1. Calcula:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x+1)}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}\,dx$

2. A corrente i num circuito RCL é dada por

$$i = EC\left(\frac{\alpha^2}{\omega}+\omega\right)e^{-\alpha t}\sin(\omega t).$$

São **constantes** a força electromotriz E, ligada no instante $t=0$, a capacidade C (em farads), a resistência R (em ohms), a indutância L (em henrys),

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C-R^2}}.$$

A carga Q (em coulombs) é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = i,$$

com $Q(0)=0$. Determina a expressão de $Q(t)$.

3. Calcula:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\;dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(3+\ln x)^3}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2}}\,dx$

4. Informação — a seguinte fórmula de recorrência (que pode ser provada com a ajuda da regra de primitivação por partes) poderá (possivelmente conjugada com uma simples mudança de variável) ser útil no cálculo de primitivas de expressões do tipo $\frac{B}{[(x-a)^2+b^2]^n}$, consideradas no método descrito no número 5 desta folha: para $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ e $c \neq 0$,

$$\int \frac{1}{(x^2+c)^n}\,dx \;=\; \frac{1}{c}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+c)^{n-1}}\,dx\right).$$

5. Informação — *método de primitivação de funções racionais*:

No caso de o grau do numerador ser maior que ou igual ao grau do denominador, começamos por efetuar a divisão de polinómios e aplicar a regra de primitivação por decomposição, sendo que uma das parcelas, dada por um polinómio, tem primitiva imediata. Assim, reduzimos o problema ao da primitivação de uma *função racional própria*, i.e., de uma função dada por uma expressão $\frac{f(x)}{g(x)}$ onde o polinómio $f(x)$ tem grau inferior ao grau do polinómio $g(x)$, que tratamos a seguir:

(a) Decompomos o denominador em

$$g(x) = d \cdot (x-r_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x-r_p)^{\alpha_p} \cdot [(x-a_1)^2 + b_1^2]^{\beta_1} \cdot \dots \cdot [(x-a_q)^2 + b_q^2]^{\beta_q},$$

onde $r_1, \dots, r_p$ são as raízes reais de $g(x)$, respetivamente de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, e $a_1 \pm ib_1, \dots, a_q \pm ib_q$ são os pares de raízes complexas conjugadas de $g(x)$, respetivamente de multiplicidades $\beta_1, \dots, \beta_q$.

(b) Por cada fator do tipo $(x-r)^\alpha$ consideramos uma expressão da forma

$$\frac{R_1}{(x-r)^\alpha} + \frac{R_2}{(x-r)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{R_\alpha}{(x-r)}$$

e por cada fator do tipo $[(x-a)^2 + b^2]^\beta$ consideramos uma expressão da forma

$$\frac{A_1x + B_1}{[(x-a)^2 + b^2]^\beta} + \frac{A_2x + B_2}{[(x-a)^2 + b^2]^{\beta-1}} + \dots + \frac{A_\beta x + B_\beta}{[(x-a)^2 + b^2]},$$

onde $R_1, R_2, \dots, R_\alpha, A_1, A_2, \dots, A_\beta, B_1, B_2, \dots, B_\beta$ são constantes a determinar.

(c) Determinamos as constantes anteriores (por exemplo através do método dos coeficientes indeterminados) de modo a que se verifique a igualdade

$$\frac{f(x)}{g(x)} = S,$$

onde S é a soma de todas as expressões que considerámos na alínea anterior (há um resultado de *Álgebra* que nos garante que isto é possível).

(d) Aplicamos a regra de primitivação por decomposição à expressão da alínea anterior.

6. Calcula:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 1}{(2x+1)(x^2+1)}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15}\, dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 14x + 10}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)}\, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2+1)^2}\, dx$