Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 8** **2011/12**

---

1. Mostra que, quando existe, o limite de uma função num ponto de acumulação do seu domínio é único.

2. Sejam $f, g, h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. Mostra que

   (a) se $g(x) \le f(x) \le h(x), \forall x \in D$, e se $\lim_{x\to a} g(x) = b = \lim_{x\to a} h(x)$, então também $\lim_{x\to a} f(x) = b$;

   (b) se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada, então $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$;

   (c) se $g(x) \le f(x), \forall x \in D$, então $\lim_{x\to a} g(x) \le \lim_{x\to a} f(x)$, desde que estes limites existam.

3. Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. Mostra que as seguintes igualdades são válidas desde que existam e sejam finitos os limites que constam nos respetivos segundos membros (e no caso do quociente supondo também que os denominadores não sejam nulos):

   (a) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$,

   (b) $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$,

   (c) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$,

   (d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

4. Calcula, caso existam, os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x-a}{|x-a|}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \cot \frac{2}{x}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \arctan(1-x)$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \arccos \frac{1}{x}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

5. Dá um exemplo de duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) \neq f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

6. Calcula os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x^{2/3} - 3x^{1/2}}{4 - \frac{16}{x}}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 1}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 8x^3}{2 - 3x^3}$

7. Mostra que o limite de uma função existe num ponto interior do seu domínio se e só se existirem e forem iguais os limites laterais dessa função nesse ponto. E que em tal caso o limite da função é igual ao valor comum dos limites laterais.