarrow 6\times \underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}y}{y}}_{\text{limite notável}} \times\frac{1}{3} - k^2 > -7$$

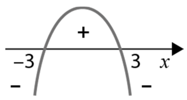
$$\Leftrightarrow 2\times 1 - k^2 > -7$$

$$\Leftrightarrow 9 - k^2 > 0$$

Cálculo auxiliar

$9 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 9$

$\Leftrightarrow k = 3 \lor k = -3$



Assim, $9 - k^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < k < 3$.

Os valores reais de k pretendidos são, então, os valores do intervalo $]-3,3[$.

8.2. Em $]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2x}{x}$

- Assíntotas verticais

Como f é contínua em $\mathbb{R}^+$, a reta de equação $x = 0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}+2x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+2\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\times\sqrt{x}}+2 = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{x}}+2 =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}+2 = \frac{1}{0^+} + 2 =$$

$$= +\infty + 2 =$$

$$= +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f e é única.

- Assíntotas horizontais

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+2x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}+2 =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}+2 = \frac{1}{+\infty}+2 =$$

$$= 0 + 2 = +2$$

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

9. Pretende-se formar um código pin com quatro algarismos diferentes, escolhidos entre os algarismos de 0 a 9, tal que o pin represente um número maior que 2000.

A Joana resolveu o problema determinando o número de códigos com quatro algarismos diferentes que é possível formar, e, a estes, subtraiu o número de códigos pin que iniciam com 0 e o número de códigos pin que iniciam com 1. Assim, ${}^{10}A_4$ é o número de maneiras distintas de escolher, ordenadamente, 4 algarismos diferentes dos 10 algarismos existentes, isto é, existem ${}^{10}A_4$ pin's com 4 algarismos diferentes. Por outro lado, $2 \times {}^{9}A_3$ é o número de maneiras diferentes de contabilizar todos os pins que, nas condições referidas, iniciam pelo algarismo 0 ou 1. Assim, 2 é o número de opções que existem para colocar na posição do primeiro algarismo e, para cada uma destas opções, existem ${}^{9}A_3$ maneiras distintas de escolher ordenadamente 3 algarismos distintos, dos 9 algarismos restantes. Portanto, o número de pins nas condições referidas pode ser dado pela expressão ${}^{10}A_4 - 2 \times {}^{9}A_3$.

O João pensou que, para o pin representar um número maior que 2000, pode iniciar com 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Assim, existem 8 hipóteses para o primeiro algarismo do pin. Para cada uma destas hipóteses, existem ${}^{9}C_3$ maneiras de escolher 3 algarismos distintos, dos 9 algarismos restantes, sendo que um já foi utilizado. Para cada uma destas maneiras e por cada hipótese para o primeiro algarismo, existem 3! maneiras de permutar os três últimos algarismos. Assim, $8 \times {}^{9}C_3 \times 3!$ é o número de maneiras de determinar o número de pins superiores a 2000 com 4 algarismos distintos.

10.

10.1. $y = mx + b$, onde $m = g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$g'(x) = \left(\frac{x}{2} + (1 - \cos x)^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} + 2(1 - \cos x) \times (1 - \cos x)' =$$

$$= \frac{1}{2} + 2(1 - \cos x) \times \operatorname{sen} x$$

$$m = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) \times \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \times (1 - 0) \times 1 =$$

$$= \frac{5}{2}$$

Como $P\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + 1\right)$ pertence à reta, vem que:

$\frac{\pi}{4} + 1 = \frac{5}{2} \times \frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow b = 1 - \pi$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$ é $y = \frac{5}{2}x + 1 - \pi$.

10.2. $g''(x) = \left(\frac{1}{2} + 2\operatorname{sen} x(1 - \cos x)\right)' =$

$$= 0 + 2[(\operatorname{sen} x)' \times (1 - \cos x) + \operatorname{sen} x(1 - \cos x)'] =$$

$$= 2(\cos x(1 - \cos x) + \operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} x) =$$

$$= 2(\cos x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) =$$

$$= 2(\cos x - \cos(2x)) =$$

Determinação dos zeros de g'':

$g''(x) = 0$

$2(\cos x - \cos(2x)) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \;\vee\; x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -x = 2k\pi \;\vee\; 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi \;\vee\; x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Em $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, os zeros de g'' são 0 e $\frac{2\pi}{3}$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Sinal de g''	n.d.	+	0	+	0	−	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	∪	$g(0)$	∪	P.I. $g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	∩	n.d.

$-\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e $g''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \sqrt{2} > 0$

$\frac{\pi}{2} \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$ e $g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right) = 2(0 - (-1)) = 2 > 0$

$\frac{3\pi}{4} \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ e $g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = -\sqrt{2} < 0$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$; apresenta um ponto de inflexão de abcissa $\frac{2\pi}{3}$.

11. Opção (C)

Sabe-se que a função f é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é decrescente em $[-1,1]$.

Sabe-se também que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0]$ e a concavidade voltada para cima em $[0, +\infty[$.

Assim:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação de f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de f''	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$

Como se pretende os valores de x tais que $f'(x) \times f''(x) \leq 0$, vem que:

$(f'(x) \leq 0 \;\; \wedge \;\; f''(x) \geq 0) \;\vee\; (f'(x) \geq 0 \;\; \wedge \;\; f''(x) \leq 0) \Leftrightarrow x \in [0,1] \;\cup\,]-\infty, -1]$