

1. Prove por indução matemática as seguintes proposições para todo $n \in \mathbb{N}$:

- (a) $9^n - 1$ é múltiplo de 8.
- (b) $4^{2n} - 1$ é múltiplo de 5.
- (c) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- (d) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (e) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$
- (f) $(n+1)! \geq 2^n$
- (g) $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq -1$
- (h) $1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$
- (i) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- (j) $\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq n+1$