Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA I **Folha 10** **2011/12**

---

1. Mostra que a derivada de uma função existe num ponto interior do seu domínio se e só se existirem e forem iguais as derivadas laterais dessa função nesse ponto. E que em tal caso a derivada da função é igual ao valor comum das derivadas laterais.

2. Calcula, usando a definição se possível, as derivadas das seguintes funções nos pontos indicados:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x},\ x = 2$

   (b) $f(x) = x^2 - 3x,\ x = 3$

   (c) $f(x) = \ln x,\ x = a \in D_f$

3. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto interior de D. Mostra que se f é diferenciável em a então é aí contínua.

4. Sejam f, g funções diferenciáveis em a. Mostra que então $f \pm g$ e $f \cdot g$ são também diferenciáveis em a e que
$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
Mostra também que se, adicionalmente, $g(a) \neq 0$ então f/g é igualmente diferenciável em a e
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

5. Mostra que se $f_1, \ldots, f_n$ são diferenciáveis em a então o mesmo sucede ao produto $f_1 \cdot \cdots \cdot f_n$ e
$$\begin{aligned}(f_1 \cdot \cdots \cdot f_n)'(a) &= f_1'(a) \cdot f_2(a) \cdot \cdots \cdot f_n(a) + \\ &+ f_1(a) \cdot f_2'(a) \cdot f_3(a) \cdot \cdots \cdot f_n(a) + \cdots + f_1(a) \cdot \cdots \cdot f_{n-1}(a) \cdot f_n'(a).\end{aligned}$$

6. Mostra que, quer n seja um inteiro positivo, quer seja um inteiro negativo, a função potência de expoente n é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e
$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

7. Determina f' em cada um dos casos seguintes:

   (a) $f(x) = e^{\cos x} + x \sin x$

   (b) $f(x) = \frac{1-x}{x^3+2} + 2x$

   (c) $f(x) = (x+5)^4$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada f'.
Explicita o mais possível a derivada de
$$f(-x)\,,\ f(e^x)\,,\ f(\ln(x^2+1))\,,\ f(f(x)).$$

9. Discute a continuidade e a diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x) = e^{-|x|}$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x < 0 \\ \ln(e^x + 1) & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

10. Sejam $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ contínua e injetiva e $f^{-1} : J := f([c, d]) \to \mathbb{R}$ a sua inversa. Supõe que f é diferenciável em $a \in]c, d[$ e que $f'(a) \neq 0$. Justifica porque é que as seguintes afirmações são verdadeiras:

    (a) $b := f(a)$ é um ponto interior do intervalo J.

    (b) Dado qualquer $y \in J \setminus \{b\}$ pode escrever-se

    $$\frac{y - b}{f^{-1}(y) - a} = (g \circ f^{-1})(y), \quad \text{onde} \quad g(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{para} \quad x \in [c, d] \setminus \{a\}.$$

    (c) $a = \lim_{y \to b} f^{-1}(y)$.

    (d) $\lim_{x \to a} g(x) = f'(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

    (e) $y \neq b \Rightarrow f^{-1}(y) \neq a$.

    (f) $\lim_{y \to b} (g \circ f^{-1})(y) = f'(a)$.

    Conclui, finalmente, que

    $$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}$$

    e, em particular, que f^{-1} é diferenciável em b.

11. Mostra, com a ajuda do resultado anterior, que, para $x \in \mathbb{R}^+$, a regra de derivação (1) vale também quando o expoente é da forma $1/n$, isto é, mostra que, para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^+$,

    $$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}.$$

12. Determina as derivadas das funções trigonométricas inversas arcsin, arccos, arctan e arccot.

13. Escreve a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abcissa 4.

14. Determina o máximo e o mínimo absolutos de cada uma das seguintes funções:

    (a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ em $[-2, 1]$

    (b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ em $[-1, \frac{1}{2}]$

    (c) $f(x) = -x^5 + 2$ em $[0, 2]$

    (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ em $[-\frac{1}{2}, 1]$

15. Mostra que se a soma de dois números é constante então a soma dos seus quadrados é mínima quando os números são iguais.