1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, uma função integrável e defina-se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ (com a convenção $F(a) = 0$). Chama-se a F o *integral indefinido* de f. Trata-se de uma função contínua, como veremos a seguir:

   (a) Observa que f é limitada e designa por M um majorante de $|f|$.

   (b) Dado um qualquer $x \in [a, b[$ e $h > 0$ suficientemente pequeno (de modo a que $x + h \in [a, b]$), mostra que
   $$0 \leq |F(x + h) - F(x)| = \Big|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\Big| \leq M|h|.$$

   (c) Dado um qualquer $x \in]a, b]$ e $h < 0$ suficientemente grande (de modo a que $x + h \in [a, b]$), mostra, de modo análogo, que também $0 \leq |F(x + h) - F(x)| \leq M|h|$.

   (d) Conclui que F é contínua em qualquer $x \in [a, b]$.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, uma função contínua (logo integrável) e seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ o seu integral indefinido (cf. exercício anterior). Vamos ver que, então, F é uma primitiva de f:

   (a) Mostra que, dado um qualquer $x \in [a, b]$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $|h|$ seja suficientemente pequeno positivo (de modo a que $x + h \in [a, b]$ – no caso dos extremos considerando somente $h < 0$ ou somente $h > 0$), existe $c(h)$ no intervalo formado por x e $x + h$ tal que
   $$F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c(h))h.$$
   (Sugestão: usa o Teorema da média para integrais – cf. questão 10 da meta 15).

   (b) Mostra que, qualquer que seja o $x \in [a, b]$,
   $$\lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c(h)) = f(x).$$

   (c) Conclui que F é uma primitiva de f.

   Informação: Este resultado constitui o chamado *Teorema fundamental do cálculo integral*, e até é mesmo possível mostrar que, dada uma qualquer função integrável f em $[a, b]$, para concluir que $F'(x_0) = f(x_0)$ num ponto específico $x_0 \in [a, b]$ basta supor a continuidade de f nesse mesmo ponto.

3. Conclui a partir do exercício anterior

   (a) que toda a função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, é primitivável nesse intervalo;

   (b) e que, consequentemente, a fórmula de Barrow – cf. expressão (1) da Folha 16 – é válida para tal f.

4. Sejam f contínua em $[a, b]$ e g com derivada contínua em $[a, b]$, com $a < b$. Seja F uma primitiva de f em $[a, b]$. Aplica a $(F(x)g(x))'$, por um lado, a fórmula da derivada do produto e, por outro lado, a fórmula de Barrow e obtém (justificando todas as passagens) a chamada fórmula de *integração por partes*:
   $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

5. Sejam f e φ duas funções tais que $f : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ é contínua e $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tem derivada contínua, onde $a < b$.

   (a) Seja F uma primitiva de f (no intervalo limitado e fechado $\varphi([a,b])$, suposto não degenerado) e recorda que, então, também $F(\varphi(t))$ é uma primitiva de $(f(\varphi(t)))\cdot\varphi'(t)$.

   (b) Aplica a fórmula de Barrow, por um lado, a $(f(\varphi(t)))\cdot\varphi'(t)$ em $[a,b]$ e, por outro lado, a $f(x)$ no intervalo de extremos $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ e obtém a chamada fórmula de *integração por substituição* ou *por mudança de variável* (onde se convenciona, no caso $\varphi(a) > \varphi(b)$, que $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,dx$):

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f(\varphi(t)))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

   Observa que a fórmula anterior é também obviamente verdadeira no caso em que $\varphi([a,b])$ é um intervalo degenerado, devido à convenção $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} f(x)\,dx = 0$.

   <u>Observa</u> também que, em contraste com o correspondente método de primitivação por substituição, aqui não é necessário exigir que φ' tenha sinal constante.

6. A partir do momento em que temos à nossa disposição o Teorema fundamental do cálculo integral (cf. exercício 2 acima), estamos finalmente em condições de dar uma definição rigorosa da função *logaritmo natural* (atendendo também a que o encadeamento de resultados que nos permitiu provar esse teorema é completamente independente de qualquer ideia pré-concebida que tivéssemos de tal função e da sua inversa):

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{aligned}$$

   (recordar as convenções $\int_1^1 1/t\,dt = 0$ e, no caso de $x \in \,]0,1[$, $\int_1^x 1/t\,dt = -\int_x^1 1/t\,dt$). Justifica as passagens nas seguintes provas, com base na definição acima, de duas propriedades de ln que nos habituámos a usar:

   (a) Dados $x, y > 0$,

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \ln x + \int_1^y \frac{1}{z}\,dz = \ln x + \ln y.$$

   (b) Dado $x > 0$, $\ln\frac{1}{x} = \int_1^{1/x} \frac{1}{t}\,dt = \int_x^1 \frac{1}{z}\,dz = -\ln x$.

7. A partir do momento em que $\ln x$ está definida em bases rigorosas, e verificando-se que se trata de uma função invertível (pois a sua derivada, sendo, por definição, $1/x$, é positiva), definimos a *exponencial natural* $\exp(x)$ como a inversa do logaritmo natural, com domínio no contradomínio desta última:

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln^{-1}(x). \end{aligned}$$

   Em particular, a continuidade da exp sai da continuidade de ln a partir do Teorema da inversão de funções contínuas.

   (a) Deduz, por seu lado, que $\exp'(x) = \exp(x)$ com base na regra de derivação da função inversa, dada no exercício 10 da Folha 10.

   (b) Justifica as passagens na seguinte prova de que $\lim_{n\to+\infty} \ln\left[(1+1/n)^n\right] = 1$ (resultado a partir do qual sai imediatamente, pela continuidade da exp, a conhecida propriedade $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = \exp(1) =: e$):

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

8. Determina a derivada da função F_j $(j = 1, \ldots, 9)$ dada por:

$$F_1(x) = \int_1^x \ln t \, dt \qquad F_2(x) = \int_{\ln x}^{x^2} \sqrt{1+t^4} \, dt \qquad F_3(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} \, dt$$

$$F_4(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) \, dt \qquad F_5(x) = \int_{x^2+1}^{\sin x} t \cos t \, dt \qquad F_6(x) = x^3 \int_1^x e^{-s^2} \, ds$$

$$F_7(x) = \int_0^x (x-s)e^{-s^2} \, ds \quad F_8(x) = \int_1^x \left(\sin(s^2) + e^{-s^2}\right) ds \quad F_9(x) = \int_{\cos x}^{x^3} \ln(s^2+1) \, ds$$

9. Seja F a função dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2} du \right) dt$. Calcula $F''(x)$.

10. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em $\mathbb{R}$.
Mostra que a função F dada por

$$F(x) = \int_0^{6x-x^2} f(t)dt$$

admite um só extremo no ponto de abcissa $x = 3$. Classifica esse extremo.