1. Sejam $]a,b[$ um intervalo de números reais (podendo a ser $-\infty$ ou b ser $+\infty$) e $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em $]a,b[$. Mostra que se para algum $c \in]a,b[$ os integrais (eventualmente impróprios)
$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$
existirem então também existem para qualquer outra escolha de $c \in]a,b[$. Mostra também que o valor da soma
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
é independente de tais escolhas de c, o que justifica designar-se esse valor por $\int_a^b f(x)\,dx$ mesmo quando f não é integrável (à Riemann) em $[a,b]$ (ver também a questão de compreensão 2 da meta 18).

2. Verifica se os seguintes integrais impróprios convergem e, em caso de convergência, indica o seu valor numérico.
(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$
(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

3. Considera o integral indefinido $F(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\ \ x \in]0,1[$.

   (a) Mostra que F é uma função crescente e que
   $$F(x) \le \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt, \quad \forall x \in]0,1[.$$

   (b) Conclui, com a ajuda da alínea anterior e do exercício 2.(d) acima, que o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ é convergente.

   <u>Informação:</u> Do ponto de vista da questão 8 da meta 17, é o resultado acima que permite dar um sentido a arcsin em 1 e definir, naturalmente, π por
   $$\pi := 2\arcsin 1 := 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

4. Usa o critério do integral para provares que qualquer série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ com $\alpha > 1$ é convergente.

   <u>Nota:</u> Embora o critério do integral também permita provar a divergência das séries de Dirichlet quando $\alpha \in]0,1]$, na verdade esta é uma conclusão que sai também facilmente por comparação com a série harmónica, a qual provámos, no exercício 6 da Folha 4, ser divergente (observa, por outro lado, que a divergência no caso de $\alpha \le 0$ é uma simples consequência do facto de o termo geral da série então não convergir para 0).

5. Determina os valores de $s \in \mathbb{R}$ para os quais a série
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^s}$$
é convergente.