TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

$${}^9C_3 \; - \; {}^4C_3 \; = 84 - 4 = 80$$

2. Sejam A e B os acontecimentos:

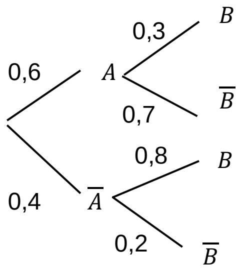
A: "o convidado é do sexo masculino"

B: "o convidado é natural da cidade do Porto"

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}6$
- $P(B|A) = 0{,}3$
- $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Pretende-se calcular o valor de $P(\overline{A} \cup B)$.



$P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$

$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$

$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$

Assim:

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) =$$
$$= 0{,}4 + (0{,}18 + 0{,}32) - 0{,}32 =$$
$$= 0{,}58$$

A probabilidade de ter sido escolhida uma mulher ou uma pessoa natural da cidade do Porto é 58%.

3. Opção (C)

Como f é uma função contínua em $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, para f ser contínua em todo o seu domínio terá que ser contínua também em $x = \frac{\pi}{2}$, isto é, $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{2k\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}\right) = 2k \lim_{x - \frac{\pi}{2} \to 0} \frac{\cos x}{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} =$

$$= 2k \lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{-y} =$$

$$= 2k \lim_{y \to 0} \frac{-\operatorname{sen} y}{-y} =$$

Mudança de variável:
$y = x - \frac{\pi}{2}$

$$= 2k \underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= 2k \times 1 =$$

$$= 2k$$

- $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$$= k^2 + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$$

$$= k^2 + 1$$

Assim:

$2k = k^2 + 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

4.

4.1. $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0$

Seja h a função definida em $]-\infty, 1]$ por $h(x) = f(x) + x$.

Assim, mostrar que o gráfico de f interseta a bissetriz dos quadrantes pares em pelo menos um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]-1,0[$ é equivalente a mostrar que a função h tem pelo menos um zero em $]-1,0[$.

- h é uma função contínua em $[-1,0]$, visto ser a soma de duas funções contínuas neste intervalo (a função f, quociente de funções contínuas neste intervalo, e a função identidade).
- $h(-1) = f(-1) + (-1) =$

$$= \frac{\sqrt{1-(-1)}-3}{-1-4} - 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-3+5}{-5} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}+2}{5} < 0$$

$h(0) = f(0) + 0 =$

$$= \frac{\sqrt{1-0}-3}{0-4} =$$

$$= \frac{-2}{-4} =$$

$$= \frac{1}{2} > 0$$

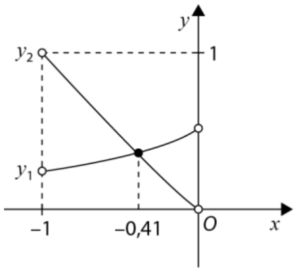
$h(-1) < 0 < h(0)$

Conclui-se, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy que:

$\exists c \in \,]-1,0[: h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \,]-1,0[: f(c) + c = 0$

$\Leftrightarrow \exists c \in \,]-1,0[: f(c) = -c$ c.q.d.

4.2.



$$y_1 = \frac{\sqrt{1-x}-3}{x-4}$$

$$y_2 = -x$$

A abcissa do ponto, com aproximação às centésimas, é $-0{,}41$.

5. Opção (B)

Seja t a reta tangente ao gráfico de f em $x = 3$ e m_t o seu declive:

$m_t = \text{tg}\,45° = 1$ e $m_t = f'(3)$

Assim:

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{9-x^2} = \lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(3-x)(3+x)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}_{f'(3)} \times \lim_{x\to3}\frac{1}{-(3+x)} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{-(3+3)} =$$

$$= -\frac{1}{6}$$

Caderno 2

6. Opção (B)

$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq \sqrt{n}$, logo:

$\forall n \in \mathbb{N}, -\sqrt{n} \leq x_n \leq \sqrt{n}$ e vem que:

$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{\sqrt{n}}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$, ou seja:

$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Como $\lim\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, então $\lim\frac{x_n}{n} = 0$.

7.

7.1. f é contínua em $x = 1$ sse existe $\lim_{x\to1} f(x)$, ou seja, $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$.

- $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{4x^2+12}-4}{-x+1} =$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1^-}\frac{4x^2+12-16}{(-x+1)(\sqrt{4x^2+12}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to1^-}\frac{4x^2-4}{(-x+1)(\sqrt{4x^2+12}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{4(x-1)(x+1)}{-(x-1)(\sqrt{4x^2+12}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{4x+4}{-(\sqrt{4x^2+12}+4)} =$$

$$= \frac{8}{-8} =$$

$$= -1$$

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{4-4x} =$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+3)}{-4(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{-4} =$$

$$= \frac{4}{-4} =$$

$$= -1$$

Cálculo auxiliar

	1	2	-3
1		1	3
	1	3	0 = *R*

$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

• $f(1) = -1$

Logo, f é contínua em $x = 1$.

7.2. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+12}-4}{-x+1} =$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{12}{x^2}\right)}-4}{-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}-4}{-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}-4}{-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\left(\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}+\frac{4}{x}\right)}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{2}{1} =$$

$$= 2$$

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

7.3. Em $]1, +\infty[$: $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{4-4x}$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(4-4x)-(x^2+2x-3)(-4)}{(4-4x)^2} =$$

$$= \frac{8x-8x^2+8-8x+4x^2+8x-12}{(4-4x)^2} =$$

$$= \frac{-4x^2+8x-4}{(4-4x)^2} =$$

$= \frac{-4(x^2-2x+1)}{4^2 \times (1-x)^2} =$

$= \frac{-4(x-1)^2}{16(x-1)^2} =$

$= -\frac{1}{4}$

$f'(x) < 0, \forall x \in \left]1, +\infty\right[$, logo f é decrescente em $\left]1, +\infty\right[$ e não admite extremos relativos neste intervalo.

8. $g''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \ \wedge \ 2\sqrt{x^2 + x + 1} \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo o sinal de g'' depende apenas do sinal de $x \longmapsto 2x + 1$.

Cálculo auxiliar

$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times1\times1}}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de g''	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$; tem um ponto de inflexão de abcissa $-\frac{1}{2}$.

9. Sabe-se que f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio, logo f é contínua. Assim, a representação gráfica (II) não pode ser a representação gráfica da função f.

Sabe-se também que $\forall x \in \mathbb{R}^-, f'(x) \times f''(x) < 0$, isto é, em $\mathbb{R}^-$, f' e f'' têm sinais contrários, o que significa que, em $\mathbb{R}^-$, ou f é decrescente e o gráfico apresenta a concavidade voltada para cima ou, em $\mathbb{R}^-$, f é crescente e o gráfico apresenta a concavidade voltada para baixo. Assim, a representação gráfica (I) não pode ser a representação gráfica da função f.

Tem-se que:

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) + x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x) + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-x + 2)] = 0$

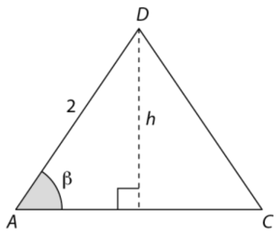
ou seja, a reta de equação $y = -x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Na representação gráfica (III) a assíntota ao gráfico da função tem declive positivo, logo não pode corresponder à representação gráfica da função f.

10. Opção (C)

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2018x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-2	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Sinal de f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$		$\cap$	P.I.	$\cup$

11. Seja β a amplitude, em radianos, do ângulo DAC.



$$\cos\beta = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 4\cos\beta$$

$$\text{sen}\beta = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2\text{sen}\beta$$

$$A_{[ACD]} = \frac{4\cos\beta \times 2\text{sen}\beta}{2} = 4\text{sen}\beta\cos\beta$$

$$A_{\text{lateral}} = 3 \times 4\text{sen}\beta\cos\beta = 12\text{sen}\beta\cos\beta = 6\text{sen}(2\beta)$$

Sabe-se que:

$2\beta + \alpha + \frac{\pi}{3} = 2\pi$, ou seja:

$$2\beta = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \alpha \Leftrightarrow 2\beta = \frac{5\pi}{3} - \alpha$$

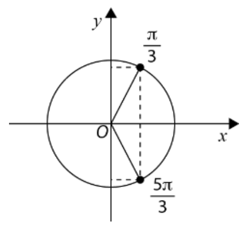
Logo, a área lateral da pirâmide é igual a:

$$6\text{sen}(2\beta) = 6\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3} - \alpha\right) =$$

$$= 6\left[\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\cos\alpha - \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\text{sen}\alpha\right] =$$

$$= 6\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\text{sen}\alpha\right] =$$

$$= -3\sqrt{3}\cos\alpha - 3\text{sen}\alpha \quad \text{c.q.d.}$$



$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$