TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

Sabemos que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis, isto é, $P(A) = P(B)$;
- $P(A|B) = P(A)$ ou seja, $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

então:

$0{,}84 = P(A) + P(A) - P(A) \times P(A) \Leftrightarrow (P(A))^2 - 2P(A) + 0{,}84 = 0$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 0{,}84}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}6 \quad \vee \quad P(A) = 1{,}4$$

Como $0 \leq P(A) \leq 1$, então $P(A) = 0{,}6$. Logo, $P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

2.

2.1. ${}^{16}C_8$ é o número de maneiras distintas de escolher os oito compartimentos de entre os 16 onde vão ser colocados os bombons de chocolate negro (iguais entre si). Por cada uma destas maneiras, existem 8! maneiras de colocar ordenadamente e sem repetição os 8 bombons de chocolate branco (distintos entre si) nos oito compartimentos restantes. Assim, ${}^{16}C_8 \times 8!$ é o número de casos possíveis.

${}^{4}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher as duas colunas de entre as quatro que vão ser ocupadas. Por cada uma destas maneiras, existem 8! maneiras de colocar os 8 bombons de chocolate branco (distintos entre si) nos oito compartimentos definidos pela escolha das duas colunas. Assim, ${}^{4}C_2 \times 8!$ é o número de casos favoráveis.

A probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{4}C_2 \times 8!}{{}^{16}C_8 \times 8!} = \frac{1}{2145}$.

2.2. 7! é o número de maneiras distintas de permutar os sete *cupcakes* (distintos) entre si.

5! é o número de maneiras distintas de permutar os cinco *brownies* (distintos) entre si.

3! é o número de maneiras distintas de permutar os três *donuts* (distintos) entre si.

3! é o número de maneiras distintas de permutar os três tipos de doce (*cupcakes, brownies* e *donuts*) entre si.

Assim, 7! × 5! × 3! × 3! = 21 772 800 é o número de maneiras pedidas.

2.3. $P((A \cap B)|C)$ representa, no contexto do problema, a probabilidade de o Afonso receber sete miniaturas e de o Gonçalo receber um bolo de cada tipo, sabendo que os amigos Afonso e Gonçalo recebem, cada um, um número ímpar de miniaturas.

Ora, admitindo que os amigos Afonso e Gonçalo recebem, cada um, um número ímpar de miniaturas, existem seis hipóteses mutuamente exclusivas: o Afonso recebe ou 1, ou 3, ou 5, ou 7, ou 9, ou 11 miniaturas, isto é, ${}^{12}C_1 + {}^{12}C_3 + {}^{12}C_5 + {}^{12}C_7 + {}^{12}C_9 + {}^{12}C_{11}$, que é igual a 2048 casos possíveis.

Destes 2048 casos, pretendemos determinar o número de casos em que o Afonso recebe sete miniaturas e o Gonçalo recebe pelo menos uma nata, um *éclair* e uma bola de berlim, isto é, o Gonçalo recebe cinco miniaturas, podendo ser:

- ou três natas, um *éclair* e uma bola de Berlim, ${}^5C_3 \times 4 \times 3$;
- ou uma nata, três *éclairs* e uma bola de Berlim, $5 \times {}^4C_3 \times 3$;
- ou uma nata, um *éclair* e três bolas de Berlim, $5 \times 4 \times {}^3C_3$;
- ou duas natas, dois *éclairs* e uma bola de Berlim, ${}^5C_2 \times {}^4C_2 \times 3$;
- ou duas natas, um *éclair* e duas bolas de Berlim, ${}^5C_2 \times 4 \times {}^3C_2$;
- ou uma nata, dois *éclairs* e duas bolas de Berlim, $5 \times {}^4C_2 \times {}^3C_2$.

Temos, assim, ${}^5C_3 \times 4 \times 3 + 5 \times {}^4C_3 \times 3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3 + {}^5C_2 \times {}^4C_2 \times 3 + {}^5C_2 \times 4 \times {}^3C_2 + 5 \times {}^4C_2 \times {}^3C_2 = 590$ casos possíveis.

Assim, tem-se que $P(A \cap B|C) = \frac{590}{2048} = \frac{295}{1024}$.

3. O termo geral do desenvolvimento de $(2 - 3x)^5$ é dado por:

${}^5C_k 2^{5-k} \times (-3x)^k = {}^5C_k \times 2^{5-k} \times (-3)^k \times x^k, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Tem-se que:

$(1 + ax) \times {}^5C_k \times 2^{5-k} \times (-3)^k \times x^k = {}^5C_k \times 2^{5-k} \times (-3)^k \times x^k + a \times {}^5C_k \times 2^{5-k} \times (-3)^k \times x^{k+1}$

- Se $k = 2$, obtemos o termo ${}^5C_2 \times 2^{5-2} \times (-3)^2 \times x^2 = 10 \times 8 \times 9x^2 = 720x^2$.
- Se $k = 1$, obtemos o termo $a \times {}^5C_1 \times 2^{5-1} \times (-3) \times x^2 = a \times 5 \times 16 \times (-3)x^2 = -240ax^2$.

Sabemos que:

$$720 - 240a = 600$$

ou seja:

$720 - 600 = 240a \Leftrightarrow 120 = 240a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

4. Consideremos os acontecimentos:

K: "Ser praticante de *karaté*."

J: "Ser praticante de *jiu-jitsu*."

Sabemos que:

- $P(K) = 2P(J)$
- $P(K \cup J) = 3P(K \cap J)$

Pretende-se determinar $P(J|K)$.

Como $P(K \cup J) = 3P(K \cap J)$, tem-se que:

$$P(K) + P(J) - P(K \cap J) = 3P(K \cap J)$$

Como $P(K) = 2P(J)$, vem que:

$$2P(J) + P(J) - P(K \cap J) = 3P(K \cap J)$$

Assim:

$$3P(J) = 4P(K \cap J)$$

ou seja:

$$P(K \cap J) = \frac{3}{4}P(J)$$

Logo:

$$P(J|K) = \frac{P(J \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{3}{4}P(J)}{2P(J)} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

A probabilidade pedida é 37,5%.

5. Opção (D)

Seja $a = {}^{2019}C_{2000} - {}^{2018}C_{1999}$.

Então, $a + {}^{2018}C_{1999} = {}^{2019}C_{2000}$.

Logo, $a = {}^{2018}C_{2000}$ ou $a = {}^{2018}C_{18}$.

Caderno 2

6. $P(\bar{A} \cup B) + P(\bar{B}|A) - P(\bar{A}) \times P(\bar{B}|A) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{B}|A) \times \left(1 - P(\bar{A})\right) =$

$$= 1 - P(A) + P(B) - \left(P(B) - P(A \cap B)\right) + \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} \times P(A) =$$

$$= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) + P(\bar{B} \cap A) =$$

$$= 1 - P(A) + P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= 1$$

7. Opção (D)

Sabe-se, pelo desenvolvimento do binómio de Newton, que:

$$\sum_{k=0}^{2019} {}^{2019}C_k\ (-1)^{2019-k}2^k = (-1+2)^{2019}$$

Assim:

$${}^{2019}C_0\ \times (-1)^{2019-0} \times 2^0 + \sum_{k=1}^{2019} {}^{2019}C_k\ (-1)^{2019-k}2^k = 1^{2019}$$

$$\Leftrightarrow 1 \times (-1) \times 1 + \sum_{k=1}^{2019} {}^{2019}C_k\ (-1)^{2019-k}2^k = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2019} {}^{2019}C_k\ (-1)^{2019-k}2^k = 2$$

8. Opção (D)

Existem ${}^5C_2$ maneiras diferentes de escolher duas posições de entre as cinco para o algarismo 9. Para cada uma destas maneiras, existem oito maneiras de escolher um algarismo diferente de 9 e que pode ocupar uma das três posições disponíveis. Finalmente, e por cada uma das maneiras anteriores, existem ${}^5A'_2$ formas de escolher ordenadamente e com repetição duas das cinco vogais existentes para ocupar os dois lugares restantes.

É possível, então, formar ${}^5C_2 \times 8 \times 3 \times {}^5A'_2 = {}^5C_2 \times 3 \times {}^5A'_2 \times 8$ códigos diferentes.

9. Tem-se que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(n\pi) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -1 \leq -\operatorname{sen}(n\pi) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq n - \operatorname{sen}(n\pi) \leq n+1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2+n+1} \leq \frac{n-\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2+n+1} \leq \frac{n+1}{n^2+n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\operatorname{Lim} \frac{n-1}{n^2+n+1} = \lim \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(n+1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1-\frac{1}{n}}{n+1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\operatorname{Lim} \frac{n+1}{n^2+n+1} = \lim \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(n+1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{n+1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, pelo teorema das sucessões enquadradas, concluímos que $\lim \frac{n-\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2+n+1} = 0$.

10. Opção (C)

Consideremos os acontecimentos:

D: "Ser dado regular com as faces numeradas de 1 a 6."

V: "Ser dado com todas as faces numeradas com quatro pontos."

Q: "Sair face marcada com quatro pontos."

Então, a probabilidade pedida é $P(D \cap Q) + P(V \cap Q)$.

Assim:

$$P(D \cap Q) + P(V \cap Q) = P(D) \times P(Q|D) + P(V) \times P(Q|V) =$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{7}{12}$$

11. $P(n): \sum_{k=0}^{n} {}^{k+3}C_k = {}^{n+4}C_n$

i) $P(1)$ é verdadeira

$$\sum_{k=0}^{1} {}^{k+3}C_k = {}^{1+4}C_1 \Leftrightarrow {}^{3}C_0 + {}^{4}C_1 = {}^{5}C_1$$
$$\Leftrightarrow 1 + 4 = 5$$
$$\Leftrightarrow 5 = 5, \text{ o que é verdadeiro.}$$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): \sum_{k=0}^{n} {}^{k+3}C_k = {}^{n+4}C_n$ (hipótese de indução)

$P(n+1): \sum_{k=0}^{n+1} {}^{k+3}C_k = {}^{n+5}C_{n+1}$

$$ {}^{n+5}C_{n+1} = {}^{n+4}C_{n+1} + {}^{n+4}C_n =$$
$$\underbrace{=}_{\text{Hipótese de indução}} {}^{n+4}C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} {}^{k+3}C_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} {}^{k+3}C_k$$

Por i) e ii), pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} {}^{k+3}C_k = {}^{n+4}C_n$.