Teste de Matemática A

2017 / 2018

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Seja f uma função periódica de período π.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

(A) $\operatorname{sen} x$

(B) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$

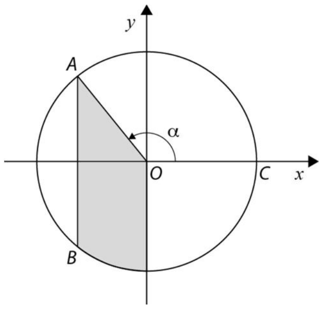
(C) $\cos\ (2x)$

(D) $\operatorname{arcsen} x$

2. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro na origem e raio 2.

Sabe-se que:

- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Oy;
- o ponto C tem coordenadas $(2, 0)$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COA, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.



2.1. Mostre que a área da região a sombreado é dada por:

$$f(\alpha) = 2\alpha - \pi - 4\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$$

2.2. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de α para o qual a área da região a sombreado é máxima.

Reproduza, num referencial, o gráfico da função que visualizar na calculadora e que permite resolver o problema.

Apresente o valor de α arredondado às milésimas.

3. Considere, num referencial o.n. Oxy, dois pontos distintos A e B.

Seja S o conjunto dos pontos P do plano que verificam a condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O conjunto S é a circunferência de diâmetro $[AB]$.

(B) O conjunto S é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

(C) O conjunto S é a reta tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ em B.

(D) O conjunto S é a reta perpendicular à reta AB em A.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $A(-1,0,2)$ e o plano α de equação $3x - y + 2z = 4$.

4.1. Escreva uma equação de um plano que passa no ponto A e é perpendicular ao plano α.

4.2. Escreva a equação reduzida da superfície esférica de centro A tangente ao plano α.

5. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{3n+2}{n+4}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) 3 é máximo do conjunto de termos da sucessão (u_n).

(B) 1 é mínimo do conjunto de termos da sucessão (u_n).

(C) o conjunto de termos da sucessão (u_n) é majorado mas não minorado.

(D) o conjunto de termos da sucessão (u_n) é minorado mas não majorado.

6. Considere a sucessão (v_n) que verifica $\forall n \in \mathrm{IN}, v_{n+1} = 5 + v_n$.

Sabe-se que a soma dos n primeiros termos desta sucessão é igual a 1085 e que o seu décimo termo é igual a 5.

Determine, por processos analíticos, o valor de n.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	
8	15	15	8	15	20	8	15	**104**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

7. Considere num referencial o.n. Oxy:

- uma reta r de inclinação $150°$;
- uma reta s de inclinação α;

Sabe-se que o quociente entre o declive da reta r e o declive da reta s é igual a $-\frac{2}{3}$.

O valor de $\text{sen}^2\alpha$ é:

(A) $\frac{4}{7}$ **(B)** $\frac{3}{7}$ **(C)** $\frac{81}{93}$ **(D)** $\frac{12}{93}$

8. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido por:

$$(x, y, z) = (1,1,-1) + k_1(2,1,2) + k_2(-1,0,1),\ k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}$$

Seja β um plano paralelo a α.

Qual das condições seguintes pode ser uma equação do plano β?

(A) $2x + y + 2z = -1$

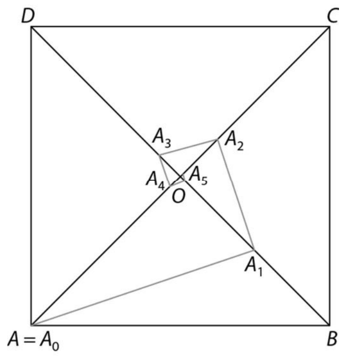
(B) $-x + z = 4$

(C) $x - 4y + z = 2$

(D) $x + y - z = 1$

9. Considere o quadrado $[ABCD]$ e as suas diagonais $[AC]$ e $[BD]$, cujo comprimento é igual a 4 unidades de comprimento.

Considere também a espiral de vértices $A = A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, ...$ como na figura e que distam do ponto O, centro do quadrado, respetivamente, $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$



Seja C_n o comprimento da espiral $A_0A_1 ... A_n$.

9.1. Determine o valor de C_3.

9.2. Mostre que o comprimento da espiral C_n pode ser definido por $2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2^{1-n}$.

9.3. Suponhamos que continuamos indefinidamente a espiral.

Determine o seu comprimento total.

10. Seja (a_n) a sucessão de números reais definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{2-3a_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

10.1. Mostre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{1-3n}$.

10.2. Calcule $\lim \left(a_n \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{2}\right)$.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
7.	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.1.**	**10.2.**	
8	8	15	15	15	20	15	**96**

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (C)

$\cos\big(2(x+\pi)\big) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x)\,, \forall x \in \mathbb{R}$

Note-se que nenhuma das outras funções definidas nas restantes opções admite período π:

$\operatorname{sen}\,(x+\pi) = -\operatorname{sen}\,x, \forall x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{tg}\,\left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right) = \operatorname{tg}\,\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\,\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{-\operatorname{sen}\,\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\,, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

A função definida por $x \mapsto \operatorname{arcsen} x$ não é periódica, pois o seu domínio é um conjunto limitado.

2.

2.1. Sabe-se que:

$A(2\cos\alpha, 2\operatorname{sen}\alpha)$, com $2\cos\alpha < 0$ e $2\operatorname{sen}\alpha > 0$

$B(2\cos\alpha, -2\operatorname{sen}\alpha)$

A área a sombreado é igual à soma da área do triângulo $[OAB]$ com a área do setor circular de amplitude $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times |\text{abcissa de } A|}{2} = \frac{4\operatorname{sen}\alpha \times (-2\cos\alpha)}{2} =$$
$$= -4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

amplitude		área
2π	____________	4π
$\alpha - \frac{\pi}{2}$	____________	x

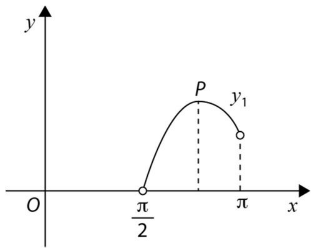
$A_{\text{setor circular}} = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \times 2 = 2\alpha - \pi$

Logo:

$f(\alpha) = 2\alpha - \pi - 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, como se queria demonstrar.

2.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora e a uma janela de visualização adequada, obtém-se:

$y_1 = 2\alpha - \pi - 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$



Seja $P(a, b)$ o ponto de ordenada máxima.

$\alpha \approx 2{,}618$

3. Opção (D)

4.

4.1. Sabe-se que $\vec{n}_\alpha(3,-1,2)$ é um vetor normal ao plano α.

Procura-se um vetor (a,b,c) tal que:

$(a,b,c).(3,-1,2)=0$, isto é:

$3a-b+2c=0 \Leftrightarrow 3a+2c=b$

Assim, se $a=1$ e $c=1$, então $b=5$.

O vetor de coordenadas $(1,5,1)$ é um vetor perpendicular ao vetor $\vec{n}_\alpha$. Assim, um plano perpendicular a α que contém o ponto A pode ser definido por:

$1(x+1)+5(y-0)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow x+1+5y+z-2=0$

$\Leftrightarrow x+5y+z-1=0$

4.2. Considere-se a reta perpendicular ao plano α que contém o ponto A e uma sua equação vetorial:

$$(x,y,z)=(-1,0,2)+k(3,-1,2), k \in \mathbb{R}$$

Então, $(-1+3k,-k,2+2k)$, com $k \in \mathbb{R}$ são as coordenadas de um ponto genérico dessa reta.

Determine-se as coordenadas do ponto T, ponto de interseção dessa reta com o plano α:

$3(-1+3k)-(-k)+2(2+2k)=4 \Leftrightarrow -3+9k+k+4+4k=4$

$\Leftrightarrow 14k=3$

$\Leftrightarrow k=\frac{3}{14}$

Logo, $T\left(-1+\frac{9}{14},-\frac{3}{14},2+\frac{6}{14}\right)$, isto é, $T\left(-\frac{5}{14},-\frac{3}{14},\frac{34}{14}\right)$.

$T\left(-\frac{5}{14},-\frac{3}{14},\frac{34}{14}\right)$ é o ponto onde a superfície esférica é tangente ao plano α.

Logo:

$$r=\|\overrightarrow{AT}\|=\sqrt{\left(-\frac{5}{14}+1\right)^2+\left(-\frac{3}{14}\right)^2+\left(\frac{34}{14}-2\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{81}{196}+\frac{9}{196}+\frac{9}{49}}=$$

$$=\sqrt{\frac{9}{14}}$$

Assim, $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{9}{14}$ é a equação reduzida da superfície esférica pedida.

5. Opção (B)

$$\begin{array}{r|l} 3n+2 & n+4 \\ \cline{2-2} -3n-12 & 3 \\ \cline{1-1} -10 & \end{array}$$

$u_n=3+\frac{-10}{n+4}$

Por um lado:

$$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n + 4 \geq 5, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{10}{n+4} \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$-2 \leq -\frac{10}{n+4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq 3 + \frac{-10}{n+4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por outro lado, $3 - \frac{10}{n+4} < 3, \forall n \in \mathbb{N}$, pois $\frac{10}{n+4} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Provou-se assim que $1 \leq u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Concluímos que 1 é o mínimo do conjunto de termos da sucessão (u_n), 3 não é máximo do conjunto de termos da sucessão (u_n), pois 3 não é termo da sucessão e o conjunto de termos da sucessão (u_n) é minorado e majorado.

6. (v_n) é uma progressão aritmética de razão 5.

Então, $v_n = v_{10} + (n - 10) \times 5$, isto é:

$$v_n = 5 + 5n - 50 \Leftrightarrow v_n = 5n - 45$$

Assim, $v_1 = 5 - 45 = -40$ e tem-se que:

$$\frac{v_1 + v_n}{2} \times n = 1085 \Leftrightarrow \frac{-40 + 5n - 45}{2} \times n = 1085$$

$$\Leftrightarrow (-85 + 5n) \times n = 2170$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 - 85n - 2170 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 17n - 434 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times (-434)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -14 \quad \vee \quad n = 31$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 31$.

Caderno 2

7. Opção (B)

Sabe-se que $m_r = \text{tg}150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $m_s = \text{tg}\alpha$.

Sabe-se, também, que:

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\text{tg}\alpha} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \text{tg}\alpha \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, logo:

$1 + \frac{3}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{7}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{7}$

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, logo:

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{4}{7} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{3}{7}$

8. Opção (C)

Como α e β são paralelos, então os vetores normais a α e β são colineares.

Comece-se por determinar um vetor normal a α.

Seja $\vec{n}_\alpha(a, b, c)$ é um vetor normal a α:

$$\begin{cases} (a,b,c).(2,1,2) = 0 \\ (a,b,c).(-1,0,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 2c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ a = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + b + 2c = 0 \\ a = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4c \\ a = c \end{cases}$$

Os vetores de coordenadas do tipo $(c, -4c, c)$, com $c \in \mathbb{R}$ são normais ao plano α.

Se $c = 1$, por exemplo, $\vec{n}(1, -4, 1)$.

Assim, o plano definido por $x - 4y + z = 2$ é (estritamente) paralelo a α ou coincidente.

Vamos averiguar se o ponto de coordenadas $(1, 1, -1)$ pertence ao plano definido por $x - 4y + z = 2$:

$1 - 4 - 1 = 2 \Leftrightarrow -4 = 2$, que é uma proposição falsa, logo o ponto de coordenadas $(1, 1, -1)$ não pertence ao plano definido por $x - 4y + z = 2$.

O plano β pode ser definido por esta condição.

Nas restantes opções as equações apresentadas definem planos não paralelos a α.

9.

9.1. $C_3 = \overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} =$

$= \sqrt{2^2 + 1^2} + \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} =$

$= \sqrt{5} + \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{5}{16}} =$

$= \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} =$

$= \frac{7\sqrt{5}}{4}$

9.2. Seja (a_n) a sucessão cujos termos são os comprimentos $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, …, $\overline{A_{n-1}A_n}$, ...

$a_n = \overline{A_{n-1}A_n}$

$a_1 = \sqrt{5}$; $a_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $a_3 = \frac{\sqrt{5}}{4}$; …

(a_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo igual a $\sqrt{5}$ e razão $\frac{1}{2}$.

Assim, C_n representa a soma de n termos de uma progressão geométrica:

$$C_n = \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\sqrt{5}(1 - 2^{-n}) =$$

$$= 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2^{1-n}$$

9.3. $\lim C_n = \lim\left(2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2^{1-n}\right) =$

$$= \lim\left(2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}\times 2}{2^n}\right) =$$

$$= 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}\times 2}{+\infty} =$$

$$= 2\sqrt{5} - 0 =$$

$$= 2\sqrt{5}$$

10.

10.1. $P(n): a_n = \frac{2}{1-3n}$

(i) $P(1)$ é verdadeira:

$a_1 = \frac{2}{1-3} \Leftrightarrow -1 = \frac{2}{-2} \Leftrightarrow -1 = -1$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira:

$P(n): a_n = \frac{2}{1-3n}$ (hipótese de indução)

$P(n+1): a_{n+1} = \frac{2}{1-3(n+1)}$ (tese de indução)

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{2-3a_n} \underbrace{=}_{\text{hipótese de indução}} \frac{2\times\frac{2}{1-3n}}{2-3\times\frac{2}{1-3n}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{1-3n}}{2-\frac{6}{1-3n}} = \frac{\frac{4}{1-3n}}{\frac{2-6n-6}{1-3n}} =$$

$$= \frac{4}{-4-6n} = \frac{2}{-2-3n} =$$

$= \frac{2}{1-3(n+1)}$

Por (i) e (ii), pelo princípio de indução matemática, provou-se que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{1-3n}$ é uma proposição verdadeira.

10.2. $\lim \left(a_n \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{2}\right) = \lim \left(\frac{2}{1-3n} \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{2}\right) =$

$$= \lim \frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{1-3n} =$$

$$= \lim \frac{n-(4n-1)}{(1-3n)(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})} =$$

$$= \lim \frac{-3n+1}{(1-3n)(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})} =$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{4n-1}} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$