Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 5** **2011/12**

---

1. Mostra que é válido o seguinte **critério de comparação** de séries: se existe um $M > 0$ tal que $0 \leq a_n \leq M b_n$ para todo o n a partir de alguma ordem e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então também $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; além disso, no caso de a desigualdade acima se verificar mesmo para todo o n, pode também concluir-se, no caso de convergência, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq M \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. Estuda a natureza das seguintes séries de termos não negativos:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7}{2n^4-n+3}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, 2^{-n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{10}{9}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-3}{\sqrt[3]{n^9+n^2+1}}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, e^{-n}}{2n+3}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n + n^2}{n^4}$ (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}$ (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+\ln n}$ (t) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

3. Dada uma dízima $c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots$, mostra que a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 10^{-n}$ é convergente (informação: designando por x tal soma, dizemos, por analogia com o resultado do exercício 8 da Folha 4, que a dízima dada representa x).

4. Escreve em forma de fração os números representados, de acordo com o exercício anterior, pelas seguintes dízimas:

(a) $0,(3)$ (b) $5,(479)$ (c) $0,(9)$ (d) $3,8(9)$

5. Mostra que é válido o chamado **critério da razão**: se existe um número $r \in]0,1[$ tal que a partir de uma certa ordem se verifica que $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$, então a série de termo geral a_n é convergente; se existe uma ordem a partir da qual $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, então a série de termo geral a_n é divergente.

6. Estuda as seguintes séries quanto à sua natureza:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{10}{9}\right)^{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(n \sin \frac{2}{n}\right)^{2n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n\sqrt{n}} e^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(n \sin \frac{k}{n}\right)^{2n}, \quad |k| \neq 1$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}\, e^{-n}$