# Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

**ANÁLISE MATEMÁTICA I** **Folha 6** **2011/12**

---

1. Estuda a natureza das seguintes séries numéricas alternadas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\ln n}$

2. Verifica se as seguintes séries numéricas são absolutamente convergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+2)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}+n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos\pi n}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\cos 3n}{n^2+n}$

3. Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. No caso de haver convergência, indica se ela é simples ou absoluta:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{(-2)^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!\,2^n}{n^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{10^n}{n!}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n^2+1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^3}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n^2}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n+1}$

4. Considera uma série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e define, para cada $n\in\mathbb{N}$, $u_n := \frac{1}{2}(|a_n|+a_n)$ e $v_n := \frac{1}{2}(|a_n|-a_n)$. Mostra que:

   (a) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n, v_n \geq 0$.

   (b) $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = u_n - v_n$ e $|a_n| = u_n + v_n$.

   (c) Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ for simplesmente convergente então tanto $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ como $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ são divergentes, verificando-se, além disso, que ambas as sucessões das somas parciais tendem para $+\infty$.

SÓ PARA CORAJOSOS:

5. Considera a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, a qual, como sabes, é simplesmente convergente.

   (a) Mostra que as séries de termo geral $u_n$ e $v_n$ construídas de acordo com o exercício anterior são, neste caso, respetivamente e a menos dos termos nulos que foram eliminados, as séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$, as quais sabemos também, até por outras vias, que divergem para $+\infty$. Redefinamos, para efeitos do que se segue, $u_n := \frac{1}{2n-1}$ e $v_n := \frac{1}{2n}$.

   (b) Constrói, a partir dos termos das séries anteriores, uma série $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ da seguinte maneira:

i. os primeiros termos são os mesmos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ até que a sua soma se torne pela primeira vez igual ou superior ao número 500 (*porque é que isto é possível?*); designa por $u_{\sigma(1)}$ o último termo a ser considerado;

ii. os termos seguintes são os primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, mas afetados do sinal menos (tal como na série inicial), até que a soma algébrica total (isto é, considerando também os termos do passo anterior) se torne pela primeira vez igual ou inferior a 500 (*porque é que isto é possível?*); designa por $-v_{\tau(1)}$ o último termo a ser considerado;

iii. para a obtenção dos termos seguintes, retomamos a inclusão dos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ até que pela primeira vez a soma parcial da série que estamos a construir volte novamente a ser igual ou superior a 500 (*porque é que isto é possível?*); designa por $u_{\sigma(2)}$ o último termo a ser considerado;

iv. para a obtenção dos termos seguintes, retomamos a inclusão dos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, novamente afetados do sinal menos, até que pela primeira vez a soma parcial da série que estamos a construir volte novamente a ser igual ou inferior a 500 (*porque é que isto é possível?*); designa por $-v_{\tau(2)}$ o último termo a ser considerado;

v. e assim sucessivamente.

(c) Designando por $S_k$ a soma parcial de ordem $k$ da série que acabámos de construir, mostra que, a partir da ordem $\sigma(1)$, $S_k$ vai estar sucessivamente encaixado entre $500 - v_{\tau(1)}$ e $500 + u_{\sigma(1)}$, entre $500 - v_{\tau(1)}$ e $500 + u_{\sigma(2)}$, entre $500 - v_{\tau(2)}$ e $500 + u_{\sigma(2)}$, entre $500 - v_{\tau(2)}$ e $500 + u_{\sigma(3)}$, etc..

(d) Conclui que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 500$.

(e) Porquê 500? Convence-te de que não há nada que nos impeça de fazer uma construção como a que acabámos de descrever (eventualmente começando com a série de termo geral $v_n$ e adaptando convenientemente) mas onde a série obtida convirja para um outro qualquer número real fixado à partida.

(f) Observa, finalmente, que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série que se obtém a partir da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ inicialmente dada através de uma reordenação dos seus termos. A que conclusão extraordinária é que isto tudo nos leva?