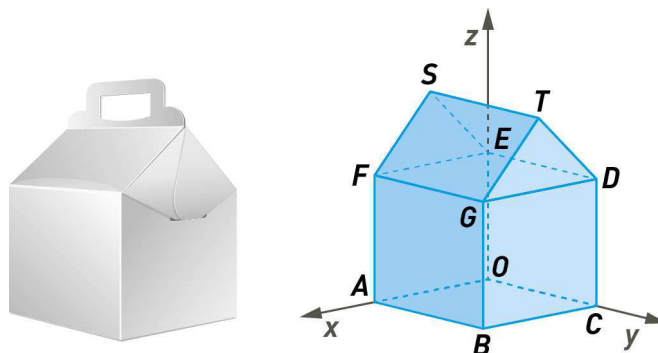




3. Uma pastelaria usa caixas como as que estão na figura 1.  
Na figura 2, em referencial o.n.  $Oxyz$ , a caixa é representada por um prisma pentagonal.



Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que:

- a face  $[OABC]$  está contida no plano  $xOy$ ;
- a face  $[AOESF]$  está contida no plano  $xOz$ ;
- a face  $[OCDE]$  está contida no plano  $yOz$ ;
- o ponto  $G$  tem coordenadas  $(6, 8, 5)$ ;
- o ponto  $S$  tem coordenadas  $(3, 0, 7)$ .

3.1. Indica as coordenadas de todos os vértices que não pertencem ao plano  $xOy$ .

3.2. O ponto de coordenadas  $(3, \sqrt{65}, 7)$  pertence:

- (A) a uma aresta do prisma.                      (B) à semirreta  $\hat{S}T$ .  
(C) à reta  $GT$ .                                      (D) ao plano mediador de  $[ST]$ .

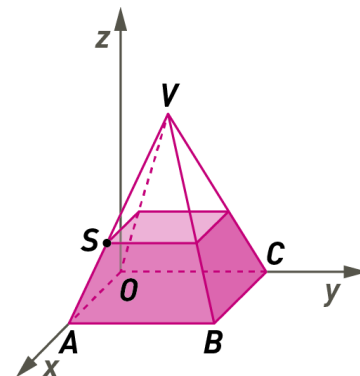
3.3. Qual das seguintes condições define a aresta  $[BG]$ ?

- (A)  $x=6 \wedge y=8$                                       (B)  $x=8 \wedge y=6 \wedge z \geq 0$   
(C)  $x=6 \wedge y=8 \wedge 0 \leq z \leq 5$                       (D)  $x=5 \wedge y=8 \wedge 0 \leq z \leq 6$

3.4. Escreve a equação reduzida da superfície esférica cujo centro é o ponto médio de  $[SG]$  e é tangente ao plano  $yOz$ .

3.5. Determina o volume do prisma.

4. No referencial o.n.  $Oxyz$  da figura está representada uma pirâmide quadrangular regular  $[ABCOV]$ . Os pontos  $A$  e  $V$  têm coordenadas  $(6,0,0)$  e  $(3,3,8)$ , respetivamente.



4.1. Determina uma equação do plano mediador do segmento de reta  $[BV]$ .

4.2. Sabe-se que o ponto  $S$  é o ponto de interseção da reta  $AV$  com o plano de equação  $z = 5$ . Determina as coordenadas do ponto  $S$ .

4.3. O valor de  $k$  para o qual o ponto  $P(2k^2 - 5, 3k + 9, k)$  pertence à reta que contém a altura da pirâmide é:

- (A) 2                                      (B) 3                                      (C) 8                                      (D) -2

5. Considera os conjuntos  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$  e  $B = \{0, 1, 3, 4\}$  e  $C = \{-1, 1, 5, 7\}$   
Sejam  $f$  e  $g$  funções tais que:

$$f: A \rightarrow B \quad \text{e} \quad g: B \rightarrow C$$

$$x \rightarrow x^2 \quad \quad \quad x \rightarrow 2x - 1$$

5.1. Indica o contradomínio de cada uma das funções.

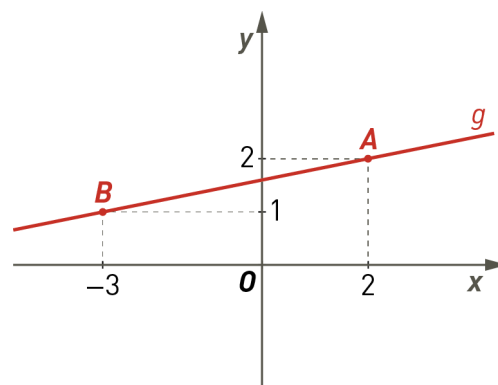
5.2. A função  $f$  é injetiva? Justifica.

5.3. Existe função inversa da função  $g$ ? Justifica.

6. Sejam  $f$  e  $g$  funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que:

- $f(x) = \frac{-x+3}{2}$
- os pontos  $A(2, 2)$  e  $B(-3, 1)$  pertencem ao gráfico da função afim  $g$ , representada na figura.



6.1. Calcula  $(g \circ f)(-1)$  e  $(f \circ g)(-3)$ .

6.2. Determina o elemento do domínio de  $g$  cuja imagem é 4.

6.3. Há um ponto comum aos gráficos de  $f$  e de  $g$ . Determina as coordenadas desse ponto.

## FIM

	Cotações																	
Questões	1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	3.5.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2.	5.3.	6.1.	6.2.	6.3.	Total
Pontos	12	12	8	12	8	8	15	15	15	16	8	10	10	12	12	12	15	200

1.

1.1

$B(-4,0)$  e  $C(0,2)$

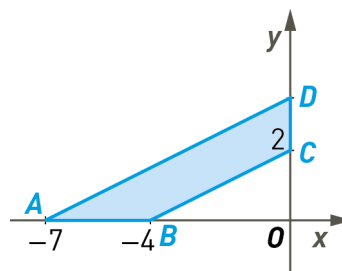
Uma equação da reta  $BC$  é do tipo  $y = mx + 2$ .

As coordenadas do ponto  $B$  são soluções da equação  $y = mx + 2$ .

$$\text{Assim, tem-se: } 0 = -4m + 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow 2y - x = 4$$

A reta  $BC$  é definida pela equação  $2y - x = 4$



**Resposta:**  $BC: 2y - x = 4$

1.2. As retas  $BC$  e  $AD$  são paralelas. Logo, têm igual declive.

Assim, uma equação da reta  $AD$  é do tipo:  $y = \frac{1}{2}x + b$ , em que as coordenadas do ponto  $A(-7,0)$  são soluções.

$$0 = -\frac{7}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{2}$$

$$\text{Equação reduzida da reta } AD \text{ é } y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

A reta  $AD$  interseca o eixo  $Oy$  no ponto  $D\left(0, \frac{7}{2}\right)$ .

**Resposta:**  $AD: y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$  e  $D\left(0, \frac{7}{2}\right)$

2. «Seja  $P(x,0)$  o ponto de interseção da reta com o eixo  $Ox$ .

$$(x,0) = (-6,4) + k(3,8)$$

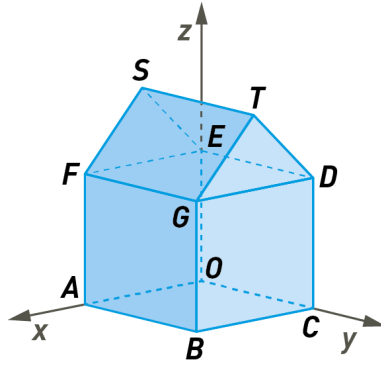
Daqui resulta que

$$\begin{cases} x = -6 + 3k \\ 0 = 4 + 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 + 3k \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 - \frac{3}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{15}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

A abcissa do ponto  $P$  é  $-\frac{15}{2}$ .

**Resposta:** Opção (B)  $-\frac{15}{2}$

3.



3.1.  $G(6,8,5)$ ;  $F(6,0,5)$ ;  $E(0,0,5)$ ;  $D(0,8,5)$ ;  $S(3,0,7)$  e  $T(3,8,7)$

3.2. O ponto de coordenadas  $(3, \sqrt{65}, 7)$  pertence...

Repara que  $\sqrt{65} > 8$ .

**Resposta:** Opção (B) à semirreta  $\dot{S}T$ .

3.3. A reta  $BG$  é a interseção do plano  $x=6$  com o plano  $y=8$  e as cotas dos pontos de  $[BG]$  variam entre 0 e 5.

**Resposta:** Opção (C)  $x=6 \wedge y=8 \wedge 0 \leq z \leq 5$

3.4. Centro da superfície esférica:  $\left(\frac{3+6}{2}, \frac{0+8}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 4, 6\right)$

Raio:  $\frac{9}{2}$

Equação da superfície esférica:  $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = \frac{81}{4}$

**Resposta:**  $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = \frac{81}{4}$

3.5. Repara que:

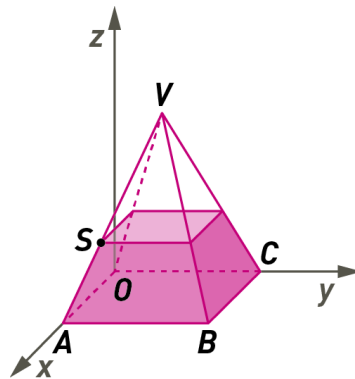
$$\overline{AB} = 8 ; \overline{BC} = 6 ; \overline{BG} = 5$$

Em relação ao triângulo  $[GDT]$ , a altura em relação ao lado  $[GD]$  é igual a  $7 - 5$ , ou seja, 2.

O volume do prisma é dado por:  $8 \times 6 \times 5 + \frac{6 \times 2}{2} \times 8 = 240 + 48 = 288$

**Resposta:** 288 unidades de volume

4. No referencial o.n.  $Oxyz$  da figura está representada uma pirâmide quadrangular regular  $[ABCOV]$ . Os pontos  $A$  e  $V$  têm coordenadas  $(6,0,0)$  e  $(3,3,8)$ , respetivamente.



4.1. Seja  $P(x,y,z)$  um ponto qualquer do plano mediano de  $[BV]$ .

$$\overline{PB} = \overline{PV}$$

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-8)^2}$$

Daqui resulta que:

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 16z + 64$$

$$\Leftrightarrow -12x + 6x - 12y + 6y + 16z + 36 + 36 - 9 - 9 - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x - 6y + 16z - 10 = 0 \Leftrightarrow -3x - 3y + 8z - 5 = 0$$

plano mediano de  $[BV]$ :  $-3x - 3y + 8z - 5 = 0$

**Resposta:**  $-3x - 3y + 8z - 5 = 0$

4.2. Uma equação vetorial da reta  $AV$ :  $(x,y,z) = A + k\overline{AV}$ ,  $k \in \mathbb{R}$

$$(x,y,z) = (6,0,0) + k(-3,3,8), k \in \mathbb{R}$$

Seja  $S(x,y,5)$ .

Assim, tem-se:  $(x,y,5) = (6,0,0) + k(-3,3,8)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Daqui resulta:

$$\begin{cases} x = 6 - 3k \\ y = 0 + 3k \\ 5 = 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 3k \\ y = 0 + 3k \\ k = \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{33}{8} \\ y = \frac{15}{8} \\ k = \frac{5}{8} \end{cases}$$

O ponto  $S$  tem coordenadas  $\left(\frac{33}{8}, \frac{15}{8}, 5\right)$ .

**Resposta:**  $S\left(\frac{33}{8}, \frac{15}{8}, 5\right)$

4.3. A reta que contém a altura da pirâmide pode ser definida pela condição:  $x = 3 \wedge y = 3$

$$2k^2 - 5 = 3 \wedge 3k + 9 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 = 8 \wedge 3k = -6$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 4 \wedge k = -2 \Leftrightarrow (k = 2 \vee k = -2) \wedge k = -2 \Leftrightarrow k = -2$$

**Resposta:** Opção (D)  $-2$

5. Considera os conjuntos  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$  e  $B = \{0, 1, 3, 4\}$  e  $C = \{-1, 1, 5, 7\}$   
Sejam  $f$  e  $g$  funções tais que:

$$f: A \rightarrow B \quad e \quad g: B \rightarrow C \\ x \rightarrow x^2 \quad \quad \quad x \rightarrow 2x - 1$$

5.1. Contradomínio da função  $f$ :  $D'_f = \{f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = \{1, 0, 4\}$

Contradomínio da função  $g$ :  $D'_g = \{g(0), g(1), g(3), g(4)\} = \{-1, 1, 5, 7\}$

Resposta:  $D'_f = \{1, 0, 4\}$  e  $D'_g = \{-1, 1, 5, 7\}$

5.2. A função  $f$  não é injetiva. Basta observar que há os objetos  $-1$  e  $1$  são diferentes e têm igual imagem.

$$-1 \neq 1 \wedge f(-1) = f(1) = 1$$

5.3. A função  $g$  é injetiva, objetos diferentes têm imagens diferentes.

A função  $g$  é sobrejetiva, o contradomínio é igual ao conjunto de chegada.  $D'_g = C$

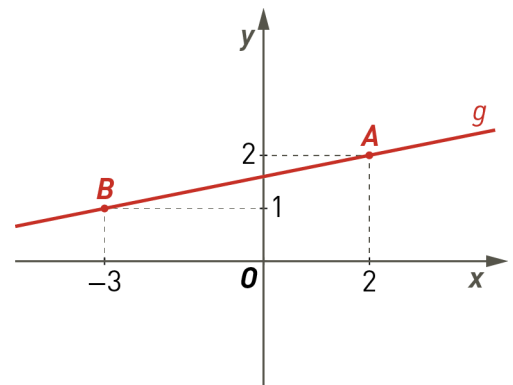
Assim, a função  $g$  é bijetiva. Sendo bijetiva tem inversa.

Resposta: A função  $g$  tem inversa, pois é bijetiva.

6. Sejam  $f$  e  $g$  funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que:

- $f(x) = \frac{-x+3}{2}$
- os pontos  $A(2, 2)$  e  $B(-3, 1)$  pertencem ao gráfico da função afim  $g$ , representada na figura.



6.1.  $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(2) = 2$

$$(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(1) = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Resposta:  $(g \circ f)(-1) = 2$  e  $(f \circ g)(-3) = 1$

6.2. Determina o elemento do domínio de  $g$  cuja imagem é 4.

$$g(x) = 4$$

O gráfico da função  $g$  é a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 1) - (2, 2) = (-5, -1).$$

Declive da reta  $AB$  é  $\frac{1}{5}$ .

$$y = \frac{1}{5}x + b$$

$$2 = \frac{2}{5} + b \Leftrightarrow b = \frac{8}{5}$$

Equação reduzida da reta AB:  $y = \frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$

Assim,  $g(x) = \frac{x+8}{5}$ .

$$g(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{x+8}{5} = 4 \Leftrightarrow x = 12$$

$$g(12) = 4$$

**Resposta:** 12

**6.3.** Há um ponto comum aos gráficos de  $f$  e de  $g$ . Determina as coordenadas desse ponto.

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+3}{2} = \frac{x+8}{5} \Leftrightarrow -5x+15 = 2x+16 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$$

O ponto de interseção dos dois gráficos é  $\left(-\frac{1}{7}, f\left(-\frac{1}{7}\right)\right)$ .

$$f\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{-\frac{1}{7}+3}{5} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

O ponto de interseção tem coordenadas  $\left(-\frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right)$ .

**Resposta:**  $\left(-\frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right)$

**FIM**

Questões	Cotações																Total	
	1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	3.5.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2.	5.3.	6.1.	6.2.		6.3.
Pontos	12	12	8	12	8	8	15	15	15	16	8	10	10	12	12	12	15	200