Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 15** **2011/12**

---

1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, uma função que assume sempre um mesmo valor constante $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostra, usando a definição, que f é integrável e que $\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$.

   (b) Exprime a área da superfície delimitada pela retas $y = 0$, $y = c$, $x = a$ e $x = b$ em termos do integral de f.

2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, uma função que assume sempre um mesmo valor constante $c \in \mathbb{R}$ em $]a,b[$ mas que pode assumir outros valores em a ou em b.

   (a) Mostra que f é integrável e que $\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$.

   (b) Supõe que os valores de f são todos positivos e exprime a área da superfície acima do eixo dos xx e abaixo do gráfico de f e delimitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ em termos do integral de f.

3. Sejam $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ uma partição de um intervalo $[a,b]$, com $a < b$, e $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Defina-se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $f(a) = c_1$, $f(b) = c_n$, $f(x) = c_i$ se $x \in \,]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \ldots, n$, e $f(x_i)$ igual a c_i ou a c_{i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$. Uma tal função designa-se por *função em escada*. Mostra que f é integrável e que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1}).$$

4. Mostra que a função f definida por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é integrável em nenhum intervalo $[a,b]$ com $a < b$.

5. Sejam f uma função monótona em $[a,b]$, com $a < b$, e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a partição de $[a,b]$ formada por pontos em progressão aritmética. Mostra que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = |f(b) - f(a)|\frac{b-a}{n}$ e conclui que f é integrável.

6. Estuda quanto à integrabilidade, nos respectivos domínios, as seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \in [-1,2] \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 3, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad i(x) = \begin{cases} \tan x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \cos(2x), & x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$j(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [1,5] \setminus \mathbb{Z} \\ x^3 + \ln x, & x \in [1,5] \cap \mathbb{Z} \end{cases}$$

7. Seja $g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$. Mostra que g é integrável em $[-1,2]$ e calcula $\int_{-1}^{2} g(x)\,dx$ com base na interpretação geométrica do integral.

8. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, duas funções integráveis.

   (a) Considera um qualquer $\varepsilon > 0$ e mostra que da hipótese acima sai a existência de $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $\forall$ partição $P := \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ com amplitude $\Delta(P) < \delta_1, \delta_2$, $\forall \xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ compatível com P,

   $$\left|S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \left|S(g, P, \xi) - \int_a^b g(x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   (b) Conclui que $f + g$ é integrável (em $[a, b]$) e que

   $$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

9. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, uma função integrável e $c \in \mathbb{R}$. Tira ideias da estrutura do exercício anterior e mostra que a função $c\, f$ também é integrável (em $[a, b]$) e que

   $$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

   Informação: As propriedades expressas nestes dois últimos exercícios designam-se, em conjunto, por *linearidade do integral*.

10. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, uma função integrável não negativa. Mostra que

   $$\int_a^b f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \geq 0.$$

11. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, com $a < b$, duas funções integráveis tais que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Tira partido dos resultados dos três exercícios anteriores e mostra que

   $$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

   Informação: A propriedade expressa neste último exercício é por vezes referida como a *monotonicidade do integral*.

12. Convencionando que qualquer função definida pelo menos no ponto $a \in \mathbb{R}$ é integrável no intervalo degenerado $[a, a]$, e que $\int_a^a f(x)\, dx = 0$, e convencionando também que $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$ para qualquer função integrável em $[a, b]$, mostra que é possível estender a propriedade da *aditividade do integral* (relativamente ao intervalo de integração) da seguinte maneira:

   Se f é integrável em dois dos intervalos formados pelos pontos a, b, c, então também é integrável no terceiro intervalo e tem-se, além disso, que

   $$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx.$$