Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 7** **2011/12**

---

1. Considera as funções dadas por:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2, \quad g(x) = 2 - 3e^{x-1}, \quad h(x) = 1 - \ln(x+e),$$

$$i(x) = \ln(4 - x^2), \quad j(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x + 1}.$$

   (a) Determina o domínio de cada uma delas.
   (b) Caracteriza f^{-1}, g^{-1} e h^{-1}.
   (c) Calcula os zeros de i e de j.
   (d) Determina as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção do gráfico de j com a reta de equação $y = 1$.

2. Em $\mathbb{R}$, as funções f e g são dadas por $f(x) = \sqrt{x+4}$ e $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Caracteriza $f \circ g$ e $g \circ f$.

3. A *restrição principal* da função seno é uma aplicação bijetiva de $[-\pi/2, \pi/2]$ em $[-1, 1]$, logo tem inversa, que se designa por *arco seno*,

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2],$$

definindo-se, para cada $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ como o único $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\sin y = x$.

   (a) Faz um esboço do gráfico de arcsin.
   (b) Determina $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{2})$.

4. A *restrição principal* da função cosseno é uma aplicação bijetiva de $[0, \pi]$ em $[-1, 1]$, logo tem inversa, que se designa por *arco cosseno*,

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],$$

definindo-se, para cada $x \in [-1, 1]$, $\arccos x$ como o único $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$.

   (a) Faz um esboço do gráfico de arccos.
   (b) Determina $\arccos(\cos \frac{3\pi}{2})$.
   (c) Mostra que a relação $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, 1]$ é uma consequência da conhecida relação $\sin(\frac{\pi}{2} - y) = \cos y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
   (d) Mostra que $\sin^2(\arccos x) = \cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$, $\forall x \in [-1, 1]$.

5. A *restrição principal* da função tangente é uma aplicação bijetiva de $]-\pi/2, \pi/2[$ em $\mathbb{R}$, logo tem inversa, que se designa por *arco tangente*,

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[,$$

definindo-se, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ como o único $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ tal que $\tan y = x$.

   (a) Faz um esboço do gráfico de arctan.
   (b) Determina $\arctan(\tan \frac{3\pi}{2})$.
   (c) Deduz com a ajuda de 4.(d) que $\tan^2(\arcsin x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, $\forall x \in]-1, 1[$.

6. A *restrição principal* da função cotangente é uma aplicação bijetiva de $]0,\pi[$ em $\mathbb{R}$, logo tem inversa, que se designa por *arco cotangente*,

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow]0,\pi[,$$

definindo-se, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arccot} x$ como o único $y \in]0,\pi[$ tal que $\cot y = x$.

   (a) Faz um esboço do gráfico de arccot.
   (b) Determina $\operatorname{arccot}(\cot \frac{3\pi}{2})$.
   (c) Mostra que a relação $\operatorname{arccot} x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ é uma consequência da conhecida relação $\tan(\frac{\pi}{2} - y) = \cot y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
   (d) Deduz com a ajuda de 4.(d) que $\cot^2(\arccos x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, $\forall x \in]-1,1[$.

7. Determina o domínio, o contradomínio e os zeros das funções dadas por:
   (a) $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$
   (b) $g(x) = -\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{arccot}(-3x)$
   (c) $h(x) = \arctan \dfrac{1}{x+1}$
   (d) $m(x) = \arcsin\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

8. Seja f a função dada por $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$.
   (a) Determina o domínio e o contradomínio de f.
   (b) Indica as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

9. Considera a função g tal que $g(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$. Indica o domínio, o contradomínio e os zeros de g.

10. (a) Seja f uma função real de variável real. Observa que $f = g + h$, onde

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

   Mostra que g é uma função par e que h é ímpar.
   (b) Expressa cada uma das funções seguintes como soma de uma função par e outra ímpar:
   $f_1(x) = 3 - 2x + x^4 - 5x^7$,
   $f_2(x) = (x+2)\sin x - x^3 \sin(5x)$, $f_3(x) = \sin(x + \pi/3)$.
   (c) Mostra que a soma de duas funções pares é uma função par e que a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.
   (d) O que podes afirmar acerca do produto de duas funções pares? E de duas ímpares? E de uma par e outra ímpar?

11. Resolve cada uma das seguintes equações:
   (a) $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$, com $x \in [-2\pi, 2\pi]$.
   (b) $\dfrac{x^2 \cot x}{\sin x} = 0$.
   (c) $\sin x = \tan x$.
   (d) $\dfrac{(x^2-1)\sin(2x)}{x} = 0$.

12. Considera a função dada por $f(x) = \arcsin \frac{x+3}{x-2}$. Determina:
   (a) o domínio de f;
   (b) os valores de x tais que $f(x) \geq 0$.

13. Determina o domínio e os zeros da função dada por

$$g(x) = \begin{cases} \arccos(x^2) & \text{se} \quad x < 0 \\ e^{-x+1} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$