TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (D)

$$^{18}C_3 + {}^{18}C_4 + {}^{18}C_5 + \cdots + {}^{18}C_{18} = 2^{18} - {}^{18}C_0 - {}^{18}C_1 - {}^{18}C_2 =$$

$$= 262\,144 - 1 - 18 - 153 =$$

$$= 261\,972$$

2.

2.1. Número de casos possíveis:

$^{16}C_3 \times {}^{12}C_3 = 123\,200$

Número de casos favoráveis:

Número de casos com o João, mas sem a Joana $= {}^{1}C_1 \times {}^{11}C_2 \times {}^{15}C_3 = 25\,025$

Número de casos com a Joana, mas sem o João $= {}^{1}C_1 \times {}^{15}C_2 \times {}^{11}C_3 = 17\,325$

Número de casos com a Joana e com o João $= {}^{2}C_2 \times {}^{15}C_2 \times {}^{11}C_2 = 5775$

Assim:

Número de casos favoráveis $= 25\,025 + 17\,325 + 5775 = 48\,125$

O valor da probabilidade pedida é $\frac{48\,125}{123\,200} = \frac{25}{64}$.

2.2. _**9**_ _**1**_ __ __ __ __ __ __ __

Existem $^{7}C_2$ maneiras diferentes de escolher duas posições de entre sete, para colocar o algarismo 7.

Para cada uma destas maneiras, existem 9^5 maneiras de escolher ordenadamente e com repetição cinco algarismos de entre os algarismos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}.

Assim, o número de números de telefone nestas condições é $^{7}C_2 \times 9^5 = 1\,240\,029$.

3. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: "ter a doença rara"

B: "o teste mostrar um resultado positivo"

Sabemos que:

- $P(A) = \frac{1}{4}$
- $P(B|A) = \frac{9}{10}$
- $P(A|B) = \frac{3}{4}$

Como $P(B|A) = \frac{9}{10}$, então:

$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{9}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{9}{40}$

Como $P(A|B) = \frac{3}{4}$, então:

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{9}{40} = \frac{3}{4} \times P(B)$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{36}{120}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{10}$

Organizando os dados na tabela abaixo, obtém-se:

	B	$\overline{B}$	**Total**
A	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{4}$
$\overline{A}$		$\frac{27}{40}$	$\frac{3}{4}$
Total	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

$P(\overline{B} \cap A) = \frac{1}{4} - \frac{9}{40} = \frac{1}{40}$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{7}{10} - \frac{1}{40} = \frac{27}{40}$

A probabilidade de o paciente não ter a doença e de o teste mostrar um resultado negativo é igual a $\frac{27}{40}$.

4. Opção (B)

O desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - 1\right)^{25}$ tem 26 termos e, como $\sqrt{x} > 0$ e $-1 < 0$, os termos são alternadamente positivos e negativos. Assim, destas 26 parcelas, tem-se que 13 são positivas e 13 são negativas.

Escolhendo aleatoriamente três das parcelas e efetuando o seu produto, tem-se que:

- o número de casos possíveis é ${}^{26}C_3$;
- o número de casos favoráveis é ${}^{13}C_3 + {}^{13}C_2 \times {}^{13}C_1$ (já que o produto é positivo se três das parcelas forem positivas ou se duas das parcelas forem negativas e uma for positiva).

Logo, a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{13}C_3 + {}^{13}C_2 \times {}^{13}C_1}{{}^{26}C_3} = \frac{1300}{2600} = \frac{1}{2}$$

5. $P(A|B)$ representa a probabilidade de os números registados nas três extrações saírem por ordem crescente de numeração, sabendo que o produto dos números registados é ímpar.

Ora, admitido que o produto dos números registados é ímpar, então significa que saíram três números ímpares. Assim, ${}^6A_3$ é o número de casos possíveis, isto é, o número de sequências de três elementos distintos escolhidos de entre os seis números ímpares.

De entre estes casos possíveis, apenas existem ${}^6C_3$ casos favoráveis, isto é, ${}^6C_3$ é o número de subconjuntos de três elementos escolhidos de entre os seis números ímpares, já que se pretende que os números registados tenham saído por ordem crescente.

A probabilidade de um acontecimento é dada, de acordo com a regra de Laplace, pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de caso possíveis, quando estes são todos equiprováveis e em número finito.

Assim, $P(A|B) = \frac{{}^6C_3}{{}^6A_3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Caderno 2

6. Opção (A)

Se ${}^nC_{2017}$ é o maior elemento de uma determinada linha, então $n = 2 \times 2017 = 4034$.

A soma de todos os elementos dessa linha é igual a 2^{4034}.

7. $P(A) \times P(B) \times \left(P(A|B) + P(B|A)\right) = P(A) \times P(B) \times \left(\frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(B\cap A)}{P(A)}\right) =$

$$= \frac{P(A)\times P(B)\times P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(A)\times P(B)\times P(B\cap A)}{P(A)} =$$

$$= P(A) \times P(A \cap B) + P(B) \times P(A \cap B) =$$

$$= P(A \cap B) \times (P(A) + P(B)) =$$

$$= \left(1 - P(\overline{A \cap B})\right) \times (P(A) + P(B)) =$$

$$= \left(1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})\right) \times (P(A) + P(B))$$

8. Opção (D)

$\lim u_n = \lim \frac{4^n\times\left(1-\frac{2^n}{4^n}\right)}{4^n\times\left(1+\frac{2^n}{4^n}\right)} = \lim \frac{1-\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

Sendo (u_n) e (v_n) sucessões convergentes e, como a partir de certa ordem, $v_n - u_n \leq 0$, isto é, $v_n \leq u_n$, tem-se que $\lim v_n \leq \lim u_n$, ou seja, $\lim v_n \leq 1$.

Das opções apresentadas, apenas $0 \leq 1$.

9. Opção (B)

25! é o número de casos possíveis.

Pretendemos que os alunos fiquem todos juntos; então, consideremos um bloco para os alunos e cinco blocos para os cinco professores:

$$\_A\_ \quad \_P_1\_ \quad \_P_2\_ \quad \_P_3\_ \quad \_P_4\_ \quad \_P_5\_$$

20! é o número de maneiras de os alunos trocarem de posição entre si e, por cada uma destas maneiras, existem 6! maneiras distintas de os seis blocos trocarem entre si.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{20!\times 6!}{25!}$.

10. Tem-se que:

$$-1 \leq \cos(n\pi) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq n+\cos(n\pi) \leq n+1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim \frac{n-1}{n^2+1} = \lim \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{1-\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1-0}{+\infty(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim \frac{n+1}{n^2+1} = \lim \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+0}{+\infty(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que lim $u_n = 0$.

11. $P(n): \sum_{k=1}^{n} {}^{k}C_1 = {}^{n+1}C_2$

(i) $P(1)$ é verdadeira:

$\sum_{k=1}^{1} {}^{k}C_1 = {}^{2}C_2 \Leftrightarrow {}^{1}C_1 = {}^{2}C_2 \Leftrightarrow 1 = 1$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira.

$P(n): \sum_{k=1}^{n} {}^{k}C_1 = {}^{n+1}C_2$ (hipótese de indução)

$P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} {}^{k}C_1 = {}^{n+2}C_2$ (tese de indução)

$$\sum_{k=1}^{n+1} {}^{k}C_1 = \sum_{k=1}^{n} {}^{k}C_1 + {}^{n+1}C_1 =$$

$$\underbrace{=}_{\text{hipótese de indução}} {}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_1 =$$

$$= {}^{n+2}C_2$$

Por (i) e (ii), pelo Princípio de Indução Matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} {}^{k}C_1 = {}^{n+1}C_2$ é uma proposição verdadeira.