Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 11** **2011/12**

Nota: No que se segue supõe-se, a menos que algo seja referido em contrário, que nenhum intervalo fechado degenera num conjunto singular. Convenciona-se também chamar *regular* em $[a,b]$ a qualquer função contínua em $[a,b]$ que seja diferenciável em $]a,b[$.

1. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a)=f(b)$ e admitindo derivada em todos os pontos de $]a,b[$. Justifica as seguintes afirmações:

   (a) Existe $c\in]a,b[$ onde f atinge o seu máximo ou o seu mínimo.

   (b) Para o c da alínea anterior verifica-se necessariamente que $f'(c)=0$.

   Informação: O resultado contido no exercício anterior designa-se por *Teorema de Rolle*.

2. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua com derivada em $]a,b[$. Mostra que entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f' e que entre dois zeros consecutivos de f' existe no máximo um zero de f.

3. Considera a função dada por $f(x)=3x-3+\sin(x-1)$.

   (a) Calcula $f(1)$.

   (b) Mostra que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.

4. Utiliza o Teorema de Rolle para provares que:

   (a) O polinómio $x^{102}+ax+b$, com $a,b\in\mathbb{R}$, tem no máximo duas raízes reais.

   (b) O polinómio $x^{101}+ax+b$, com $a,b\in\mathbb{R}$, tem no máximo três raízes reais.

5. Seja f uma função regular em $[a,b]$ e considera F uma função definida em $[a,b]$ através de $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

   (a) Verifica que F é também regular em $[a,b]$ e calcula F'.

   (b) Mostra que $F(a)=F(b)$.

   (c) Conclui que existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

   Informação: O resultado contido no exercício anterior designa-se por *Teorema de Lagrange*, *Teorema do valor médio* ou *Teorema dos acréscimos finitos*.

6. Considera a função $f:x\longmapsto y=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x} & , \ x>0\\ \frac{\pi}{2} & , \ x\leq 0\end{cases}$. Justifica as seguintes afirmações:

   (a) f não verifica as condições do teorema de Lagrange em nenhum intervalo de que zero seja ponto interior.

   (b) f verifica as condições do teorema de Lagrange no intervalo $[0,1]$, sendo $c=\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$ a abcissa que permite originar o valor médio do referido teorema.

7. Estuda a diferenciabilidade da seguinte função no ponto 3 através dos limites laterais da derivada, de acordo com um Corolário do Teorema de Lagrange: $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & , \ x>3\\ -x+10 & , \ x\leq 3\end{cases}$

8. Considera novamente a função f do exercício 9.(b) da Folha 10 e verifica que é possível obter o valor de $f'_d(0)$ através do cálculo do limite à direita em 0 da função derivada, de acordo com um Corolário do Teorema de Lagrange, mas que não é possível obter o valor de $f'_e(0)$ através do correspondente cálculo do limite à esquerda em 0 da função derivada. Explica porquê.

9. Sai imediatamente da definição de derivada que toda a função constante num intervalo tem derivada nula. Mostra, com a ajuda do Teorema de Lagrange, que, reciprocamente, qualquer função regular em $[a, b]$ cuja derivada seja nula em $]a, b[$ tem necessariamente que ser uma função constante em $[a, b]$.

10. Como consequência do resultado do exercício anterior, mostra também que se duas funções f e g são regulares em $[a, b]$ e têm em $]a, b[$ a mesma função derivada então f e g diferem uma da outra em $[a, b]$ somente por uma constante.

11. Observando que provar que $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ é equivalente a provar que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$, mostra, com a ajuda do Teorema de Lagrange, que se uma função f é regular em $[a, b]$ e se f' assume somente valores positivos em $]a, b[$ então f é estritamente crescente em $[a, b]$.

12. Partindo de observações correspondentes à feita no início do exercício anterior, mostra que, dada uma função f regular em $[a, b]$,

    (a) se f' assume somente valores negativos em $]a, b[$ então f é estritamente decrescente em $[a, b]$,

    (b) se f' assume somente valores maiores que ou iguais a 0 em $]a, b[$ então f é crescente em $[a, b]$,

    (c) se f' assume somente valores menores que ou iguais a 0 em $]a, b[$ então f é decrescente em $[a, b]$.

13. Calcula os seguintes limites:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ \sin x}{1-\cos x}$

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x\ \text{arccot}\ x)$

14. Diz o que está errado no seguinte cálculo, onde se aplica duas vezes a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0.$$