

Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;
 g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$

$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$ ou $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ ou $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$

($k \in \{0, \dots, n - 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS
É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.



1. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos em E .

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis;
- $P(A|B) = P(A)$;
- $P(A \cup B) = 0,84$.

Qual é o valor de $P(A \cap B)$?

- (A) 0,25 (B) 0,36 (C) 0,49 (D) 0,64

2. A Margarida convidou os amigos para um lanche em sua casa.

2.1. A Margarida tem oito bombons de chocolate negro, iguais entre si, e oito bombons de chocolate branco, todos com formatos distintos. A Margarida vai colocar aleatoriamente os 16 bombons numa caixa quadrada com 16 compartimentos, não mais do que um por compartimento. Determine a probabilidade de os chocolates brancos ocuparem duas colunas. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Um prato contém sete *cupcakes*, cada um com uma cobertura diferente, cinco *brownies*, cada um de tamanho diferente e três *donuts*, também cada um com uma cobertura diferente.

De quantas maneiras distintas se podem colocar os 15 doces em fila de tal forma que os doces do mesmo tipo fiquem juntos.

2.3. Um outro prato contém 12 bolos miniaturas, dos quais cinco são natas, quatro são *éclairs* e três são bolas de berlim. A Margarida vai distribuir aleatoriamente todas as miniaturas pelos amigos Afonso e Gonçalo.

Sejam A , B e C os acontecimentos seguintes:

A : “O Afonso recebe sete miniaturas.”

B : “O Gonçalo recebe pelo menos um bolo de cada tipo.”

C : “O Afonso e o Gonçalo recebem, cada um, um número ímpar de miniaturas.”

Elabore uma composição na qual indique o valor de $P(A \cap B|C)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta, deve:

- explicar o significado de $P(A \cap B|C)$, no contexto da situação descrita;
- fazer referência à regra de Laplace;
- explicar o número de casos possíveis;
- explicar o número de casos favoráveis;
- apresentar o valor de $P(A \cap B|C)$ na forma de fração irredutível.

3. Considere o desenvolvimento de $(1 + ax)(2 - 3x)^5$, com $a \in \mathbb{R}$.

Sabendo que o coeficiente do termo em x^2 é igual a 600, determine o valor da constante a .

4. Uma associação desportiva dedica-se ao *karaté* e ao *jiu-jitsu*, entre outras artes marciais.

Nesta associação, sabe-se que:

- o número de praticantes de *karaté* é o dobro do número de praticantes de *jiu-jitsu*;
- o número de praticantes de pelo menos uma das duas modalidades é o triplo do número de praticantes das duas modalidades.

Escolhendo, ao acaso, um membro dessa associação praticante de *karaté*, determine a probabilidade de este ser praticante de *jiu-jitsu*.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

5. A expressão ${}^{2019}C_{2000} - {}^{2018}C_{1999}$ é igual a:

(A) ${}^{2019}C_{1999}$

(B) ${}^{2019}C_{18}$

(C) ${}^{2018}C_{1999}$

(D) ${}^{2018}C_{18}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	2.1.	2.2.	2.3.	3.	4.	5.	
8	15	15	15	20	20	8	101

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.



6. Sejam E um conjunto finito, não vazio, P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos em E tais que $P(A) \neq 0$.

Prove que $P(\bar{A} \cup B) + P(\bar{B}|A) - P(\bar{A}) \times P(\bar{B}|A) = 1$.

7. Qual é o valor de $\sum_{k=1}^{2019} {}^{2019}C_k (-1)^{2019-k} 2^k$?

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

8. Dispõe-se de catorze caracteres (a saber: os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de cinco caracteres, dos quais três têm de ser algarismos e dois têm de ser vogais. Quantos códigos diferentes é possível formar tais que haja unicamente dois algarismos iguais a 9?

(A) $3 \times {}^5A'_2 \times 8 \times 5!$

(B) ${}^5A_2 \times 3 \times {}^5A'_2 \times 8$

(C) ${}^5C_2 \times 3! \times {}^5A'_2 \times 8$

(D) ${}^5C_2 \times 3 \times {}^5A'_2 \times 8$

9. Utilize o teorema das sucessões enquadadas para calcular o limite da sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{n - \operatorname{sen}(n\pi)}{n^2 + n + 1}.$$

10. Considere dois dados cúbicos, um regular, com as faces marcadas de 1 a 6 pontos, e outro com todas as faces marcadas com 4 pontos. Um dos dados é escolhido ao acaso e lançado uma vez. Qual é a probabilidade de ficar voltada para cima uma face marcada com 4 pontos?

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{12}$

(C) $\frac{7}{12}$

(D) $\frac{1}{2}$

11. Mostre, por indução matemática, que, para todo o número natural n , se tem:

$$\sum_{k=0}^n {}^{k+3}C_k = {}^{n+4}C_n$$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item						
Cotação (em pontos)						
6.	7.	8.	9.	10.	11.	
25	8	8	25	8	25	99

