

Notas de Mecânica Estrutural

Torção de Barras Prismáticas

2003/2004

Versão 0.032

J. M. Guedes e H. Rodrigues

**Instituto Superior Técnico
Departamento de Engenharia Mecânica
Lisboa**

Torção de Barras Prismáticas

Neste capítulo considera-se a torção de barras prismáticas para deformações infinitesimais e materiais lineares elásticos homogêneos e isotrópicos.

1 - Torção de barras prismáticas a partir de hipóteses cinemáticas.

Seja a barra prismática de secção constante Ω representada na figura 1, com eixo x_3 alinhado com a geratriz da barra, e eixos x_1 e x_2 passando pelo centro de rotação das secções.

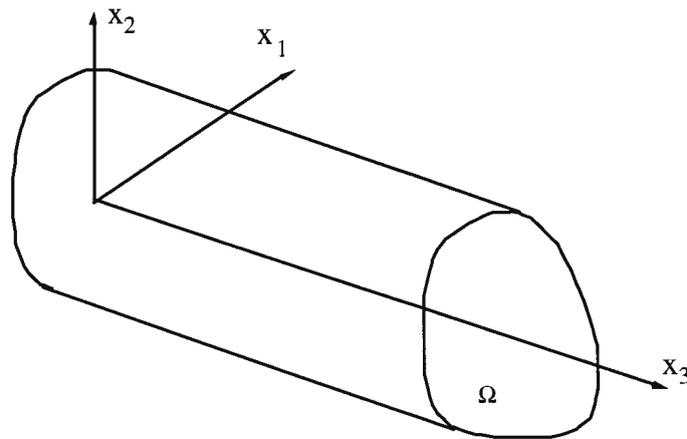


Fig. 3.1 - Barra prismática de secção Ω

Admite-se que a barra torce apenas segundo o eixo x_3 , i.e., só existe momento torsor aplicado segundo este eixo, M_t , não existe qualquer outro tipo de carregamento nas superfícies laterais, não existem forças volúmicas aplicadas, nem forças normais nos topos da barra prismática. Assim, considera-se o seguinte campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\theta x_3 x_2 \\u_2 &= \theta x_3 x_1 \\u_3 &= \theta \phi(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{1}$$

onde θ é o ângulo de rotação por unidade de comprimento, e $\phi(x_1, x_2)$ é a função de empeno da secção. Esta função ϕ traduz apenas o facto de que a secção da barra pode empenar, i.e., pode ter deslocamentos fora do plano $x_1 x_2$.

O tensor das extensões infinitesimais associado a este campo de deslocamentos é dado por:

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\theta}{2} \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \\ 0 & 0 & \frac{\theta}{2} \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\theta}{2} \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) & \frac{\theta}{2} \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Exercício 1: Mostre que para extensões infinitesimais, (θx_3) corresponde a uma rotação de corpo rígido em torno do eixo x_3 (Sugestão: utilizar o tensor das rotações infinitesimais e o vector polar associado).

O campo de tensões associado a este campo de extensões, para materiais lineares elásticos isotrópicos, com constantes elásticas λ e G , é obtido através da lei de Hooke:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G\theta \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \\ 0 & 0 & G\theta \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \\ G\theta \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) & G\theta \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Para satisfazer as equações de equilíbrio estático

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (4)$$

que na ausência de forças volúmicas f se reduzem a:

$$G\theta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad em \ \Omega$$

ou equivalentemente,

$$\Delta \phi = 0 \quad em \ \Omega \quad (5)$$

onde Δ é o operador laplaciano a duas dimensões(i.e., $\Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$)

Exercício 2 - Mostre que as equações de equilíbrio (4) se reduzem a (5).

As condições de fronteira na superfície lateral da barra prismática são por hipótese nulas, i.e.,

$$\mathbf{T} = \mathbf{0} \Leftrightarrow T_i = \sigma_{ij}n_j = 0 \tag{6}$$

onde \mathbf{n} é a normal unitária à superfície lateral, como mostra a figura 2, e σ é o tensor das tensões.

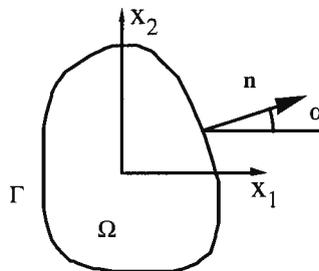


Figura 3.2 - Secção da barra

Obtém-se então:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & G\theta \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \\ 0 & 0 & G\theta \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \\ G\theta \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) & G\theta \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = G\theta \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} - x_2 n_1 + x_1 n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

onde $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} n_2$ e $n_1 = \cos \alpha$, $n_2 = \sin \alpha$

Assim, um problema de torção de barras prismáticas passa pela resolução do seguinte problema apenas na secção da barra Ω com fronteira Γ :

Determinar a função de empeno ϕ , tal que:

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2 & \text{em } \Gamma \end{cases} \tag{8}$$

Nota 1: A função ϕ depende apenas da geometria da secção.

Nota 2: A função ϕ que satisfaz (8) garante que as equações de equilíbrio (4) são satisfeitas bem como as condições de fronteira na superfície lateral da barra.

Uma vez resolvido o problema (8) é então possível caracterizar completamente o estado de tensão. Contudo surge a seguinte questão: Existe alguma relação entre a função ϕ e o momento torsor aplicado? E se existe qual é essa relação?

Para responder a estas questões, note que, até este momento, só se considerou o que se passava no interior da barra e na sua superfície lateral. Vamos então analisar o que se passa nas secções dos topos. Nestas secções a normal exterior é $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_3$ e, conseqüentemente, o vector tensão nessas superfícies é dado por:

$$\{T_i\} = \pm \begin{Bmatrix} G\theta \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \\ G\theta \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Como se pode constatar, não existem tensões normais à secção, conseqüentemente não existem nem esforços normais nem momentos flectores aplicados nessa secção, mas apenas um momento torsor dado por:

$$M_t = \int_{\Omega} (-\sigma_{13}x_2 + \sigma_{23}x_1) d\Omega$$

substituindo (9) na expressão anterior obtém-se,

$$M_t = GD\theta \quad (10)$$

onde D é chamada de rigidez torsional da secção, dada por:

$$D = \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) d\Omega + \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_1 \right) d\Omega = I_p + \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_1 \right) d\Omega \quad (11)$$

onde $I_p = \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) d\Omega$ é o momento polar da secção.

Exercício 3 - Mostre a partir de (9) como obter a expressão (11) para a rigidez torsional da secção.

Exercício 4 - Mostre ainda que as seguintes expressões para D são equivalentes a (11):

$$D = I_p - \int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma = I_p - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega \quad (12)$$

Que conclusão pode retirar acerca do valor máximo possível da constante de rigidez?

Note-se que a constante de rigidez D é só função da geometria da secção e é independente do momento tursor aplicado. O parâmetro que vai depender do momento tursor M_t é o angulo de torção por unidade de comprimento θ , i.e., dado um momento tursor aplicado M_t , tem-se

$$\theta = \frac{M_t}{G D} \quad (13)$$

Assim, para podermos calcular o estado de tensão numa barra prismática sujeita a um momento tursor M_t , é necessário: primeiro, resolver o problema (8) de modo a determinar a função de empeno ϕ ; segundo calcular a rigidez torsional da secção, D . Obtém-se então o seguinte estado de tensão

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{M_t}{D} \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \\ 0 & 0 & \frac{M_t}{D} \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \\ \frac{M_t}{D} \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) & \frac{M_t}{D} \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

o campo de extensões,

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{M_t}{2GD} \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \\ 0 & 0 & \frac{M_t}{2GD} \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \\ \frac{M_t}{2GD} \left(-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) & \frac{M_t}{2GD} \left(x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

e o campo de deslocamentos

$$u_i = -\frac{M_t}{GD} x_3 x_2$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{M_t}{GD} x_3 x_1 \\ u_3 &= \frac{M_t}{GD} \phi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (16)$$

Nota 3 - Embora a função de empeno ϕ dependa apenas da geometria da secção (e não dependa do momento torsor aplicado), a distribuição de tensões, extensões, e campo de deslocamentos dependem de ϕ e do momento torsor, como mostram as expressões (14-16).

Exemplo:

Para uma barra prismática de secção circular (um veio) de raio R , a função de empeno solução do problema (8) é a função constante, pois satisfaz identicamente

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} n_2 = x_2 n_1 - x_1 n_2 = x_2 \frac{x_1}{R} - x_1 \frac{x_2}{R} = 0$$

Assim, D reduz-se a,

$$D = I_p$$

o campo de tensões a,

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_t}{I_p} x_2 \\ 0 & 0 & \frac{M_t}{I_p} x_1 \\ -\frac{M_t}{I_p} x_2 & \frac{M_t}{I_p} x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

o campo de extensões a,

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_t}{2GI_p} x_2 \\ 0 & 0 & \frac{M_t}{2GI_p} x_1 \\ -\frac{M_t}{2GI_p} x_2 & \frac{M_t}{2GI_p} x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

e o campo de deslocamentos vem,

$$u_1 = -\frac{M_t}{GI_p} x_3 x_2$$
$$u_2 = \frac{M_t}{GI_p} x_3 x_1$$
$$u_3 = \frac{M_t}{GI_p} \phi = 0$$

se o deslocamento axial u_3 for nulo para uma secção dada, caso contrário, existe apenas um deslocamento axial constante para toda a barra.

Nota 4: Este exemplo mostra que para barras circulares (veios) a tensão de corte varia linearmente com a distancia ao centro do veio, e é directamente proporcional ao momento torsor aplicado M_t . Além disso, e por comparação com o estado de tensão para uma barra de secção arbitrária (3), é possível constatar que o estado de tensão numa barra qualquer, é idêntico ao da barra circular com um termo correctivo que depende da função de empeno ϕ .

Exercício 5: Mostre que a tensão de corte resultante numa barra circular varia linearmente com a distancia ao centro.

Nota 5: É possível demonstrar que o veio circular é a barra de maior rigidez torsional. Contudo isto só é verdade se a barra for feita de material isotrópico. Se o material da barra não for isotrópico, as equações que aqui se deduziram já não são válidas e é necessário a reformulação total do problema com uma reavaliação das hipóteses efectuadas quanto ao campo de deslocamentos.

Nota 6: No caso de a secção da barra ter buracos, e para materiais isotrópicos, todas as equações deduzidas são válidas, sendo necessário adicionar a condição de fronteira

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2$$

em todos os contornos dos buracos, bem como no contorno exterior.

1.1 Torção de barras prismáticas através do princípio de energia potencial total mínima

O princípio de energia potencial mínimo estabelece que o campo de deslocamentos admissíveis que minimiza a energia potencial total da barra é o campo de deslocamentos devido às forças aplicadas (Ver capítulo dos princípios energéticos, secção 1.3).

Para o caso da barra prismática considera-se que o campos de deslocamentos devido às forças aplicadas é dado por (1), e considera-se um campo de deslocamentos admissível \mathbf{w} da forma:

$$\begin{aligned} w_1 &= -(\theta + \varepsilon\bar{\theta})x_3x_2 \\ w_2 &= (\theta + \varepsilon\bar{\theta})x_3x_1 \\ w_3 &= (\theta + \varepsilon\bar{\theta})(\phi(x_1, x_2) + \beta\bar{\phi}(x_1, x_2)) \end{aligned} \quad (17)$$

onde θ e ϕ são, respectivamente, a rotação por unidade de comprimento e a função de empeno na secção reais, a sobrebarra identifica os campos virtuais correspondentes e ε e β são números reais. Existe ainda um momento torsor M_t aplicado na extremidade $x_3=L$.

Então, atendendo às definições dos campos de extensões infinitesimais (2), a energia potencial total para este caso fica:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\Omega} 2G(2e_{13}^2(\mathbf{w}) + 2e_{23}^2(\mathbf{w})) d\Omega dx_3 - M_t(\theta + \varepsilon\bar{\theta})L = \\ &= 2GL \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(\theta + \varepsilon\bar{\theta}) \left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_1} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(\theta + \varepsilon\bar{\theta}) \left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_2} \right) \right]^2 d\Omega - M_t(\theta + \varepsilon\bar{\theta})L \end{aligned} \quad (18)$$

onde $(\theta + \varepsilon\bar{\theta})L$ é o angulo de rotação na extremidade $x_3=L$.

As condições de estacionaridade da energia potencial total são dadas por:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0, \beta=0} = 0, \quad \forall \bar{\theta} \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} \right|_{\varepsilon=0, \beta=0} = 0, \quad \forall \bar{\phi} \quad (20)$$

ou seja, atendendo ao facto de θ e $\bar{\theta}$ serem constantes, (19) simplifica-se

$$2GL \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\theta \left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right)^2 \right] \bar{\theta} + \left[\frac{1}{2}\theta \left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] \bar{\theta} d\Omega - M_t \bar{\theta} L = 0, \quad \forall \bar{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ G\theta \int_{\Omega} \left[\left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega - M_t \right\} \bar{\theta} L = 0, \quad \forall \bar{\theta}$$

$$\Leftrightarrow M_t = GD\theta \quad (21)$$

com

$$D = \int_{\Omega} \left[\left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega \quad (22)$$

onde D é a constante de rigidez torsional da barra.

Exercício 6: Mostre que esta expressão (22) para a constante torsional da barra é equivalente às expressões (11) e (12). Note que a expressão (22) permite concluir que D é sempre uma constante positiva.

Agora, considerando a segunda condição de estacionarização da energia potencial (20) obtém-se:

$$2GL \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right) \theta \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_1} \right] + \left[\frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right) \theta \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_2} \right] d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left[\left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_1} + \left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_2} \right] d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\phi}$$

que, após integração por partes, se pode escrever,

$$\int_{\Gamma} \left[\left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right) n_1 + \left(x_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right) n_2 \right] \bar{\phi} d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} \right) \bar{\phi} d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\phi}$$

e utilizando o lema fundamental do cálculo das variações, concluir que

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} n_2 = x_2 n_1 - x_1 n_2 & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

Este é um método alternativo de estabelecer as equações que traduzem a deformação à torção de uma barra prismática. Repare que foram apenas deduzidas as mesmas equações que tinham sido estabelecidas por um método mais “clássico”. Note que uma vez calculada a função de empeno ϕ através da equação (8), calculada a constante de rigidez torsional D através de (11) e o ângulo de

rotação por unidade de comprimento θ através de (10), ficam completamente definidos o campo de deslocamentos, o campo de extensões e campo de tensões (14,15,16).

2 – Torção de barras prismáticas a partir da função tensão de Prandtl

Nesta secção introduz-se a torção de barras prismáticas utilizando o conceito de função tensão. Esta maneira de introdução da teoria é um caso particular do método semi-inverso de St. Venant para o estudo da extensão, flexão e torção de barras prismáticas. Uma descrição detalhada deste método pode ser vista em B.M.F. Veubeke "A Course in Elasticity" cap. 6. As hipóteses para este caso são as seguintes:

- Não existe qualquer carregamento aplicado na superfície lateral da barra.
- Nos topos da barra, existe apenas um momento torsor aplicado M_t
- Não existem forças volúmicas aplicadas.

Atendendo a estas hipóteses sobre o carregamento é possível admitir que o estado de tensão num ponto da barra, admitindo o mesmo referencial utilizado na secção 1, é da forma:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13}(x_1, x_2) \\ 0 & 0 & \sigma_{23}(x_1, x_2) \\ \sigma_{13}(x_1, x_2) & \sigma_{23}(x_1, x_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Admitindo que existe a função tensão $\psi(x_1, x_2)$, normalmente designada de Função Tensão de Prandtl, tal que:

$$\sigma_{13} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \sigma_{23} = -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (25)$$

então as equações de equilíbrio (4) são automaticamente satisfeitas.

Exercício 7: Verifique que o estado de tensão (24) dado por (25) satisfaz as equações de equilíbrio (4).

Alem disso, é necessário ainda satisfazer as condições de fronteira na superfície lateral da barra, i.e., as tensões são nulas nessa superfície:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

onde \mathbf{n} é a normal exterior unitária à superfície lateral da barra. Esta condição implica que

$$G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} n_1 - G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} n_2 = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (27)$$

como mostra a figura abaixo,

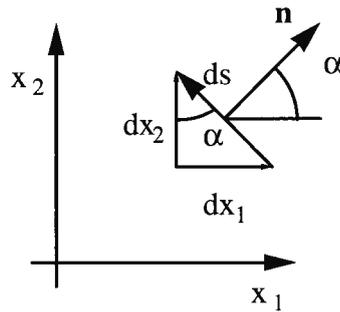


Figura 3.3 - Normal exterior unitária

$$n_1 = \cos \alpha = \frac{dx_2}{ds} \quad \text{e} \quad n_2 = \sin \alpha = -\frac{dx_1}{ds}$$

e a equação (27) fica

$$G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (28)$$

Isto é, a função tensão de Prandtl ψ é constante ao longo da fronteira Γ . Pareceria que, uma vez que o equilíbrio é garantido e as condições de fronteira são satisfeitas, que a função ψ poderia ser arbitrária, contudo tal não sucede pois se atendermos ao estudo feito na secção 1, as tensões eram dadas por (3) e igualando as definições das tensões, obtém-se que:

$$-x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

pelo que,

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-x_1 - \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right) = -2 \quad \text{em } \Omega \quad (29)$$

Nota 7: Na definição do estado de tensão, admitiu-se logo à partida que as tensões vinham multiplicadas por $G\theta$, onde θ é o ângulo de torção por unidade de comprimento, o que não é de todo evidente, contudo, se definisse o estado de tensão por:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x_2} \quad e \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x_1}$$

como seria mais natural, repetindo os cálculos anteriores para Ψ é fácil verificar que

$$\tilde{\Psi} = \text{const. em } \Gamma$$

e

$$\Delta\tilde{\Psi} = -2G\theta \quad \text{em } \Omega.$$

O que, atendendo à linearidade da equação diferencial, permitiria definir imediatamente

$$\tilde{\Psi} = G\theta\psi.$$

Nota 8: A condição (29) não é mais do que uma condição de compatibilidade, i.e., uma condição de que o campo de extensões resultante é integrável de modo a obter um campo de deslocamentos fisicamente admissível. Na realidade esta condição é dedutível directamente das condições de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_2 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1 \partial x_1} = 0$$

que neste caso se simplificam em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) &= 0 & \text{ou} & \quad \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) &= 0 & \text{ou} & \quad \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \end{aligned}$$

resultando que

$$\left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} \right) = Const \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial x_1^2} \right) = Const$$

e, atendendo à linearidade da equação diferencial, e às definições anteriores, conclui-se que $\tilde{\Psi} = G\theta\psi$

Nota 9 – A condição de que ψ seja constante na fronteira Γ , pode, sem perda de generalidade ser substituído por $\psi=0$ na fronteira. Note que nem o estado de tensão, nem a constante de rigidez torsional abaixo definida sofre alteração.

A partir da condição de fronteira nos topos (10) é possível mais uma vez estabelecer a relação entre o momento torsor aplicado M_t , e o ângulo de rotação por unidade de comprimento θ , i.e.,

$$M_t = G\theta D$$

onde a constante de rigidez torsional D é agora dada por:

$$D = - \int_{\Omega} x_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} d\Omega = 2 \int_{\Omega} \psi d\Omega - \psi \Big|_{\Gamma} \int_{\Gamma} x_1 n_1 + x_2 n_2 d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\Omega \quad (30)$$

Exercício 8: Mostre, a partir de (10) e (25) que a rigidez torsional pode ser dada pelas expressões em (30).

Resumindo, para resolver um problema de torção de barras prismáticas utilizando o método da função tensão de Prandtl ψ , temos que resolver o seguinte problema para a secção da barra:

Encontrar a função ψ tal que :

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= -2 && \text{em } \Omega \\ \psi &= 0 && \text{em } \Gamma \end{aligned} \quad (31)$$

Uma vez determinada a função tensão ψ , determina-se a constante de rigidez torsional D através de (30) e finalmente determina-se o estado de tensão existente na secção por:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{M_t}{D} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & -\frac{M_t}{D} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{M_t}{D} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & -\frac{M_t}{D} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

Nota 10 - O método aqui apresentado aplica-se apenas a barras de secção cheia. Contudo este método pode ser generalizado ao caso de secções com buracos, como adiante se verá.

Exercício 9:

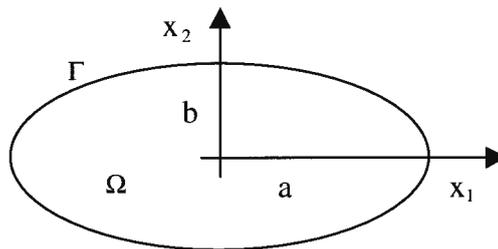
Considere a torção de uma barra circular de raio R. Mostre que a função

$$\psi = \frac{I}{2}(R^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

é uma função tensão de Prandtl. Calcule a rigidez torsional da barra, e mostre que $D=I_p$. Calcule o estado de tensão associado e mostre que a tensão de corte resultante nos topos da barra é radial.

Exemplo:

Considere a torção de uma barra de secção elíptica de semi-eixos a e b , como mostra a figura



A seguinte função tensão de Prandtl para este caso é:

$$\psi = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)$$

é fácil verificar que satisfaz a condição:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -2 && \text{em } \Omega \\ \psi &= 0 && \text{em } \Gamma \end{aligned}$$

A constante de rigidez torsional D é calculada através de (30) obtendo-se:

$$D = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

consequentemente, a distribuição de tensões de corte é:

$$\sigma_{13} = -2G\theta \frac{a^2 x_2}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \sigma_{23} = 2G\theta \frac{b^2 x_1}{a^2 + b^2}$$

ou em termos do momento torsor aplicado M_t

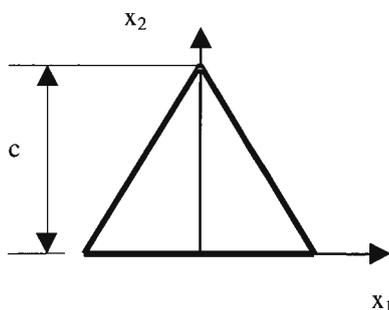
$$\sigma_{13} = -2 \frac{M_t}{D} \frac{a^2 x_2}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \sigma_{23} = 2 \frac{M_t}{D} \frac{b^2 x_1}{a^2 + b^2}$$

A tensão de corte total na secção é dada por:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{2M_t}{\pi ab} \sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4}}$$

Note-se que o valor máximo da tensão de corte ocorre nos pontos $(x_1 = 0, x_2 = \pm b)$, i.e., de todos pontos da periferia da secção, aqueles que tem tensão de corte máxima são os mais próximos do centro!

Exercício 10: Considere uma barra cuja secção é um triângulo equilátero de altura c , como mostra a figura.



Verifique que a função

$$\psi = \frac{1}{2c} (x_2 - c - \sqrt{3}x_1)(x_2 - c + \sqrt{3}x_1)x_2$$

é a função tensão de Prandtl para esta barra. Calcule a constante de rigidez torsional D , Determine a distribuição de tensões na barra. Que pontos da secção terão tensão de corte máxima?

Nota 11: Analogia da membrana. Considere uma membrana elástica fixa na fronteira exterior Γ e sujeita a uma pressão uniforme p no domínio Ω . É possível demonstrar que a deformação vertical w da membrana devido à pressão p é dada pela seguinte equação diferencial:

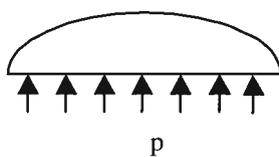


Figura 3.4

$$\Delta w = -\frac{p}{T} \quad \text{em } \Omega$$

e

$$w = 0 \quad \text{em } \Gamma,$$

onde T é a tracção constante por unidade de comprimento existente na membrana. De imediato se verifica que o problema da torção é idêntico a este problema se assumirmos, $p=2$ e $T=1$, i.e., descobrir a função de Prandtl da torção é o mesmo que descobrir qual a deformada de uma membrana com pressão uniforme $p=2$ e sujeita a uma força de tracção $T=1$. Repare-se ainda que as tensões de corte são proporcionais ao gradiente da função ψ , pelo que quanto mais inclinada for a deformada da membrana, maior será a tensão de corte. É ainda possível mostrar que as tensões de corte são tangentes às linhas de nível (linhas $\psi=\text{constante}$) da função ψ . Esta analogia da membrana é muito útil pois podemos utilizar a nossa intuição a partir da deformação de membranas quer para calcular a função tensão ψ , quer ter uma ideia qualitativa da distribuição de tensões.

Exercício 11 : Mostre que a tensão de corte resultante num ponto da secção é tangente às linhas $\psi=\text{constante}$. (Sugestão: note que ao longo de uma curva $\psi=\text{constante}$, se verifica que

$$\frac{d\psi}{dx_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} \quad \text{onde } \frac{dx_2}{dx_1} \text{ é o declive da curva}.$$

2.1 Torção de barras prismáticas através do princípio de energia complementar total mínima

O princípio de energia complementar mínimo estabelece que de todos os campos de tensão que satisfazem equilíbrio, aquele que está associado ao campo de deslocamento admissível é aquele que minimiza a energia complementar da estrutura. (ver capítulo dos princípios energéticos)

Viu-se na secção anterior que é possível gerar campos de tensões que satisfazem as equações de equilíbrio para uma barra prismática sujeita a um momento torsor, utilizando uma função tensão Λ tal que:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G\theta \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & -G\theta \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} \\ G\theta \frac{\partial \Lambda}{\partial x_2} & -G\theta \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\Lambda = \text{constante} \quad \text{em } \Gamma$$

(32)

sendo esta segunda equação a condição que garante que não existem tensões na superfície lateral da barra. Além desta condição existe ainda a condição adicional que relaciona θ com o momento torsor aplicado M_t que provém do equilíbrio de momentos nas secções $x_3=\text{constante}$:

$$M_t = GD\theta \quad (33)$$

Nota 12: Nesta definição as condições de equilíbrio estão garantidas à partida.

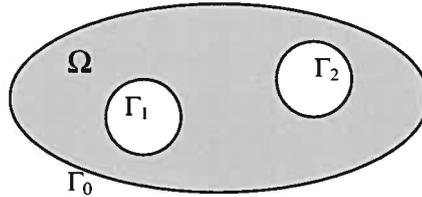


Figura 3.5

Esta situação pode ser generalizada para o caso onde a secção tem buracos, como aquela que se mostra na figura:

Então, neste caso, temos de impor na parte da fronteira Γ dos buracos que a função A também é constante, i.e., satisfaz:

$$A = \alpha_i \text{ em } \Gamma_i, i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

onde α_i é constante. Sem perda de generalidade podemos admitir que $\alpha_0=0$, ficando os outros valores de α_i a determinar posteriormente.

Considerando então variações no campo de tensões obtidos através de.

$$A = \psi + \varepsilon \bar{\psi} \quad (35)$$

onde, nos contornos dos buracos, as funções $\psi = \alpha_i$ e $\bar{\psi} = \bar{\alpha}_i$, com $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = 0$, são constantes.

Assim, aplicando as condições de estacionaridade no funcional de energia complementar obtém-se o princípio das forças virtuais, que no presente caso se reduzem a:

$$\int_0^L \int_{\Omega} \frac{1}{2G} (2\sigma_{13}\bar{\sigma}_{13} + 2\sigma_{23}\bar{\sigma}_{23}) d\Omega dx_3 - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{13}u_1(L) + \bar{\sigma}_{23}u_2(L) d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\sigma} \text{ admissível} \quad (36)$$

onde se admite que na superfície $x_3=0$ a rotação é nula, na superfície $x_3=L$ a rotação é θL , onde

$$\sigma_{13} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \sigma_{23} = -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad \bar{\sigma}_{13} = G\theta \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_2} \quad \bar{\sigma}_{23} = -G\theta \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_1}$$

com $G\theta = \frac{M_t}{D}$, e o campo de deslocamentos real na secção $x_3=L$ é dado por:

$$u_1 = -\theta L x_2 \\ u_2 = \theta L x_1$$

então, substituindo na expressão (36) obtém-se

$$\int_0^L \int_{\Omega} G\theta^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_1} \right) d\Omega dx_3 + \int_{\Omega} G\theta^2 L \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_1} x_1 \right) d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\psi}$$

atendendo que não existe dependência em x_3

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_1} x_1 \right) d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\psi}$$

integrando por partes vem,

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \int_{\Gamma_i} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + x_2 \right) n_2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + x_1 \right) n_1 \right] \bar{\alpha}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + 2 \right] \bar{\psi} d\Omega = 0, \quad \forall \bar{\psi}.$$

Aplicando o lema fundamental do cálculo das variações, conclui-se que:

$$\Delta \psi = -2 \quad \text{em } \Omega \tag{37}$$

$$\int_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + x_2 \right) n_2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + x_1 \right) n_1 d\Gamma = 0, \quad \text{em } \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, n \tag{38}$$

uma vez que $\bar{\psi}$ (e ψ) são constantes sobre os contornos Γ_i . São estas últimas equações que permitem calcular os valores α_i nos contornos. Convém notar que a normal unitária \mathbf{n} é exterior à barra, e portanto aponta para o interior do buraco como se mostra na figura.

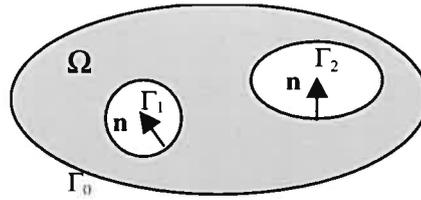


Figura 3.6

As expressões (38) podem ser rescritas considerando $\bar{\mathbf{n}}$ a normal exterior ao buraco (portanto $\bar{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$),

$$\int_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} n_1 \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_i} (x_1 \bar{n}_1 + x_2 \bar{n}_2) d\Omega, \text{ em } \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, n$$

aplicando o teorema da divergência ao termo do lado direito, e designando Ω_i como a área correspondente ao buraco cujo contorno é Γ_i obtém-se a condição de compatibilidade :

$$\Leftrightarrow \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = 2\Omega_i, \text{ em } \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

Nota 13: O facto de ψ ser constante nos buracos, não implica que a sua derivada normal seja nula (apenas a sua derivada tangencial é nula). De notar ainda que as equações (37) e (38) traduzem, como seria de esperar do principio de energia potencial complementar mínimo, condições de compatibilidade. É possível mostrar que as condições (38), ou (39) traduzem condições de compatibilidade para a existência de um deslocamento u_3 fisicamente possível (ver o livro acima referido B.M.F. de Veubeke).

Exercício 12: Mostre que para uma barra com buracos, a rigidez torsional D da barra pode ser dada por:

$$D = 2 \int_{\Omega} \psi d\Omega + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \Omega_i. \quad (40)$$

onde Ω_i são as áreas dos buracos. (Sugestão: Utilize (30) e (39).)

3. Perfis Finos

Vamos agora aplicar os desenvolvimentos anteriores a barras sujeitas à torção em cuja secção uma dimensão (geralmente designada por espessura “ t ”) é muito menor que a outra dimensão (geralmente denominada comprimento “ b ”). Baseados nesta característica geométrica, podemos

simplificar a resolução do problema de torção de Prandtl e obter soluções simples para uma grande variedade de secções.

As soluções assim obtidas pressupõe a hipótese que $b \gg t$ e são válidas no limite em que $\frac{b}{t} \rightarrow \infty$.

Embora obtidos para condições extremas em que $\frac{b}{t} \rightarrow \infty$, estes resultados são boas aproximações no caso em que esta relação não é completamente satisfeita e em termos práticos são aplicáveis para $\frac{b}{t} \geq 10$.

3.1. Perfis Finos Abertos

Considere a secção fina rectangular apresentada na figura 3.7,

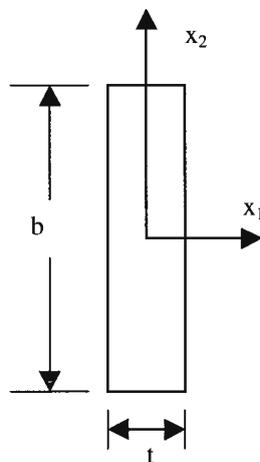


Figura 3.7

No caso em que $b \gg t$, podemos assumir que a Função de Tensão de Prandtl ψ é constante em x_2 isto é $\psi(x_1)$. De modo a visualizar esta hipótese recorreremos à analogia da membrana. Nesta analogia a Função de Tensão é igual à deformada de uma membrana esticada num furo rectangular fixa na fronteira do furo e sujeita a uma pressão “ p ” uniforme.

Com base na aproximação introduzida a equação de Prandtl (37) reduz-se a,

$$\frac{d^2\psi}{dx_1^2} = -2 \quad \text{em } \Omega, \tag{41}$$

com condições de fronteira, $\psi = 0$ para $x = \pm \frac{t}{2}$.

Resolvendo obtemos,

$$\psi(x_1) = -x_1^2 + \frac{t^2}{4}. \quad (42)$$

Uma vez calculada a função de tensão podemos determinar a constante de torção da secção D .

Assim da definição (40) obtem-se,

$$D = 2 \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-t/2}^{t/2} \left(-x_1^2 + \frac{t^2}{4} \right) dx_1 dx_2 = \frac{bt^3}{3}. \quad (43)$$

Nota: Como termo de comparação a constante de torção exacta no caso em que $b/t=10$ é,

$D = 0.312 bt^3$ o que dá um erro de 6.8% se utilizarmos a expressão (43).

Por sua vez, a partir da equação de equilíbrio (33) a rotação θ , por unidade de comprimento, é dada por,

$$\theta = \frac{M_T}{GD} = \frac{3M_T}{G b t^3}. \quad (44)$$

A partir da definições (25) e assumindo o sistema de eixos da figura 3.7, o campo de tensões é dado por,

$$\sigma_{31} = 0 \quad (45)$$

e

$$\sigma_{32} = -G\theta \frac{d\psi}{dx_1} = \frac{6M_T}{bt^3} x_1. \quad (46)$$

Nota: Tendo em conta que só existe uma tensão de corte vamos passar a designá-la por τ .

É de realçar que esta distribuição de tensões é linear ao longo da espessura e o valor máximo da tensão é atingido no bordo e vale,

$$\sigma_{32}^{\max} = \tau^{\max} = \pm \frac{3M_T}{bt^2}. \quad (47)$$

Esta distribuição de tensões é equivalente a um momento distribuído por unidade de comprimento (figura 3.8)

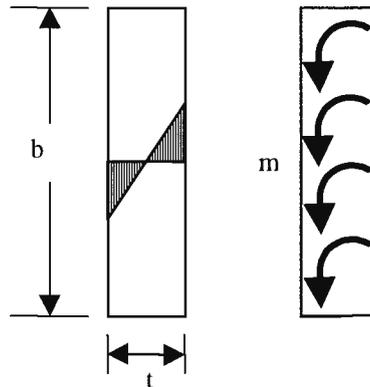


Figura 3.8

Baseados na solução obtida para um perfil fino rectangular podemos obter a constante de torção e a distribuição de tensões de corte para perfis finos abertos obtidos pela composição de vários perfis finos rectangulares.

Assim, recorrendo à definição de constante de torção D (40) e no caso de um perfil composto por “ n ” perfis finos rectangulares temos,

$$D = \sum_{i=1}^n D_i = \sum_{i=1}^n \frac{b_i t_i^3}{3}. \quad (48)$$

Em que b_i e t_i são as dimensões da componente (rectângulo fino) “ i ”.

Por sua vez a tensão de corte máxima em cada rectângulo fino que compõe a secção é determinada a partir do momento torsor associado a cada componente dado por,

$$M_{T_i} = M_T \frac{D_i}{D}.$$

Assim a tensão de corte máxima do componente “ i ” é,

$$\tau_i^{\max} = \frac{M_{T_i}}{D_i} t_i = \frac{M_T}{D} t_i. \quad (49)$$

Por sua vez sendo t_{\max} a espessura máxima na secção a tensão de corte máxima em toda a secção é,

$$\tau^{\max} = \frac{M_T}{D} t_{\max}. \quad (50)$$

3.2. Perfis Finos Fechados Unicelulares

As fórmulas desenvolvidas na secção anterior para perfis finos abertos não podem ser aplicadas a perfis fechados. Este facto baseia-se na forma como cada uma destas secções desenvolve estados de tensão que equilibram o momento torsor aplicado.

No caso dos perfis abertos vimos anteriormente que as tensões de corte variavam linearmente ao longo da espessura e originavam momentos torsores distribuídos “ m ” cuja resultante equilibra o momento torsor aplicado M_t . Como vamos ver no caso de perfis fechados o equilíbrio é conseguido com uma distribuição de esforços internos completamente diferente.

Considere o perfil fino fechado apresentado na figura,

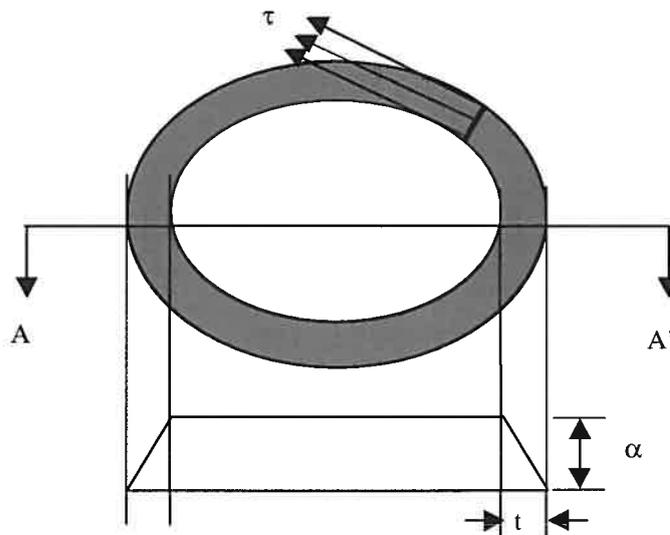


Figura 3.9

O perfil designa-se por unicelular pois só tem um furo.

Dos resultados obtidos na secção 2 sabemos que a Função de Tensão de Prandtl é zero na fronteira exterior e constante com valor α (incógnita) na fronteira interior da secção. Devido à pequena espessura “ t ” vamos considerar que esta função varia linearmente ao longo da espessura entre 0 e α (ver figura 3.9).

Baseados nesta escolha a tensão de corte τ é constante na espessura e vale

$$\tau = G\theta \frac{\alpha}{t} \quad (51)$$

Designado por “ q ” a força tangencial por unidade de comprimento e como α é constante ao longo da fronteira interior (condição de equilíbrio de tensões na fronteira - ver secção 2) temos que,

$$q = \tau t = G\theta\alpha \quad (52)$$

ao longo de Γ , isto é, a força de corte por unidade de comprimento é constante ao longo da secção.

Ao assumirmos uma variação para Ψ no domínio só nos resta calcular a constante α para a função de tensão ficar completamente definida.

A função tensão satisfaz o problema (37, 39). Assim ao assumirmos uma variação para Ψ no domínio a equação (37) no domínio fica automaticamente satisfeita (neste caso com um erro que aceitamos, pois é fácil de verificar que $\Delta\Psi \neq -2$) pelo que a partir da condição de fronteira (39) determinamos α .

Assim, designando por Ω_1 a área do furo temos,

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} \frac{\alpha}{t} d\Gamma = 2\Omega_1 \Rightarrow \alpha = \frac{2\Omega_1}{\oint_{\Gamma} \frac{1}{t} d\Gamma} . \quad (53)$$

Nota: A relação anterior obtida a partir da condição necessária de estacionaridade do Principio da Energia Complementar Mínima é uma condição de compatibilidade do campo de deslocamentos.

Da definição de rigidez de torção da secção em termos da função tensão temos,

$$D = 2 \int_{\Omega} \psi d\Omega + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \Omega_i \quad (54)$$

que no nosso caso vem,

$$D = \oint_{\Gamma} \alpha t \, d\Gamma + 2\alpha \Omega_1$$

No limite com $t \rightarrow 0$ o primeiro termo pode ser desprezado (é um infinitésimo de 2ª ordem em “ t ”) pelo que,

$$D \approx 2\alpha \Omega_1 = \frac{4 \Omega_1^2}{\oint_{\Gamma} \frac{1}{t} d\Gamma} . \quad (55)$$

Exercício: Calcule a constante de torção recorrendo, à expressão (40), para uma secção com $t = const$. E verifique a validade da expressão (55).

Do equilíbrio entre as tensões de corte e o momento torsor (33) temos,

$$M_t = GD\theta \quad (56)$$

Substituindo a expressão para D calculada anteriormente o ângulo θ vem,

$$\theta = \frac{M_t}{4 \Omega_t^2 G} \oint \frac{1}{r t} d\Gamma \quad (57)$$

Podemos agora calcular o valor da tensão de corte τ .

Como sabemos ao impormos que a função tensão varia linearmente (entre o valor 0 na fronteira exterior e α na fronteira do furo), ao longo da espessura do perfil temos,

$$\tau = G\theta \frac{\alpha}{t}. \quad (58)$$

Substituindo θ e α pelas expressões respectivas (58) vem,

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega_t t} \quad (59)$$

Isto é no caso de perfis finos unicelulares, a tensão de corte e máxima ocorre nos pontos de menor espessura t . Exactamente o oposto dos perfis finos abertos.

3.3. Perfis Finos Multicelulares

O caso dos perfis finos multicelulares (múltiplos furos) segue exactamente o mesmo raciocínio do desenvolvimento anterior.

Assim considere os perfil multicelular apresentado na figura 3.10.

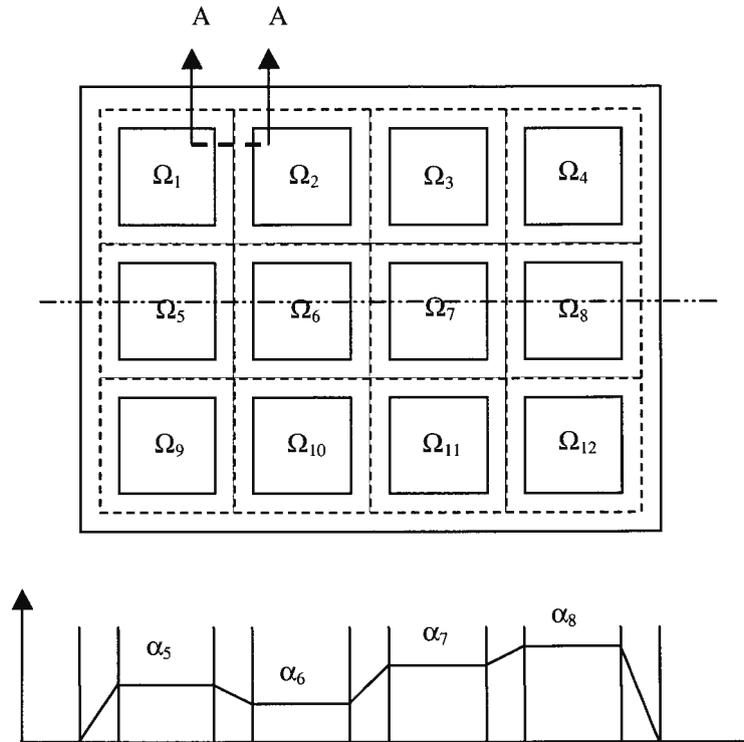


Figura 3.10

Como sabemos a função de Prandtl Ψ é nula na fronteira exterior do perfil, Γ_0 , e constante com valor α_i na fronteira do furo “ i ”, Γ_i . Vamos agora impor a condição de compatibilidade (39) em cada furo $\Omega_{i=1,n}$. Repare que se a nossa secção tiver “ n ” furos vamos ter “ n ” equações de compatibilidade.

No nosso caso vamos impor esta condição num furo genérico “ i ”.

Assim, seja Γ_{mi} a fronteira média (quando $t \rightarrow 0$) que envolve este furo (quando $t \rightarrow 0$ as fronteiras interiores e exterior aproximam-se da fronteira média respectiva).

Por sua vez seja “ m ” o número de furos adjacentes ao furo “ i ”. Sendo “ j ” um destes furos adjacentes, identifica-se por Γ_{mj} a sua fronteira média e por Γ_{ij} a sua fronteira comum com o furo “ i ” i.e., $\Gamma_{ij} = \Gamma_{mi} \cap \Gamma_{mj}$.

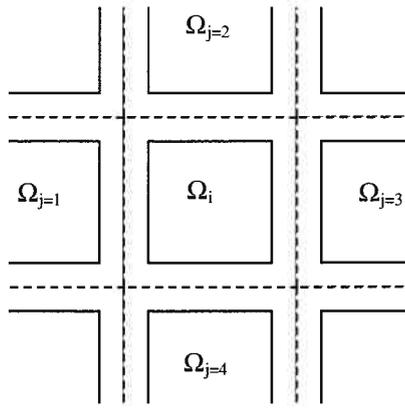


Figura 3.11

A condição e compatibilidade (39) no furo “i” assumindo $t \rightarrow 0$ vem,

$$\oint_{\Gamma_{mi}} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = 2\Omega_i. \quad (60)$$

Ao assumirmos uma variação linear de Ψ ao longo da espessura, a derivada normal na fronteira comum Γ_{ij} é dada por,

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\Gamma_{ij}} = \frac{\alpha_i - \alpha_j}{t} \quad (61)$$

pelo que (60) pode ser reescrita como,

$$\oint_{\Gamma_{mi}} \frac{\alpha_i}{t} d\Gamma - \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_{ij}} \frac{\alpha_j}{t} d\Gamma = 2\Omega_i \quad (62)$$

Como os α 's são constantes obtemos finalmente,

$$\alpha_i \oint_{\Gamma_{mi}} \frac{1}{t} d\Gamma - \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{\Gamma_{ij}} \frac{1}{t} d\Gamma = 2\Omega_i \text{ para } i=1,2,\dots,n. \quad (63)$$

Isto é, obtemos um sistema de n equações lineares em α .

Identificando,

$$C_{ii} = \oint_{\Gamma_{mi}} \frac{1}{t} d\Gamma$$

e

$$C_{ij} = - \int_{\Gamma_{ij}} \frac{1}{t} d\Gamma$$

o sistema linear de equações (63) pode ser escrito em notação matricial como,

$$[C]\{\alpha\} = 2\{\Omega\} \quad (64)$$

em que a matriz $[C]$ é simétrica e denomina-se matriz das flexibilidades de empeno.

No caso da secção representada na figura 3.10, a matriz $[C]$ tem dimensão 12x12, com termos da forma,

$$\begin{aligned} C_{66} &= \oint_{\Gamma_{m6}} \frac{1}{t} d\Gamma, \\ C_{16} &= C_{61} = 0 \\ C_{56} &= - \int_{\Gamma_{56}} \frac{1}{t} d\Gamma \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Uma vez calculados os “ n ” α 's a partir da relação, $\{\alpha\} = 2[C]^{-1}\{\Omega\}$ determina-se a constante de torção da secção D por,

$$D = 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \Omega_i \quad (65)$$

e a recorrendo a condição de equilíbrio (33) a rotação por unidade de comprimento vem dada por,

$$\theta = \frac{M_T}{GD} = \frac{M_T}{2G \sum_{i=1}^n \alpha_i \Omega_i}. \quad (66)$$

Uma vez calculados os α 's e θ podemos determinar a tensão de corte τ ao longo da fronteira Γ_{ij} como,

$$\tau = G\theta \frac{\alpha_i - \alpha_j}{t}. \quad (67)$$

Por exemplo na caso específico da figura (3.12) a tensão de corte na secção A-A é,

$$\tau^{(A-A)} = G\theta \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{t}.$$

3.4. Perfis Finos Híbridos

Entende-se por perfis finos híbridos secções obtidas pela composição de perfis finos abertos e perfis uni ou multicelulares (fechados).

Considere que ao perfil multicelular da figura (3.10), com n furos, se adicionam k perfis rectangulares finos e abertos como mostra a figura (3.12) com dimensões b_i e t_i respectivamente. No caso da figura $n=12$ e $k=4$.

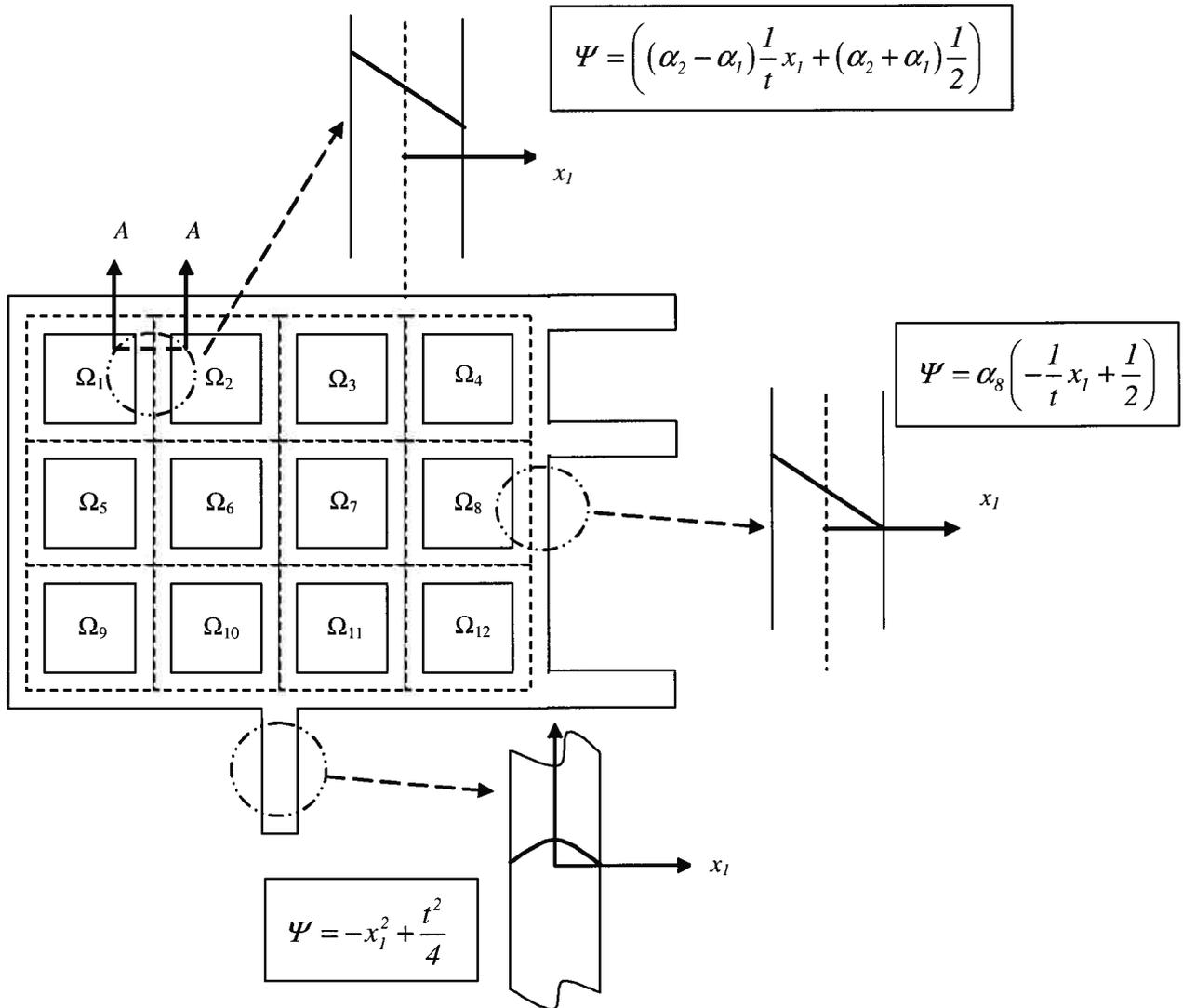


Figura 3.12

Para um perfil arbitrário a constante D é dada por (40),

$$D = 2 \int_{\Omega} \psi d\Omega + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \Omega_i . \quad (68)$$

Recorrendo aos desenvolvimentos feitos nas secções anteriores (3.1- 3) temos,

$$D = \sum_{j=1}^k \frac{b_j t_j^3}{3} + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \Omega_i \quad (69)$$

em que, os α 's são exactamente os mesmos que foram calculados na secção anterior utilizando o sistema de equações (64) e Ω_i são as áreas dos furos circunscritas pelo perímetro médio (linha a tracejado na figura).

Na realidade os α 's são determinados impondo a condição de compatibilidade dos deslocamentos (60) em cada furo, condição esta independente da existência ou não de perfis finos abertos.

Uma vez calculado D , podemos determinar a rotação θ a partir da equação de equilíbrio,

$$M_T = GD\theta \Rightarrow \theta = \frac{M_T}{GD} = \frac{M_T}{G \left(\sum_{j=1}^k \frac{b_j t_j^3}{3} + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \Omega_i \right)} \quad (70)$$

Conhecida a rotação por unidade de comprimento θ , podemos calcular as tensões de corte (recorrendo mais uma vez às definições (25)).

Assim as tensões de corte nos perfis abertos e fechado são dadas respectivamente pelas expressões (46) e (67) mas com D dado pela expressão (69).