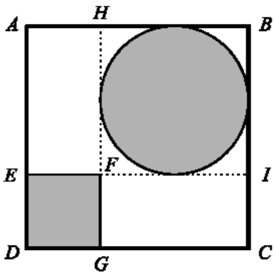
Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática B – 10.º ano

GEOMETRIA NO PLANO E NO ESPAÇO I
Exercícios saídos em exames e testes intermédios

1. Na figura está o primeiro esboço de um logotipo que o João está a construir para o Clube de Matemática da sua escola. Dentro do quadrado [ABCD] estão representados, a sombreado, um círculo e um quadrado [DEFG], nos quais vão ser colocados desenhos alusivos a jogos matemáticos. Na região branca, ou seja, não sombreada, vão ser colocados símbolos matemáticos e texto.



Sabe-se que:• $\overline{AB} = 1$;• o círculo está inscrito no quadrado [FHBI]. Designando por x o lado do quadrado [DEFG], determine o valor de x para o qual a área da região branca é máxima. Apresente o valor pedido, arredondado às centésimas.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

• exprima, em função de x,

- a área do quadrado sombreado,

- o raio do círculo sombreado,

- a área do círculo sombreado,

- a área da região sombreada,

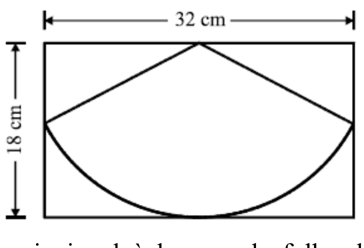
- a área da região branca;

• recorrendo à sua calculadora, determine o valor pedido.

(Teste Intermédio MatB 2006)

2. Pretende-se construir um filtro de forma cónica, com uma capacidade superior a meio litro. Para o efeito, dispõe-se de uma folha de papel de filtro, de forma rectangular, de 32 cm de comprimento e 18 cm de largura.

Na figura, está representado um esquema de uma possível planificação do filtro. Como se pode observar, essa planificação é um sector circular, de raio igual à largura da folha de papel. Averigúe se o filtro construído de acordo com esta planificação tem, ou não, uma capacidade superior a meio litro.



Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

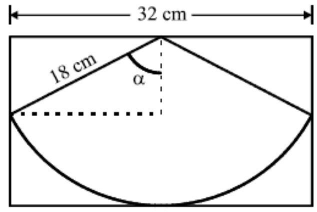
• Determine a amplitude, em radianos, do ângulo α, representado na figura junta.

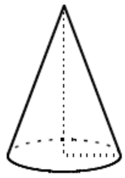
• Determine o perímetro da base do cone.

• Determine o raio da base do cone.

• Determine a altura do cone.

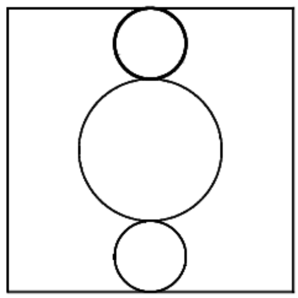
• Determine o volume do cone e responda à questão colocada. (recorde que 1 litro=1000 cm^3)





(Exame Nacional MatB 1ª fase 2006)

3. Pretende-se elaborar um painel publicitário com a forma de um quadrado com 10 metros de lado. O painel deve conter três círculos luminosos, tangentes entre si, como mostra a figura. Relativamente ao painel, considere que:

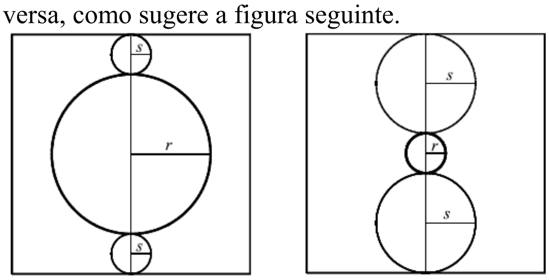


• os diâmetros dos três círculos variam permanentemente e os seus centros estão sempre na mesma mediana do quadrado;

• os círculos nunca saem fora do quadrado;

• os círculos inferior e superior são geometricamente iguais e são tangentes a lados opostos do quadrado;

• quando os diâmetros dos círculos inferior e superior aumentam, diminui o diâmetro do círculo central, e vice-versa, como sugere a figura seguinte.



Sejam s o raio dos círculos inferior e superior e r o raio do círculo central.

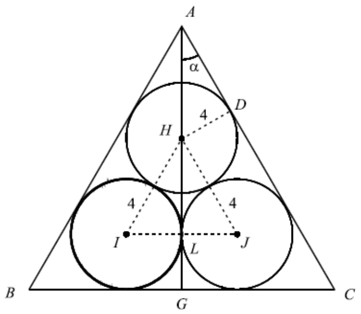
a) Mostre que $s = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}r$

b) Verifique que a soma, A, das áreas dos três círculos, em função de r, é dada por:

$$A(r) = \frac{3}{2}\pi r^2 - 5\pi r + \frac{25}{2}\pi, 0 < r < 5$$

(Exame Nacional MatB 1ª fase 2007)

4. Para vedar três canteiros circulares, com 4 metros de raio cada, um agricultor decidiu colocar uma rede em forma de triângulo equilátero, [ABC] como a figura sugere. Relativa-mente à figura, considere que:



• as circunferências são tangentes entre si;
• os lados do triângulo são tangentes às circunferências;
• os pontos H, I e J são os centros das circunferências;
• G é o ponto médio de [BC];
• D é ponto do lado [AC] tangente à circunferência de centro H;
• L é ponto de tangência das circunferências de centros I e J, respectivamente;
• α é a amplitude do ângulo DAH.

Quantos metros da rede mencionada necessita, aproximadamente, o agricultor para vedar os três canteiros? Apresente o resultado final arredondado às unidades.

Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

Sugere-se que:
• determine a altura do triângulo [HIJ];
• determine a altura do triângulo [ABC];
• determine o lado do triângulo [ABC].

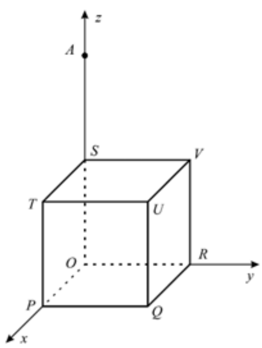
(Exame Nacional MatB 2ª fase 2007)

5. Considere, em referencial o.n. *xOy*, a recta *r* que intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa 2 e que intersecta o eixo *Oy* no ponto de ordenada 6. Qual é a equação reduzida da recta *r* ?

(A) $y = -3x + 6$ (B) $y = 3x + 6$
(C) $y = -2x + 3$ (D) $y = 2x + 3$

(Teste Intermédio MatA 2008)

6. Na figura está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, um cubo [OPQRSTUV]. A aresta [OP] está contida no semieixo positivo *Ox*, a aresta [OR] está contida no semieixo positivo *Oy* e a aresta [OS] está contida no semieixo positivo *Oz*. O ponto U tem coordenadas (2,2,2). No eixo *Oz* está representado um ponto A, cuja cota é 4.



a) Defina, por meio de uma condição, a aresta [UQ]

b) Na figura acima desenhe, a lápis, a secção produzida no cubo pelo plano PQA e, na sua folha de prova, determine o seu perímetro.

(Teste Intermédio MatA 2008)

7. Numa região montanhosa, pretendia-se abrir um túnel em linha recta, unindo dois locais à mesma altitude. Devido à escassez de meios, seguiu-se um processo que era usado na Grécia Antiga. No esquema da figura 1, que não está à escala, a região sombrea-da representa a montanha, e o segmento [AF] o túnel. Este esquema ilustra o processo utilizado: sempre à mesma altitude, uma equipa técnica deslocou-se 750 metros para leste do ponto A, até ao ponto B; do ponto B, deslocou-se 450 metros para norte, até ao ponto C, e assim sucessivamente, até ao ponto F, tal como está indicado na figura. No fim deste processo, a equipa decidiu-se a usar coordenadas cartesianas, para saber que direcção deveriam tomar as escavações. Para esse efeito, imaginou o referencial com origem em A, indicado na figura 2. A unidade usada nos eixos foi o metro. Tendo em conta este referen-cial, responda aos seguintes itens.

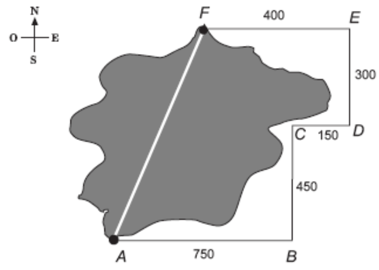


Fig. 1

a) Indique as coordenadas dos pontos assinalados na figura (A, B, C, D, E, F).

b) Determine a equação reduzida da recta AF.

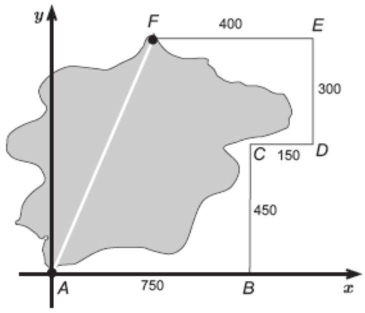
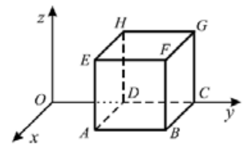


Fig. 2

(Exame Nacional MatB 2ª fase 2007)

8. Na figura está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, um cubo de aresta 2. Sabe-se que:



• a face [ABCD] está contida no plano *xOy*
• a aresta [DC] está contida no eixo *Oy*
• o ponto D tem coordenadas (0,2,0)

Os pontos de coordenadas (0,2,0) e (0,4,0) são vértices do cubo. Qual é o plano mediador do segmento de recta cujos extremos são estes dois vértices?

(A) ABC (B) ACG (C) BDH (D) BCF

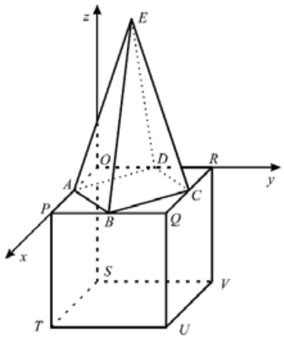
(1.º Teste Intermédio MatA 2009)

9. Num certo prisma, cada uma das bases tem *n* vértices. Quantas faces e quantas arestas tem esse prisma?

(A) *n* faces e 2*n* arestas (B) 2*n* faces e 3*n* arestas
(C) *n*+ 2 faces e 2*n* arestas (D) *n* + 2 faces 3*n* arestas

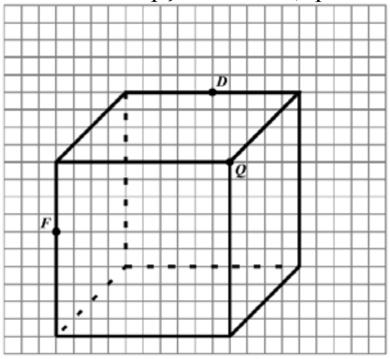
(1.º Teste Intermédio MatA 2009)

10. Na figura está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. A origem do referencial é um dos vértices do cubo, o vértice P pertence ao eixo *Ox* e o vértice R pertence ao eixo *Oy*. Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado [OPQR]. O ponto O tem coordenadas (2,2,0). O volume do sólido é igual a 10.



a) Determine a cota do ponto E.

b) Na figura abaixo está representado o cubo, em papel quadriculado. <u>Nesta figura, desenhe</u>, a lápis, a secção produzida no cubo pelo plano FQD. Em seguida, <u>assinale</u> com um X a opção correcta, quanto à forma da secção.



A secção obtida é um

- ☐ triângulo
- ☐ rectângulo
- ☐ losango
- ☐ trapézio
- ☐ pentágono
- ☐ hexágono

<u>Nota</u>: este item é resolvido no enunciado; por este motivo, escreva o seu nome na primeira página do enunciado e entregue o enunciado em conjunto com a sua folha de respostas.

(1.º Teste Intermédio MatA 2009)

11. Na figura 4 está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, o prisma triangular não regular [ABCDEF].

Sabe-se que:

- as bases são triângulos isósceles ($\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{DE} = \overline{DF}$)
- a base [ABC] está contida no plano *xOy*
- as arestas laterais do prisma são perpendiculares às bases
- o ponto A tem coordenadas (4,0,0)
- o ponto E tem coordenadas (0,3,8)
- o ponto F é o simétrico do ponto E, relativamente ao plano *xOz*

Determine a área lateral do prisma.

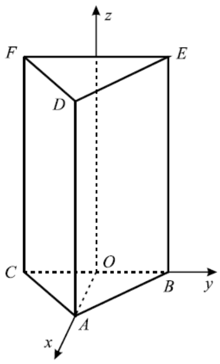


Figura 4

(2.º Teste Intermédio 2009)

12. O *Stomachion*, também conhecido como Caixa de Arquimedes, é um *puzzle* geométrico cuja invenção é atribuída a Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.). É constituído por 14 peças poligonais que formam um quadrado como o representado na figura 1.

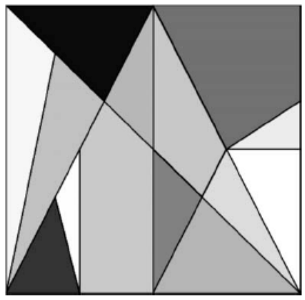


Fig. 1

A figura 2 representa, sobreposto a uma malha quadriculada, um *Stomachion* com <u>12 unidades de lado</u>. Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H são vértices da malha. Fixando um referencial ortogonal e monométrico, de origem D, como se sugere na figura 2, o ponto A tem coordenadas (0, 6).

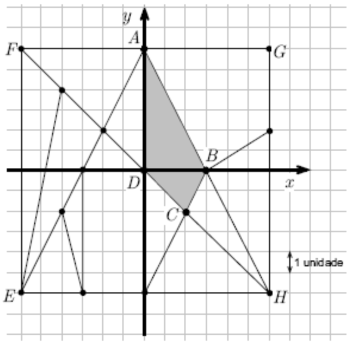


Fig. 2

a) Determine as coordenadas do <u>ponto simétrico</u> de C, relativamente ao eixo das abcissas.

b) Uma das propriedades do *Stomachion* é a seguinte: o quociente entre a área de cada peça e a área total do *Stomachion* é sempre um número racional. Mostre que essa propriedade se verifica com a peça representada, na figura 2, pelo quadrilátero sombreado [ABCD].

<u>Sugestão</u>: Na sua resposta pode percorrer, sucessivamente, as seguintes etapas:

- determine a área do quadrado [EFGH];
- determine a área da peça sombreada;
- determine o quociente entre a área da peça sombreada e a área do quadrado;
- justifique que o quociente obtido é um número racional.

(Exame Nacional MatB 1ª fase 2009)

13. Na figura 2, está representado um quadrado [ABCD], cujos lados têm comprimento *l*. Em cada um dos lados do quadrado, assinalou-se o respectivo ponto médio. Unindo os pontos médios, obteve-se o quadrado [PQRS]. Prove que a área do quadrado [PQRS] é metade da área do quadrado [ABCD], seja qual for o valor de *l*.

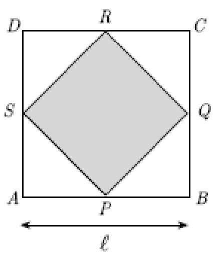


Fig. 2

<u>Sugestão</u>: Poder-lhe-á ser útil começar por decompor o quadrado [ABCD] em quatro quadrados geometricamente iguais.

(Exame Nacional MatB 2ª fase 2009)

14. Os expoentes máximos da arquitectura do antigo Egipto são as pirâmides. Não se conhecem quaisquer registos relativos ao cálculo do volume de uma pirâmide efectuado pelos antigos egípcios.

No entanto, encontrou-se um papiro onde se faz referência a um método para determinar o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular. Esse método corresponde, na notação actual, à seguinte fórmula:

$$V = \frac{1}{3} h \left(a^2 + ab + b^2\right)$$

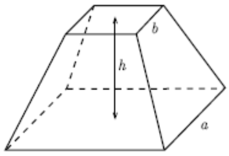


Fig. 1

Na fórmula, *V* representa o volume de um tronco de uma pirâmide quadrangular regular, *h* representa a medida da altura do tronco, e *a* e *b* representam, respectivamente, as medidas do lado da base inferior e do lado da base superior do tronco. A pirâmide de Quéops, a maior do planalto de Gizé, não tem, actualmente, a forma de uma pirâmide. De facto, assemelha-se a um tronco de pirâmide, pois, com o tempo, perdeu a sua cúspide. O monumento tem uma base quadrada com cerca de 230 m de lado. Quando foi construído, teria cerca de 146m de altura. Actualmente, tem cerca de 136m de altura. As figuras 3 e 4, que não estão à escala, representam a situação.

Fig. 2

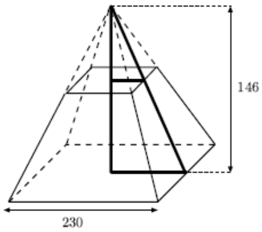


Fig. 3

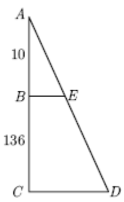


Fig. 4

a) Determine o volume da pirâmide de Quéops, considerando que a sua forma actual corresponde a um tronco de pirâmide quadrangular regular. Para responder ao item, percorra as seguintes etapas:

• mostre que os triângulos [ABE] e [ACD], representados na figura 4, são semelhantes;

• calcule $\overline{BE}$;

• calcule o volume pedido.

Apresente o resultado em metros cúbicos, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

b) Suponha que se queria construir um monumento, para suporte de uma estátua, com a forma de um tronco de pirâmide quadrangular regular que tivesse:

• 175 metros cúbicos de volume;

• 3 metros de altura;

• a base inferior, quadrada, com 10 metros de lado.

Determine a medida exacta, em metros, do lado da base superior do monumento.

(Exame Nacional MatB fase especial 2009)

15. Na figura 1, está representada, num referencial o.n. *xOy*, a recta *r*, que intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa 2 e o eixo *Oy* no ponto de ordenada 2. Qual é a equação reduzida da recta *r* ?

(A) $y = 2x+2$ (B) $y = -2x+2$
(C) $y = -x+2$ (D) $y = x+2$

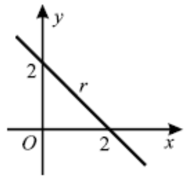


Figura 1

(1.º Teste Intermédio MatA 2010)

16. Uma pirâmide tem 31 vértices. Quantas arestas tem?
(A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60

(1.º Teste Intermédio MatA 2010)

17. Na figura 2, está representada uma planificação de um cubo.

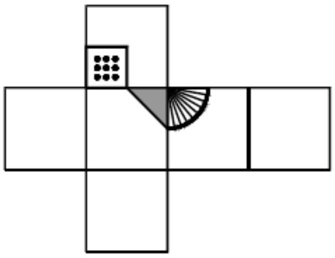
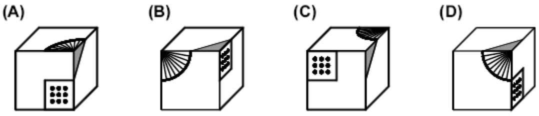


Figura 2

Em qual das opções seguintes pode estar representado esse cubo?

(A) (B) (C) (D)



(1.º Teste Intermédio MatA 2010)

18. Na figura 3, estão representados um triângulo isósceles [ABC] e um quadrado inscrito nesse triângulo. A altura relativa à base [AB] é o segmento de recta [CD], representado a tracejado. Sabe-se que $\overline{AB} = 4$ cm e que $\overline{CD} = 4$ cm. Quanto mede, em centímetros, o lado do quadrado?

(A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{11}{4}$

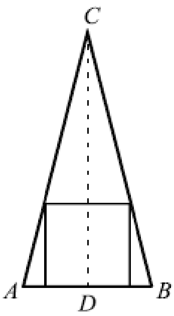


Figura 3

(1.º Teste Intermédio MatA 2010)

19. Na figura 4, está representada, num referencial o.n. *xOy*, a circunferência que tem centro no ponto A(4,7) e que contém o ponto D(8,10). Sabe-se que:

• [CF] é a corda da circunferência contida no eixo *Ox*

• [CD] é uma corda da circunferência, paralela ao eixo *Ox*

• [AE] é um raio da circunferência, paralelo ao eixo *Ox*

• [ABCD] é um trapézio rectângulo.

Determine a área do trapézio [ABCD].

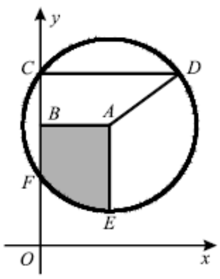


Figura 4

(1.º Teste Intermédio MatA 2010)

20. Na figura 5, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, o cubo [ABCDEFGH] (o ponto H não está representado na figura). Admita que:

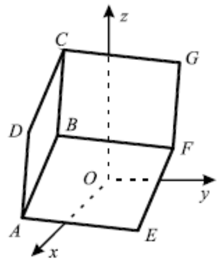


Figura 5

• o ponto A tem coordenadas (11,–1,2)
• o ponto B tem coordenadas (13,2,8)
• o ponto E tem coordenadas (8,5,0)

Determine a área da secção produzida no cubo pelo plano ABG

(1.º Teste Intermédio MatA 2010)

21. Na figura 6, estão representados, num referencial o.n. *Oxyz*, a pirâmide quadrangular regular [VOPQR] e o prisma quadrangular regular [ABCDEFGH]. Sabe-se que:

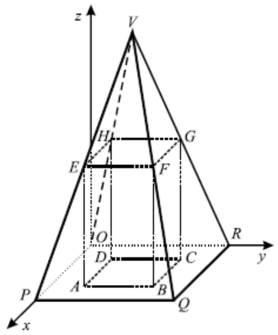


Figura 6

• os vértices P e R da pirâmide pertencem aos eixos coordenados *Ox* e *Oy*, respectivamente;
• uma das bases do prisma está contida na base da pirâmide e cada vértice da outra base pertence a uma aresta da pirâmide.

Preencha cada um dos espaços seguintes, de modo a obter afirmações verdadeiras quanto à posição relativa das rectas e/ou dos planos. Copie as afirmações obtidas para a sua folha de respostas.

As rectas DQ e VF são ....

As rectas EH e .... são não complanares.

A recta PQ e o plano HGB são ....

A recta FQ e o plano ADH são ....

Os planos BQV e .... são perpendiculares.

(1.º Teste Intermédio MatA 2010)

22. A praça principal de uma determinada localidade vai ser remodelada. As obras de remodelação incluem a repavimentação do centro da praça, em calçada portuguesa, utilizando pedra branca e pedra cinzenta. A Figura 1 ilustra, esquema-ticamente, a proposta apresentada para a repavimentação do centro da praça. Na Figura 1 estão representados:

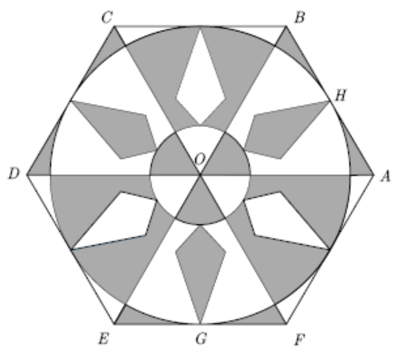


Figura 1

• o hexágono regular [ABCDEF];
• a circunferência inscrita no hexágono, de centro no ponto O e de raio igual a 12 m;
• o ponto G, ponto médio de [EF];
• o ponto H, ponto médio de [AB];
• seis quadriláteros, todos geometricamente iguais.

a) Através de uma rotação de centro no ponto O pode obter-se, a partir do triângulo [EFO], o triângulo [ABO]. Apresente um valor da amplitude, em graus, dessa rotação, justificando a sua resposta.

b) Determine a área, em m^2, da parte representada a sombreado na Figura 1. Apresente o resultado arredondado às décimas. Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, utilize, pelo menos, três casas decimais. Na sua resolução pode percorrer, sucessivamente, as seguintes etapas:
• estabelecer a relação entre a área da parte representada com sombreado e a área da parte representada sem sombreado no hexágono [ABCDEF];
• calcular a área do triângulo [EFO];
• calcular a área pedida.

(Teste Intermédio MatB 2010)

23. Na Figura 2 está representado, num referencial ortogonal e monométrico xOy, um hexágono regular [ABCDEF], cujo centro coincide com a origem do referencial. Considere que:

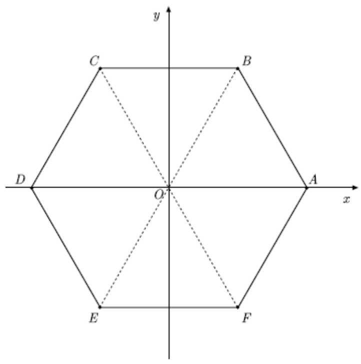


Figura 2

• o ponto A pertence ao semi-eixo positivo das abcissas;
• o ponto B tem coordenadas $(2\sqrt{3}, 6)$.

Determine a abcissa do ponto D. Se utilizar simetrias e/ou propriedades de figuras geométricas para obter o valor pedido, refira-as na sua resposta.
Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, utilize, pelo menos, três casas decimais e, nesse caso, apresente a abcissa do ponto D com três casas decimais.

(Teste Intermédio MatB 2010)

24. Considere, num referencial o.n. *xOy*, a recta *r* que intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa 2 e que intersecta o eixo *Oy* no ponto de ordenada 8. Qual é a equação reduzida da recta *r* ?

(A) $y = -4x+8$ (B) $y = 4x+8$ (C) $y = -2x+4$ (D) $y = 2x+4$

(2.º Teste Intermédio MatA 2010)

25. Na figura 2, estão representados, num referencial o.n. *Oxyz*, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide. A base da pirâmide, [OPQR], está contida no plano *xOy* e coincide com a base inferior do prisma. O ponto W, vértice da pirâmide, coincide com o centro da base superior, [STUV], do prisma. O ponto P tem coordenadas (5,0,0)

Sabe-se que o volume da pirâmide é igual a 75. Determine as coordenadas do ponto W, vértice da pirâmide.

(2.º Teste Intermédio MatA 2010)

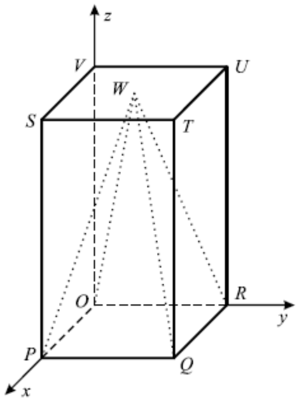


Figura 2

26. A gerência de um hotel de uma zona turística encomendou a um artista plástico um painel decorativo. O painel será composto por uma sequência de dez telas quadradas, espaçadas entre si, todas com 12 decímetros de lado e com diferentes pinturas. A Figura 1 representa as três primeiras telas dessa sequência, ordenadas da esquerda para a direita.

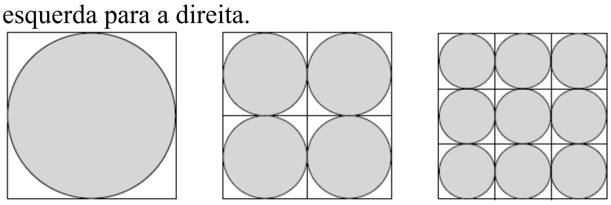


Figura 1

O artista pintou as telas de acordo com o seguinte processo:
• na primeira tela, pintou o círculo inscrito;
• dividiu a segunda tela em quatro quadrados geometricamente iguais, nos quais pintou os quatro círculos inscritos, tal como se vê na figura;
• dividiu a terceira tela em nove quadrados geometricamente iguais, nos quais pintou os nove círculos inscritos, tal como se vê na figura;
• e assim sucessivamente, até à décima tela.

a) Mostre que a área do círculo pintado na primeira tela é igual à soma das áreas dos círculos pintados na segunda tela.

b) Determine o número de círculos pintados na décima tela do painel.

(Exame Nacional MatB 1.ª fase 2010)

27. A Figura 3 representa, esquematicamente, um azulejo com a forma de um quadrado, [ACSP], cujo lado mede 12 centímetros. Este quadrado, de centro O, está subdividido em quatro quadrados geometricamente iguais: [ABOQ], [BCRO], [QOUP] e [ORSU]. Cada um destes quadrados contém, no seu interior, um quarto de círculo, de raio igual a 6 centímetros, que pode, ou não, estar sombreado, tal como se vê na Figura 3.

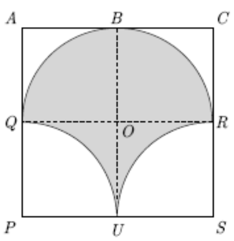


Figura 3

a) Mostre que, no quadrado [ACSP], a área da parte sombreada é igual à área da parte não sombreada.

b) Um friso é constituído por azulejos iguais ao azulejo representado na Figura 3. Na Figura 4, está esquematizado o padrão utilizado na construção de um friso, constituído por quatro desses azulejos, colocado nas paredes de uma sala dos paços do concelho. Os quadrados [CEGS], [PSKM] e [SGIK] podem obter-se, a partir do quadrado [ACSP], utilizando transformações geométricas.

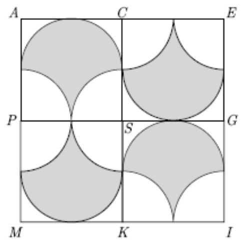


Figura 4

b_1) Designe por I uma rotação que permita obter [CEGS] a partir de [ACSP]. A Figura 5 ilustra a situação. Indique um valor da amplitude e o centro da transformação geométrica I.

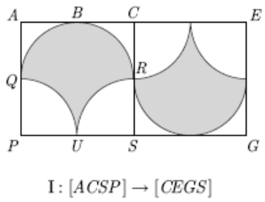


Figura 5

b_2) Designe por II uma simetria axial que permita obter [PSKM] a partir de [ACSP]. A Figura 6 ilustra a situação. Indique o eixo de simetria da transformação geométrica II.

(Exame Nacional MatB 1.ª fase 2010)

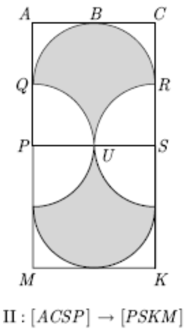


Figura 6

28. Na Figura 5, estão representados os trapézios isósceles [ABJI] e [IJQP], contidos no triângulo [ABO]. O Manuel, num trabalho de Geometria que efectuou para a disciplina de Matemática B, utilizou o facto de os trapézios [ABJI] e [IJQP] serem semelhantes, para relacionar os respectivos perímetros e relacionar as respectivas áreas.

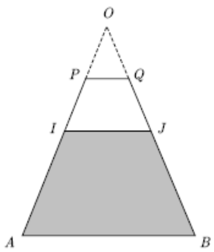


Figura 5

Nesse trabalho, o Manuel afirmou que:

III) o valor da razão de semelhança que permite obter [IJQP] , a partir de [ABJI], é $\frac{1}{2}$

III) o perímetro de [IJQP] é metade do perímetro de [ABJI]

III) a área de [IJQP] é metade da área de [ABJI]

Elabore uma pequena composição, em que:
• indique se a afirmação I é verdadeira ou falsa e justifique a sua escolha;
• indique se a afirmação II é verdadeira ou falsa e justifique a sua escolha;
• indique se a afirmação III é verdadeira ou falsa e justifique a sua escolha.

(Exame Nacional MatB fase especial 2010)

29. Na Figura 2, está representado um cubo de aresta 4. Os pontos A, B e C são vértices da mesma face do cubo. O ponto D pertence a uma das arestas do cubo e $\overline{DC} = 3$. Qual é o valor da área da secção produzida no cubo pelo plano ABD ?
(A) 10 (B) 12 (C) 20 (D) 25

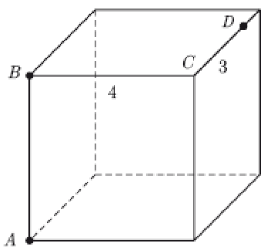


Figura 2

(Teste Intermédio MatA 2011)

30. Na Figura 3, está representado um sólido que se pode decompor no cubo [ABCDEFGH] e na pirâmide triangular não regular [GIJK]. Sabe-se que:
• o cubo tem aresta 6
• o ponto I é o ponto de intersecção do segmento [BK] com a aresta [GF]
• o ponto J é o ponto de intersecção do segmento [DK] com a aresta [GH]
• o ponto G é o ponto médio do segmento [CK]

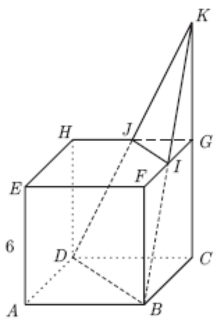


Figura 3

Qual é o valor do volume da pirâmide [GIJK] ?
(A) 36 (B) 27 (C) 18 (D) 9

(Teste Intermédio MatA 2011)

31. Na Figura 7, está representado um cilindro de altura h e raio da base r. Sejam A e B os centros das bases do cilindro. Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento [AB], nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B. Cada posição do ponto P determina dois cones cujos vértices coincidem com o ponto P e cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Mostre que a soma dos volumes dos dois cones é constante, isto é, não depende da posição do ponto P.

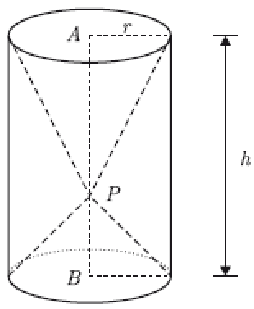


Figura 7

Sugestão – Designe por *a* a altura de um dos cones.

(Teste Intermédio MatA 2011)

32. Almada Negreiros, escritor e artista plástico, concebeu, no final da década de 1950, um conjunto de quadros de natureza abstracta, nos quais a Geometria e o Número são o tema central. A Figura 3 apresenta uma fotografia de um desses quadros, A Porta da Harmonia, um óleo sobre tela, pintado a preto e branco.

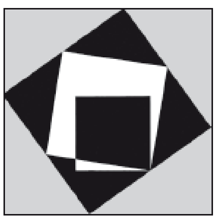


Figura 3

A Figura 4, que não está à escala, mostra uma composição geométrica representativa do quadro, constituída pelos quadrados [OPQR], [ABCD], [EFGH] e [IFJL] e posicionada no primeiro quadrante de um referencial ortogonal e monométrico xOy. Os lados [OP] e [OR] do quadrado [OPQR] estão contidos, respectivamente, no semieixo positivo Ox e no semieixo positivo Oy desse referencial.

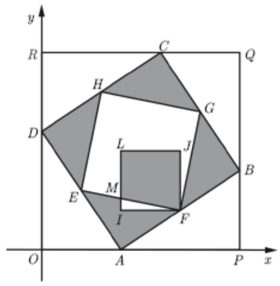


Figura 4

Considere que:
• [ABCD] está inscrito em [OPQR]
• o ponto B tem coordenadas (14, 6)
• o ponto A tem abcissa 6
• os vértices de [EFGH] são os pontos médios dos lados de [ABCD]
• [IFJL] está contido em [ABCD]
• a razão de semelhança entre [EFGH] e [IFJL] é $\sqrt{2}$
• o ponto M é o ponto de intersecção de [EF] com [IL]

a) Mostre que $\overline{AD} = 10$
b) Mostre que o comprimento do lado do quadrado [IFJL] é exactamente metade do comprimento do lado do quadrado [ABCD]
Sugestão – Na sua resposta, poderá começar por calcular o comprimento do lado do quadrado [EFGH] e utilizar a razão de semelhança entre os quadrados [EFGH] e [IFJL] para calcular o comprimento do lado do quadrado [IFJL]
c) Admita que o quadrado [IFJL] pode rodar em torno do ponto F, de modo a IM tomar valores entre 0 e 5, e que, nesse movimento, o triângulo [IFM] se mantém não sombreado. Considere $\overline{IM} = k$. Seja g a função real de variável real definida por g(k)= 75 −5k com 0≤k≤5. Para cada valor de k , a função g permite obter a área da parte da composição representada a sombreado. Existe algum valor de k para o qual a área da parte da composição representada a sombreado corresponda a 40% da área do quadrado [OPQR] ? Justifique a sua resposta.

(Exame Nacional MatB 1.ª fase 2011)

33. A sala principal do teatro municipal encontra-se em obras de remodelação. A Figura 6 representa, esquematicamente, um dos desenhos que será utilizado na redecoração do tecto dessa sala. O contorno exterior do desenho é uma linha poligonal fechada, formada por 12 segmentos de recta geometricamente iguais. A Figura 7 mostra a composição geométrica utilizada na construção dessa linha poligonal, de vértices A, G, B, H, C, I, D, J, E, K, F e L


Figura 6

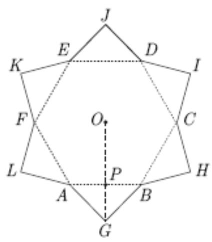


Figura 7

A composição é constituída pelo hexágono regular [ABCDEF], de centro no ponto O, e por seis triângulos rectângulos isósceles, geometricamente iguais, sendo [AGB] um desses triângulos. A hipotenusa de cada triângulo é um dos lados do hexágono. O ponto P é o ponto médio de [AB]

a) Uma rotação é uma transformação geométrica que é caracterizada pelo seu centro e por uma amplitude do ângulo de rotação. Caracterize uma rotação que transforme o quadrilátero [OFLA] no quadrilátero [OBHC]

b) O hexágono regular e os seis triângulos rectângulos isósceles constituem a região delimitada pela linha poligonal fechada.

Determine a área, em dm^2, dessa região, admitindo que $\overline{AB} = 8$ dm. Apresente o resultado arredondado às centésimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

<u>Sugestão</u> – Para obter a área pedida, poderá ter em conta que $\overline{AB} = \overline{BO}$ e começar por mostrar que a altura $\overline{OP}$, em dm, do triângulo [ABO] é $\sqrt{2}$

(Exame Nacional MatB fase especial 2011)

34. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o cubo [OPQRSTUV] de aresta 2.

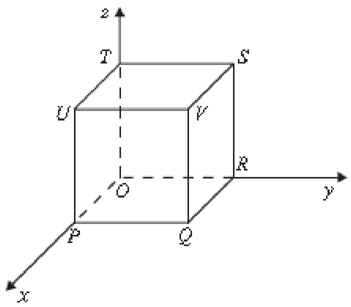


Figura 1

Os pontos, P, R e T pertencem aos semieixos positivos. Numa das opções seguintes estão as coordenadas de um ponto pertencente a uma das arestas do cubo. Em qual?

(A) (1, 1, 2) (B) (1, 2, 0) (C) (0, 1, 1) (D) (1, 1, 1)

(Teste Intermédio MatA 2012)

35. Na Figura 6, está representada uma peça metálica plana na qual se marcou a tracejado um quadrado [ABCD] com 3 dm de lado. Na Figura 7, está representada a peça metálica que se obteve a partir da primeira peça, cortando e retirando o quadrado [EFGH]

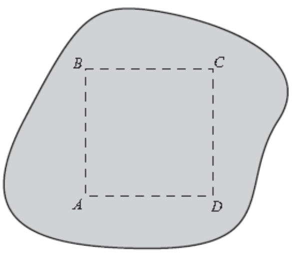


Figura 6

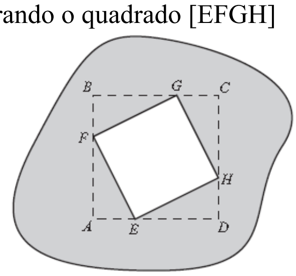


Figura 7

Relativamente à Figura 7, sabe-se que:

• cada vértice do quadrado [EFGH] pertence a um lado do quadrado [ABCD]

• os quatro triângulos retângulos [EDH], [HCG], [GBF] e [FAE] são geometricamente iguais e, em cada um deles, o cateto maior é igual ao dobro do cateto menor.

a) Mostre que a área do quadrado [EFGH] é 5 dm^2

b) Na Figura 8, está representada uma pirâmide quadrangular regular [IJKLV] cuja base tem 45 dm^2 de área e cuja altura é 12dm. Sobre esta pirâmide deixou-se descair a peça metálica representada na Figura 7, de tal modo que esta peça ficou paralela à base da pirâmide e os vértices do quadrado [EFGH] ficaram sobre as arestas laterais da pirâmide. Determine a distância, d , em dm, entre a peça metálica e a base da pirâmide.

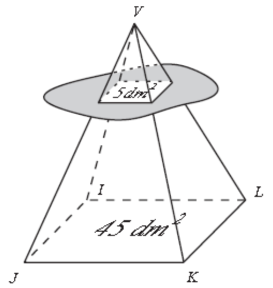


Figura 8

Nota – Admita que a espessura da peça metálica é desprezável e tenha em conta que a área do quadrado [EFGH] é 5 dm^2

(Teste Intermédio MatA 2012)

36. A Figura 6 é uma representação de um desenho da autoria de Leonardo da Vinci, no qual estão assinaladas duas regiões disjuntas, uma a sombreado e outra a tracejado.

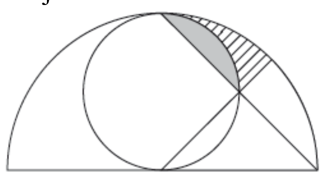


Figura 6

Da Vinci mostrou que estas duas regiões têm exatamente a mesma área. A Figura 7, que não está à escala, mostra uma composição geométrica construída a partir do desenho de Da Vinci, tendo como base o semicírculo ABCE

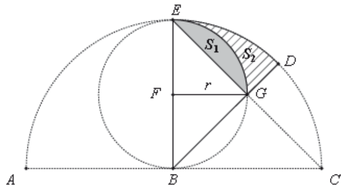


Figura 7

Considere que:

• [AC] é o diâmetro do semicírculo de centro no ponto B

• [BE] é o raio do semicírculo de centro no ponto B, perpendicular a [AC]

• [BE] é um diâmetro do círculo de centro no ponto F

• [FG] é um raio do círculo de centro no ponto F, paralelo a [AC], tal que $\overline{FG} = r$

• D é o ponto de intersecção da semicircunferência de centro no ponto B com a reta BG

• S_1 é a região delimitada pela corda [GE] e pelo arco de circunferência GE

• S_2 é a região delimitada por [GD] e pelos arcos de circunferência GE e DE

a) Mostre que a área de S_1 é exatamente igual à área de S_2, seja qual for o valor de $\overline{BE}$

b) Considere r = 2. Calcule o perímetro de S_2. Apresente o resultado fi nal arredondado às centésimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

(Exame Nacional MatB 1.ª fase 2012)

37. Dois amigos, o Diogo e o Eduardo, criaram um jogo a que chamaram Choque de Triângulos. O jogo é disputado por dois jogadores num tabuleiro retangular. Nesse tabuleiro, estão representados um referencial ortogonal e monométrico xOy, os pontos A e B, de coordenadas (-8, 0) e (0, 8), respetivamente, e o segmento de reta [AB]. Estão também assinalados o primeiro quadrante, com I, e o segundo quadrante, com II, conforme sugere a Figura 1.

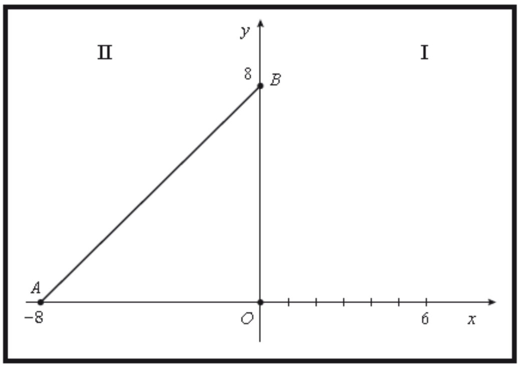


Figura 1

O jogo inicia-se com o sorteio dos quadrantes entre os dois jogadores. De seguida, a partir do lançamento de um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6, são construídos dois triângulos, um no quadrante I e outro no quadrante II. Para se obterem os triângulos, é necessário lançar o dado uma vez e, no referencial representado no tabuleiro, fazer uma construção geométrica, de acordo com os passos seguintes:

• marcar, no eixo Ox, o ponto P de abcissa igual ao número inscrito na face que ficar voltada para cima no lançamento do dado;

• traçar a reta r, perpendicular a [AB] e que passa no ponto P

• marcar o ponto M, ponto de intersecção de r com [AB]

• marcar o ponto N, ponto de intersecção de r com o eixo Oy

• sombrear os triângulos [MNB] e [NOP]

Depois, calculam-se as áreas dos triângulos [MNB] e [NOP] e comparam-se os respetivos valores. Ganha o jogador que, no sorteio, tenha ficado com o quadrante em que se obtiver o triângulo de maior área. 1.

A Figura 2 ilustra a representação geométrica obtida num jogo em que saiu o número 3 no lançamento do dado.

Obtenha a equação reduzida da reta r representada no referencial do tabuleiro da Figura 2.

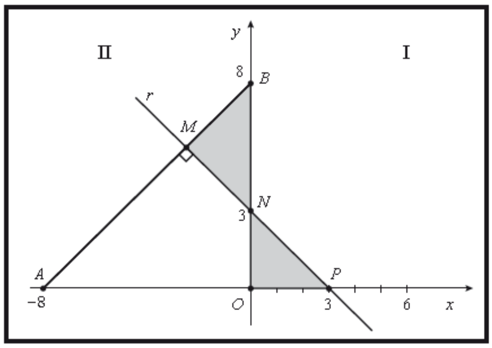


Figura 2

(Exame Nacional MatB 2.ª fase 2012)

38. Um octaedro cujas faces sejam oito triângulos equiláteros é um dos cinco sólidos platónicos.

a) Na Figura 1, encontra-se representado, num referencial ortogonal e monométrico Oxyz, o octaedro regular [ABCDEF], cujos vértices pertencem aos eixos coordenados. Os pontos A e B pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy. O ponto E tem coordenadas (0, 0, 5)

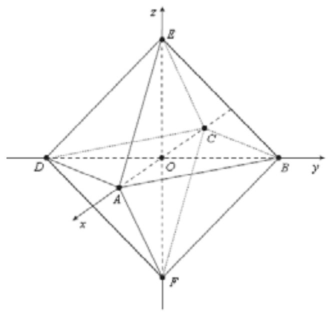


Figura 1

Escreva as coordenadas do ponto simétrico do ponto B em relação à origem do referencial. Justifique a sua resposta.

b) Um octaedro truncado é um poliedro convexo que tem faces que são quadrados e faces que são hexágonos regulares, conforme representado na Figura 2. Para se obter um octaedro truncado, secciona-se um octaedro regular por seis planos. Cada um dos planos é perpendicular a uma diagonal espacial, de forma que as arestas das seis pirâmides obtidas meçam um terço da aresta do octaedro. A Figura 3 ilustra a truncatura de um octaedro de aresta a por dois desses planos.

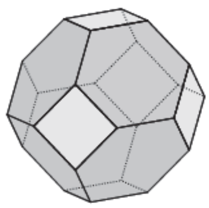


Figura 2

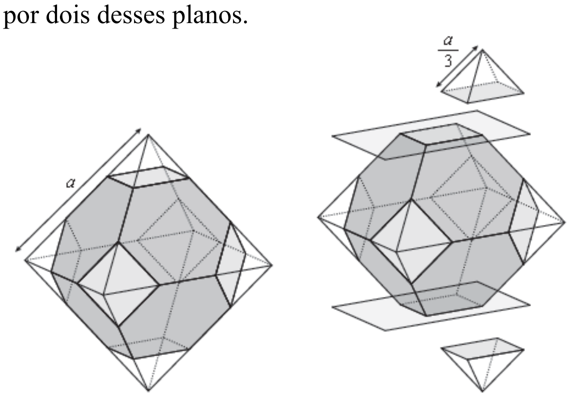


Figura 3

Uma empresa vai lançar um novo perfume, que será comercializado em frascos de espessura desprezável e com a forma de um octaedro truncado. Cada frasco de perfume é obtido por truncatura de um octaedro regular com 100 cm^3 de volume. Determine o volume de cada frasco de perfume. Apresente o resultado, em cm^3, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Sugestão – Na sua resposta, poderá ter em conta que cada uma das seis pirâmides resultantes da truncatura pelos seis planos é semelhante a uma das pirâmides quadrangulares regulares que compõem o octaedro.

(Exame Nacional MatB fase especial 2012)

39. O projeto de arquitetura de um novo edifício público prevê a construção de janelas de vários tipos. Na elaboração do projeto, foi considerada a relação entre a forma geométrica das janelas, a tipologia dos vidros utilizados na sua construção e a intensidade da luz natural pretendida para os espaços interiores do edifício.

O projeto de arquitetura prevê a construção de janelas ogivais, cuja face exterior é delimitada superiormente por dois arcos de circunferência, tal como ilustra a janela apresentada na Figura 3. A Figura 4 mostra um esquema de uma janela desse tipo, no qual se podem observar, além de outros elementos geométricos auxiliares, os segmentos de reta [EA], [AB] e [BC] e os arcos de circunferência CD e DE, que, no seu conjunto, delimitam a face exterior da janela, representada por ABCDE


Figura 3

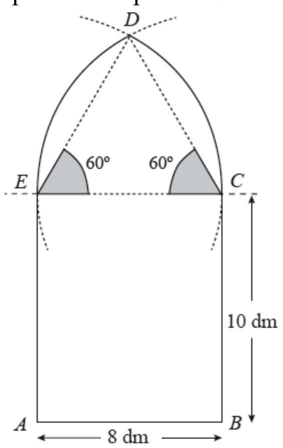


Figura 4

Sabe-se que:

• [ABCE] é um retângulo, no qual $\overline{AB} = 8dm$ e $\overline{BC} = 10dm$

• [ECD] é um triângulo equilátero, contido no plano que contém [ABCE]

• ECD é um sector circular de centro no ponto E, com 60º de amplitude e 8 dm de raio;

• CDE é um sector circular de centro no ponto C, com 60º de amplitude e 8 dm de raio.

a) Determine o perímetro da face exterior da janela, representada por ABCDE. Apresente o resultado em decímetros, arredondado às centésimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

b) Mostre que o valor da área do sector circular ECD, em dm2, arredondado às décimas, é 33,5.

c) Determine a área da face exterior da janela, representada por ABCDE. Apresente o resultado em decímetros quadrados, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais. Note que o valor da área do sector circular ECD, arredondado com uma casa decimal, é 33,5 dm^2.

(Exame Nacional MatB 1.ª fase 2013)

40. Se uma superfície plana for totalmente preenchida com figuras geométricas, de modo a não existirem espaços nem sobreposições entre elas, obtém-se uma pavimentação. Os polígonos regulares são frequentemente usados em pavimentações.

40.1) No âmbito das comemorações do centenário da República Portuguesa, a empresa Correios de Portugal emitiu uma série filatélica dedicada ao Palácio de Belém. A Figura 4 apresenta uma fotografia da Sala das Bicas, reproduzida num dos selos que integram essa série. O chão da sala, em mármore, foi pavimentado com mosaicos octogonais, de cor branca, e com mosaicos quadrados, de cor preta.

Figura 4

a) A Figura 5 mostra um esquema de dois octógonos regulares como os dos mosaicos que pavimentam a Sala das Bicas, com o lado comum [PQ]. No esquema, está assinalado um ângulo interno de um dos octógonos.

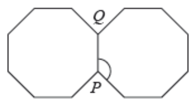


Figura 5

Mostre que, quando se pretende pavimentar uma superfície plana de modo que num ponto concorram apenas três polígonos, todos regulares, dois dos quais são octógonos, então o outro só pode ser quadrado.

b) Os mosaicos brancos utilizados para pavimentar o chão da Sala das Bicas são todos iguais e têm a forma de um octógono regular. Os mosaicos pretos utilizados também são todos iguais e têm a forma de um quadrado. A Figura 6 mostra um esquema, que não está à escala, no qual se apresenta o modo como os mosaicos foram dispostos no chão da sala. A pavimentação foi feita sem que nenhum dos mosaicos brancos tivesse sido cortado; apenas foram cortados alguns dos mosaicos pretos, tal como o esquema ilustra.

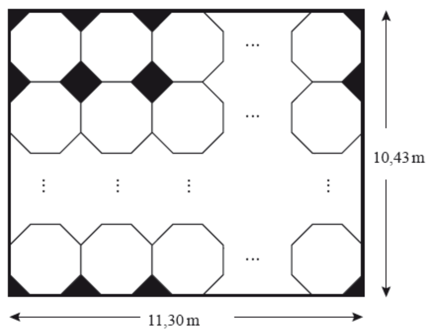


Figura 6

Sabe-se que:
• cada mosaico branco tem 18cm de lado;
• a pavimentação da sala ocupa um retângulo com 11,30m de comprimento e 10,43 m de largura.

b_1) Mostre que, no total, foram utilizados 624 mosaicos brancos na pavimentação do chão da Sala das Bicas. Em cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

b_2) Determine a área total ocupada pelos mosaicos pretos. Apresente o resultado em metros quadrados, arredondado às unidades. Em cálculos intermédios, conserve três casas decimais. Note que o número de mosaicos brancos utilizados na pavimentação do chão da Sala das Bicas é 624.

40.2) Numa pavimentação, foi usado um certo quadrado. Em relação a esse quadrado, sabe-se que são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, pela ordem indicada, os valores correspondentes
• ao comprimento do lado, em centímetros;
• ao perímetro, em centímetros;
• à área, em centímetros quadrados.
Qual é o comprimento, em centímetros, do lado desse quadrado?
Justifique a sua resposta.

(Exame Nacional MatB 2.ª fase 2013)

41. Muitas empresas recorrem à publicidade para divulgarem os seus produtos e serviços. A nova administração de uma empresa de cerâmica decidiu reforçar o investimento em publicidade durante o ano de 2012. Um dos investimentos consistiu na aquisição de um painel publicitário. O projeto de elaboração desse painel previa que, num quadrado, se circunscrevesse um semicírculo, de modo que a área da região exterior ao quadrado e interior ao semicírculo correspondesse a determinados valores. A Figura 5 é um esquema, que não está à escala, dessa parte do projeto. Num referencial ortogonal e monométrico xOy, representou-se o quadrado [PQRS] e o semicírculo de centro no ponto O, circunscrito a esse quadrado.

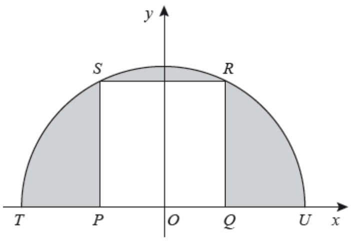


Figura 5

Relativamente ao esquema da Figura 5, no qual a região exterior ao quadrado e interior ao semicírculo se encontra representada a sombreado, sabe-se que:
• [PQ] está contido no eixo Ox
• $\overline{OP} = \overline{OQ}$
• O ponto R tem abcissa x
• $0 < x < 1{,}3$

Admita que cada unidade do referencial corresponde a 1 metro. Mostre que a área, A, em m^2, da região representada a sombreado na Figura 5 pode ser dada, em função de x, por $A(x) = \frac{5\pi - 8}{2} x^2$ para $0 < x < 1{,}3$

(Exame Nacional MatB fase especial 2013)

42. Desde a antiguidade que o Homem utiliza circunferências e círculos na criação de composições geométricas. Para criar o logotipo de um aldeamento turístico, foi considerada uma sequência de circunferências concêntricas, em que o círculo central é branco e, a partir dele, as regiões exteriores a cada uma das circunferências e interiores à circunferência seguinte são, alternadamente, pretas e brancas, sendo a última preta, tal como sugere a Figura 3. O logotipo foi pintado num dos muros do aldeamento e, tal como a Figura 4 ilustra, consiste num quadrado com duas dessas sequências de circunferências concêntricas, uma das quais dividida em duas partes geometricamente iguais. De acordo com o esquema representado na Figura 5, verifica-se que o conjunto I, o conjunto II e o conjunto III são tangentes entre si e cada um deles é tangente a dois lados do quadrado que os circunscreve.

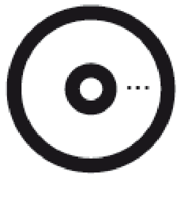


Figura 3

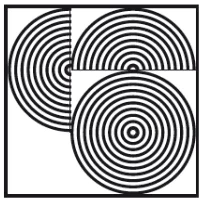


Figura 4

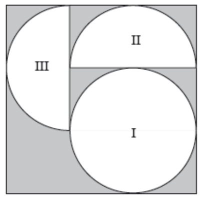


Figura 5

No logotipo pintado no muro do aldeamento:
• o conjunto I tem 20 circunferências concêntricas, que passarão a ser designadas, da menor para a maior: *circunferência um*, *circunferência dois*, …, *circunferência vinte*;
• os raios dessas circunferências estão em progressão aritmética de razão 5cm;
• o círculo central do conjunto I, limitado pela circunferência um, tem 25π cm^2 de área. Determine a área da parte do logotipo pintado no muro do aldeamento correspondente à região exterior aos conjuntos I, II e III, representada a sombreado na Figura 5. Apresente o resultado em m^2, arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

(Exame Nacional MatB 1.ª fase 2014)

43. Considere a composição geométrica apresentada na Figura 7. Nesta figura, estão representados:
• duas circunferências concêntricas de centro no ponto O
• o ponto P, pertencente à circunferência de menor raio;
• a reta tangente à circunferência de menor raio, no ponto P
• o ponto Q, um dos pontos de intersecção da reta tangente à circunferência em P com a circunferência de maior raio;

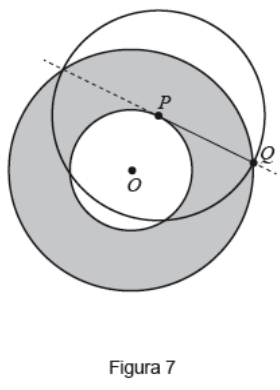


Figura 7

• o segmento de reta [PQ]
• a circunferência de centro no ponto P e raio $\overline{PQ}$

Admita que $\overline{PQ} = a$ e que $\overline{OQ} = b$. Mostre que a área da coroa circular, representada a sombreado na Figura 7, é exatamente igual à área do círculo de centro no ponto P e raio $\overline{PQ}$. Na sua resposta, poderá ser-lhe útil considerar o triângulo [OPQ]

(Exame Nacional MatB 1.ª fase 2014)

44. Os Sangakus são tábuas de madeira, existentes em diversos santuários no Japão, que contêm problemas matemáticos, envolvendo conceitos geométricos. Os Sangakus mais antigos que se conhecem datam do século XVII. A Figura 3 apresenta parte de uma tábua Sangaku. O trabalho elaborado por um dos alunos, representado na Figura 4, consistiu numa pintura alusiva a um dos problemas de uma tábua Sangaku.

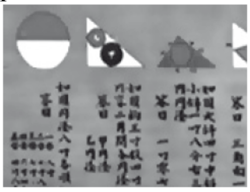


Figura 3

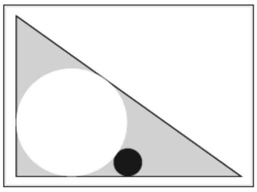


Figura 4

A Figura 5 reproduz um esquema elaborado com base na pintura do aluno. Neste esquema, estão representados, num referencial ortogonal e monométrico xOy :

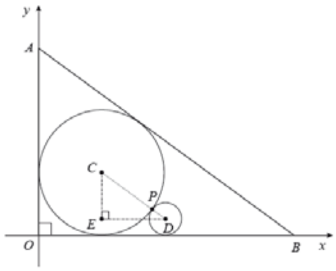


Figura 5

• a circunferência de centro no ponto C, tangente aos eixos coordenados;
• a circunferência de centro no ponto D, tangente ao eixo Ox e tangente, no ponto P, à circunferência de centro C
• os pontos A e B, pertencentes a Oy e Ox, respetivamente, tais que a reta AB é tangente à circunferência de centro C
• o triângulo [AOB]
• o ponto E, interior à circunferência de centro C, tal que [ED]//[OB]
• o triângulo [CED], retângulo em E

O ponto P pertence a [CD] e $\overline{CP} > \overline{PD}$

a) Admita que:

• o triângulo [AOB] é uma ampliação do triângulo [CED], sendo a razão de semelhança igual a 4
• $\overline{CE} = 3$
• $\overline{OB} = 16$

Determine a equação reduzida da reta AB

b) Admita, agora, que os triângulos [AOB] e [CED] não são semelhantes. Sejam r e s os raios das circunferências de centros C e D, respetivamente, tais que r× s = 9. Determine $\overline{ED}$. Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

— escrever $\overline{CE}$ e $\overline{CD}$ em função dos raios das duas circunferências;
— aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo [CED] para calcular $\overline{ED}$

(Exame Nacional MatB 2.ª fase 2014)

Soluções: 1. 0,44 2. Tem 4. 66 5. A 6. x=2∧y=2∧0≤z≤2; 4+4√5 7. y=3/2 x 8. B 9. A
10. 6; trapézio 11. 128 12. (2,2) 14. 2573639; 5 15. C 16. D 17. A 18. C 19. 18 20. 49√2
21. conc., FB, est. paral., conc. e BQV 22. 120°; 249,4 23. -4√3 24. A 25. (5/2,5/2,9) 26. 100
27. 180° e R; PS 28. I e II verd. 29. C 30. D 32. não 33. O e 120°; 262,28 34. B 35. 8
36. 7,45 37. y=–x+3 38. (0,–5,0); 89 39. 44,76; 119 40. 20; 7 42. 2,7 44. Y=-3/4 x+12; 6

O professor: RobertOliveira
Internet: http://roliveira.pt.to