Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 9** **2011/12**

1. Mostra que toda a função é contínua em qualquer ponto isolado do seu domínio.

2. Mostra que uma função é contínua num ponto interior do seu domínio se e só se for contínua à esquerda e à direita nesse ponto.

3. Mostra que

   (a) as funções constante e a função identidade são contínuas;

   (b) se f e g forem contínuas num ponto a comum aos seus domínios, então $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ e f/g (neste último caso supondo também que $g(a)\neq 0$) são também contínuas em a;

   (c) se $f : A\subset\mathbb{R}\to B\subset\mathbb{R}$ e $h : B\to\mathbb{R}$ forem contínuas respetivamente em $a\in A$ e em $f(a)\in B$, então a função composta $h\circ f$ é também contínua em a.

4. Determina k por forma a que a função f seja contínua no seu domínio.

   (a) $f(x)=\begin{cases} x^5\sin\frac{1}{x^2}+1 & \text{se} \quad x\neq 0\\ k & \text{se} \quad x=0\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}+2 & \text{se} \quad x\neq 0\\ k & \text{se} \quad x=0\end{cases}$

   (c) $f(x)=\begin{cases} \arccos\frac{2}{x}, & \text{se} \quad x\geq 2\\ 2ke^{x-2} & \text{se} \quad x<2\end{cases}$

5. Seja $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ uma aplicação contínua com $f(a)<0<f(b)$.

   (a) Seja $m := \frac{a+b}{2}$. Se $f(m)=0$, para[1] o cálculo! Caso contrário, $f(m)$ ou é positivo ou negativo. Observa que então para um dos subintervalos $[a,m]$ ou $[m,b]$ a função assume sinal negativo no extremo esquerdo e sinal positivo no extremo direito. Designa por $[a_1,b_1]$ o subintervalo onde isso acontece, i.e., onde $f(a_1)<0<f(b_1)$.

   (b) Redefine $m := \frac{a_1+b_1}{2}$. Se $f(m)=0$, para o cálculo! Caso contrário, $f(m)$ ou é positivo ou negativo. Observa que então para um dos subintervalos $[a_1,m]$ ou $[m,b_1]$ a função assume sinal negativo no extremo esquerdo e sinal positivo no extremo direito. Designa por $[a_2,b_2]$ o subintervalo onde isso acontece, i.e., onde $f(a_2)<0<f(b_2)$.

   (c) Redefine $m := \frac{a_2+b_2}{2}$. Se $f(m)=0$, para o cálculo! Caso contrário, prossegue como anteriormente. Etc..

   (d) Convence-te que uma de duas coisas terá que acontecer: ou o cálculo para porque encontrámos um $m\in\,]a,b[$ onde $f(m)=0$; ou o cálculo nunca para e construímos uma sucessão $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots$ tal que $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots$ e onde $f(a_n)<0<f(b_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

   (e) Mostra que $|a_n-b_n|=2^{-n}|a-b|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

   (f) Mostra que existe um só número $c\in\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$ e que $a_n,b_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}c$.

   (g) Mostra que $0\geq\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\geq 0$ e que, portanto, c é um ponto de $]a,b[$ onde a função f se anula.

6. Mostra que se $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ for uma aplicação contínua e se $k\in\mathbb{R}$ for tal que $f(a)<k<f(b)$, então existe um $c\in\,]a,b[$ com $f(c)=k$. (Sugestão: constrói, a partir desta função f, uma outra a que possas aplicar o resultado do exercício anterior).

7. Mostra que se $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ for uma aplicação contínua e se $k\in\mathbb{R}$ for tal que $f(a)>k>f(b)$, então existe um $c\in\,]a,b[$ com $f(c)=k$. (Sugestão: constrói, a partir desta função f, uma outra a que possas aplicar o resultado do exercício anterior).

   Informação: Os resultados dos dois exercícios anteriores designam-se, em conjunto, por *Teorema dos valores intermédios* ou *Teorema de Bolzano-Cauchy*.

[1] Na antiga ortografia escrevia-se "pára". Esta custa a engolir!

8. Aplica um dos resultados anteriores à função $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ e conclui que existe um número real em $]1,2[$ cujo quadrado é 2.

A resolução completa do exercício que se segue é SÓ PARA CORAJOSOS. No entanto, é importante que todos compreendam a mensagem que ele transmite.

9. Observa que o exercício anterior prova a existência de $\sqrt{2}$ dentro do conjunto dos números reais (anteriormente tinha-se visto que não existia um tal número em $\mathbb{Q}$). Mostra que, mais geralmente, para qualquer $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e qualquer número real não negativo x existe o número real $\sqrt[n]{x}$. Observa que isto garante que a função $x \mapsto x^{1/n}$ faz sentido para todo o $x \in [0, \infty[$ e que, como consequência, a função $x \mapsto x^{p/q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ and $q \in \mathbb{N}$, faz sentido para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

10. Mostra que a equação $x^3 + 4x^2 + 2x + 5 = 0$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

11. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Iremos ver que terá necessariamente que ser limitada, usando uma argumentação por contradição. Na verdade, iremos somente ver que é limitada superiormente, deixando-se a prova da limitação inferior ao teu cuidado.

    (a) Supõe que tal f não era limitada superiormente. Observa que isso te permitiria construir uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ da seguinte maneira: como para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria pelo menos um $x \in [a,b]$ tal que $f(x) > n$, bastaria escolher para x_n um desses x (e portanto ter-se-ia $f(x_n) > n$).

    (b) Observa que tal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seria uma sucessão limitada.

    (c) Garante que seria possível extrair dela uma subsucessão $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Designa por c o respetivo limite.

    (d) Mostra que $c \in [a,b]$.

    (e) Mostra que $f(x_{\sigma(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(c)$.

    (f) Garante que a partir de certa ordem se teria então sempre $\sigma(n) < f(x_{\sigma(n)}) < f(c) + 1$ e observa que terias acabado de obter uma contradição (e portanto f tem que ser limitada superiormente).