

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
SECÇÃO DE ESTRUTURAS

MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Álvaro Azevedo

1996

PREFÁCIO

A matéria leccionada na disciplina de Mecânica dos Sólidos tem-se mantido praticamente inalterada nos últimos anos. Esta estabilidade deve-se ao facto de se tratar de uma matéria nuclear do curso de Engenharia Civil e também por constituir uma introdução clássica ao estudo do comportamento das estruturas. Os três capítulos fundamentais são os relativos aos estados de tensão e de deformação, complementados com o estudo das relações entre tensões e deformações. Com o objectivo de facilitar a exposição destas matérias, é efectuada uma breve introdução ao cálculo tensorial, com especial ênfase na notação indicial e na mudança de referencial. Nesta publicação o ritmo de exposição é propositadamente lento e pormenorizado, de modo a facilitar a um aluno de Licenciatura a apreensão de todos os conceitos expostos, sem ter de recorrer à bibliografia clássica. Esta, por se destinar a leitores mais experientes, apresenta-se quase sempre demasiado compacta e resumida, requerendo uma capacidade de abstracção elevada, que não está ao alcance da generalidade dos alunos.

O índice desta publicação respeita a ordenação de assuntos que tem sido adoptada nos últimos anos pelos docentes da disciplina de Mecânica dos Sólidos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Algumas das matérias aqui expostas baseiam-se nas lições do Prof. Correia de Araújo, que se encontram compiladas no livro “Elasticidade e Plasticidade” (ver a Bibliografia). Os apontamentos da disciplina de Física II da autoria do Prof. Pinho de Miranda, bem como alguns manuscritos dos Profs. Silva Matos e António Arede, constituíram também uma preciosa fonte de informação, que muito facilitou a preparação desta publicação. A todos os meus agradecimentos.

Álvaro Azevedo

Dezembro de 1996

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

1 - INTRODUÇÃO AO CÁLCULO TENSORIAL -----	1.1
1.1 - Notação indicial-----	1.1
1.2 - Definição de tensor-----	1.2
1.3 - Transformação linear de coordenadas -----	1.3
1.4 - Ortogonalidade-----	1.7
1.5 - Significado dos elementos da matriz de transformação-----	1.8
1.6 - Índices livres e índices mudos -----	1.10
1.7 - Ortogonalidade em notação indicial -----	1.12
1.8 - Tensor de ordem n -----	1.13
1.9 - Lei de transformação em notação matricial-----	1.15
1.10 - Operações com tensores-----	1.15
1.10.1 - Adição -----	1.16
1.10.2 - Produto -----	1.17
1.10.3 - Contração -----	1.17
1.10.4 - Produto contraído -----	1.18
1.10.5 - Derivação -----	1.19
1.11 - Tensores notáveis -----	1.19
1.11.1 - Delta de Kronecker -----	1.19
1.11.2 - Tensor alternante-----	1.20
1.12 - Operadores tensoriais-----	1.21
1.12.1 - Gradiente-----	1.22
1.12.2 - Divergência -----	1.22
1.12.3 - Rotacional-----	1.23
1.13 - Simetria e antissimetria tensorial -----	1.23

CAPÍTULO 2

2 - ESTADO DE TENSÃO -----	2.1
2.1 - Caso geral tridimensional -----	2.1
2.1.1 - Considerações gerais-----	2.1
2.1.2 - Estado de tensão num ponto -----	2.4
2.1.3 - Tensor das tensões -----	2.5

2.1.4 - Equações de equilíbrio definido-----	2.7
2.1.5 - Equações de equilíbrio indefinido -----	2.10
2.1.6 - Mudança de referencial-----	2.16
2.1.7 - Tensões principais e invariantes do tensor das tensões -----	2.17
2.1.8 - Tensões tangenciais máximas e mínimas -----	2.25
2.1.9 - Circunferências de Mohr -----	2.32
2.1.10 - Tensões octaédricas -----	2.37
2.1.11 - Tensor hidrostático e tensor de desvio-----	2.39
2.2 - Estado plano de tensão-----	2.40
2.2.1 - Formulação-----	2.41
2.2.2 - Circunferência de Mohr -----	2.46
2.2.3 - Facetas conjugadas -----	2.53

CAPÍTULO 3

3 - ESTADO DE DEFORMAÇÃO -----	3.1
3.1 - Deformação homogénea-----	3.1
3.2 - Sobreposição de deformações homogéneas-----	3.8
3.3 - Decomposição de deformações homogéneas-----	3.9
3.3.1 - Rotação -----	3.10
3.3.2 - Deformação pura -----	3.13
3.4 - Deformação volumétrica -----	3.17
3.5 - Deformação em torno de um ponto -----	3.19
3.6 - Tensor das deformações - mudança de referencial -----	3.24
3.7 - Extensões principais e direcções principais de deformação -----	3.26
3.8 - Tensor do desvio das deformações-----	3.30
3.9 - Equações de compatibilidade -----	3.31
3.10 - Estado plano de deformação-----	3.35
3.11 - Circunferência de Mohr -----	3.40

CAPÍTULO 4

4 - RELAÇÕES ENTRE TENSÕES E DEFORMAÇÕES-----	4.1
4.1 - Lei de Hooke generalizada -----	4.1
4.2 - Casos de simetria elástica -----	4.3
4.2.1 - Simetria elástica relativamente a um plano-----	4.4

4.2.2 - Simetria elástica relativamente a dois planos ortogonais-----	4.7
4.3 - Isotropia-----	4.8
4.3.1 - Relação inversa-----	4.12
4.3.2 - Valor máximo do coeficiente de Poisson-----	4.17
4.3.3 - Casos particulares-----	4.18
4.3.3.1 - Estado plano de tensão-----	4.19
4.3.3.2 - Estado plano de deformação-----	4.20

BIBLIOGRAFIA

SIMBOLOGIA

- \underline{A} - matriz de transformação de coordenadas entre dois referenciais (transformação directa)
- a_{ij} - elemento da matriz \underline{A}
- \underline{B} - matriz de transformação de coordenadas entre dois referenciais (transformação inversa)
- C - corpo
- C - centro da circunferência de Mohr
- c_{ijkl} - elemento do tensor de 4ª ordem correspondente à lei de Hooke generalizada
- \underline{c} - matriz 6×6 correspondente à lei de Hooke generalizada
- c_{ij} - elementos da matriz 6×6 correspondente à lei de Hooke generalizada
- \underline{d} - tensor das deformações
- d_{ij} - elemento do tensor das deformações
- \underline{d}' - tensor do desvio das deformações
- d'_{ij} - elemento do tensor do desvio das deformações
- \underline{d} - vector com as 6 componentes independentes do tensor das deformações (Cap. 4)
- d_i - componentes do vector \underline{d} (Cap. 4)
- d_0 - extensão média
- dS - elemento infinitesimal de superfície
- dV - elemento infinitesimal de volume
- E - módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young
- \hat{e}_i - versor correspondente ao eixo x_i
- e_{i0} - tensor de 1ª ordem que caracteriza uma deformação homogénea (translação)
- e_{ij} - tensor de 2ª ordem que caracteriza uma deformação homogénea ($= \partial u_i / \partial x_j$)
- F - força genérica
- \vec{F} - vector força com componentes (f_1, f_2, f_3)

- f_i - componente do vector \vec{F} segundo x_i
- \vec{f}_m - forças mássicas ou de volume
- \vec{f}_s - forças de superfície
- G - módulo de elasticidade transversal ou módulo de distorção
- I - matriz identidade
- I_1 - 1º invariante do tensor das tensões ou das deformações
- I_2 - 2º invariante do tensor das tensões ou das deformações
- I_3 - 3º invariante do tensor das tensões ou das deformações
- I_D - circunferência de Mohr: polo irradiante das direcções
- I_F - circunferência de Mohr: polo irradiante das facetas
- L - comprimento genérico
- L - Lagrangeano
- \vec{M} - vector momento com componentes (m_1, m_2, m_3)
- m_i - componente do vector \vec{M} segundo x_i
- \hat{n} - versor de uma direcção arbitrária com componentes (n_1, n_2, n_3)
- \hat{n} - versor normal a um elemento de superfície
- n_i - componente do versor \hat{n} segundo x_i
- \hat{n}_I - versor da 1ª direcção principal de tensão ou de deformação
- \hat{n}_{II} - versor da 2ª direcção principal de tensão ou de deformação
- \hat{n}_{III} - versor da 3ª direcção principal de tensão ou de deformação
- \hat{n}_{oct} - versor normal a uma faceta octaédrica
- O - origem do referencial
- P - ponto genérico de coordenadas (x_1, x_2, x_3)
- \vec{p} - vector posição do ponto P
- R - raio da circunferência de Mohr
- S - referencial (O, x_1, x_2, x_3)
- S - superfície
- \vec{t} - vector tensão com componentes (t_1, t_2, t_3)
- $\vec{t}_{(\hat{n})}$ - tensão num ponto para uma faceta de normal \hat{n}

- $\vec{t}_{(\hat{e}_i)}$ - tensão num ponto para uma faceta de normal \hat{e}_i
- t - grandeza do vector \vec{t}
- t_{oct} - grandeza do vector tensão numa faceta octaédrica
- \vec{u} - vector deslocamento com componentes (u_1, u_2, u_3)
- u_i - componente do vector \vec{u} segundo x_i
- \vec{u}^T - componente de translação do vector deslocamento
- \vec{u}^R - componente de rotação do vector deslocamento
- \vec{u}^D - componente de deformação do vector deslocamento
- V - volume
- \tilde{w} - tensor rotação
- w_{ij} - elemento do tensor rotação
- \vec{w} - vector rotação com componentes (w_1, w_2, w_3)
- w_i - componente do vector \vec{w} segundo x_i
- w - ângulo de rotação $(= \|\vec{w}\|)$
- X - ponto genérico de coordenadas (x_1, x_2, x_3)
- \vec{x} - vector posição do ponto X
- x_i - eixo do referencial
- x_i - coordenada de um ponto segundo o eixo x_i
- α - ângulo entre duas direcções
- α_I - estado plano de tensão ou deformação: ângulo que define a 1ª direcção principal
- α_{II} - estado plano de tensão ou deformação: ângulo que define a 2ª direcção principal
- Δ - deslocamento genérico
- ΔS - elemento de superfície
- δ_{ij} - delta de Kronecker ou símbolo de Kronecker
- ε_{ijk} - tensor alternante
- ε_i - extensão segundo o eixo x_i (e.g., $\varepsilon_3 = d_{33}$)
- ε_I - 1ª extensão principal

- ε_{II} - 2ª extensão principal
- ε_{III} - 3ª extensão principal
- ε_x - estado plano de deformação: extensão segundo x
- ε_y - estado plano de deformação: extensão segundo y
- ε - estado plano de deformação: extensão na direcção α
- φ - valor próprio de um tensor de 2ª ordem
- γ_{ij} - ângulo entre os eixos \hat{e}_i' e \hat{e}_j (Cap. 1)
- γ_{ij} - distorção entre os eixos x_i e x_j ($\gamma_{ij} = 2d_{ij}$, com $i \neq j$)
- γ_{xy} - estado plano de deformação: distorção entre as direcções x e y
- γ - estado plano de deformação: distorção entre as direcções α e $\alpha + 90^\circ$
- λ - multiplicador de Lagrange
- λ - uma das constantes de Lamé (a outra é o módulo de distorção G)
- ν - coeficiente de Poisson
- π - plano
- $\vec{\sigma}$ - vector correspondente à componente normal da tensão
- σ_i - componente normal da tensão na faceta perpendicular ao eixo x_i
(e.g., $\sigma_3 = \tau_{33}$)
- σ - grandeza da componente normal da tensão
- σ_I - 1ª tensão principal
- σ_{II} - 2ª tensão principal
- σ_{III} - 3ª tensão principal
- σ'_I - 1ª tensão principal do tensor do desvio das tensões
- σ'_{II} - 2ª tensão principal do tensor do desvio das tensões
- σ'_{III} - 3ª tensão principal do tensor do desvio das tensões
- $\bar{\sigma}$ - tensão normal média
- σ_{oct} - tensão normal numa faceta octaédrica
- σ_x - estado plano de tensão: tensão normal numa faceta perpendicular ao eixo x
- σ_y - estado plano de tensão: tensão normal numa faceta perpendicular ao eixo y
- θ - ângulo entre duas direcções
- $\tilde{\tau}$ - tensor das tensões

- τ_{ij} - elemento do tensor das tensões $\underline{\tau}$
- τ' - tensor do desvio das tensões
- τ'_{ij} - elemento do tensor do desvio das tensões
- τ_H - tensor hidrostático ou isotrópico
- $\vec{\tau}$ - vector correspondente à componente tangencial da tensão
- τ - grandeza da componente tangencial da tensão
- τ_{oct} - tensão tangencial numa faceta octaédrica
- $\underline{\tau}$ - vector com as 6 componentes independentes do tensor das tensões (Cap. 4)
- τ_i - componentes do vector $\underline{\tau}$ (Cap. 4)
- τ_{xy} - estado plano de tensão: tensão tangencial numa faceta perpendicular ao eixo x
- ∇ - operador gradiente $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, também designado *nabla*

1 - INTRODUÇÃO AO CÁLCULO TENSORIAL

Neste capítulo são apresentadas algumas noções sobre o cálculo tensorial, de modo a facilitar mais adiante a dedução de algumas expressões fundamentais da Mecânica dos Sólidos.

1.1 - Notação indicial

A principal vantagem da utilização da notação indicial é a de permitir a dedução de expressões complexas utilizando uma notação compacta. Considere-se a seguinte equação que relaciona as grandezas vectoriais \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} .

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (1.1)$$

Uma vez que

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad (1.2)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad (1.3)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \quad (1.4)$$

verificam-se as seguintes relações entre as respectivas componentes

$$c_1 = a_1 + b_1 \quad (1.5)$$

$$c_2 = a_2 + b_2 \quad (1.6)$$

$$c_3 = a_3 + b_3 \quad (1.7)$$

As equações (1.5)-(1.7) relacionam as componentes dos vectores segundo cada um dos eixos coordenados x_1 , x_2 e x_3 . Em vez de escrever estas três equações poder-se-ia recorrer a um índice i e escrever apenas

$$c_i = a_i + b_i \quad (i = 1, \dots, 3) \quad (1.8)$$

Em (1.8) pode-se omitir a expressão entre parênteses porque se subentende que o índice i pode adoptar os valores 1, 2 ou 3. Partindo de (1.8) chega-se às equações

originais (1.5)-(1.7) efectuando uma permutação cíclica dos índices, i.e., atribuindo-lhes sucessivamente os valores 1, 2 e 3. Recorrendo à utilização de índices, consegue-se, na generalidade dos casos, manipular expressões de um modo mais compacto. A notação indicial é também designada notação tensorial, devido ao facto de ser utilizada no cálculo tensorial, que será em seguida apresentado. Nalguma bibliografia esta notação é designada notação de Einstein, por ter sido muito utilizada por este físico.

1.2 - Definição de tensor

Um tensor é um conjunto de grandezas físicas definidas em relação a eixos coordenados (e.g., deslocamento de um ponto no espaço). O conjunto de grandezas físicas que constitui o tensor apresenta algumas características independentes do referencial, que por esse motivo se designam invariantes (e.g., grandeza de um deslocamento no espaço). A noção de tensor pode ser generalizada a situações mais complexas e abstractas, que serão adiante apresentadas. Quando um tensor se encontra definido num sistema de eixos ortonormado é designado tensor cartesiano. Na disciplina de Mecânica dos Sólidos todos os tensores são cartesianos, sendo de aqui em diante designados apenas tensores. Na Fig. 1.1 encontra-se representado um sistema de eixos ortonormado, bem como os versores desses eixos. (Notas: um versor é um vector de norma unitária; um referencial é ortonormado quando os seus eixos são perpendiculares entre si e a escala segundo cada um dos eixos é comum a todos os eixos e apresenta como unidade a grandeza dos versores).

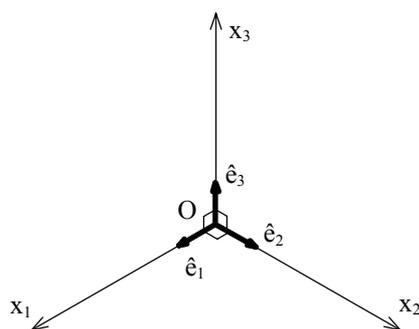


Figura 1.1 - Sistema de eixos ortonormado e respectivos versores.

Em certos casos particulares a notação matricial pode apresentar vantagens em relação à indicial, por exemplo, para eliminar ambiguidades ou para aumentar a clareza da exposição. Sempre que tal se verificar, deve-se recorrer à notação matricial.

1.3 - Transformação linear de coordenadas

Na Fig. 1.2 encontram-se representados os referenciais ortonormados S e S' , sendo o primeiro constituído pelos eixos x_1 , x_2 e x_3 e o segundo pelos eixos x_1' , x_2' e x_3' . Ambos os referenciais têm como origem comum o ponto O e são directos. (Nota: um referencial é directo quando ao rodar o semi-eixo x_1 positivo em torno de x_3 , aproximando-o de x_2 positivo, um saca-rolhas avançaria segundo x_3 positivo). Na disciplina de Mecânica dos Sólidos apenas serão considerados referenciais ortonormados directos.

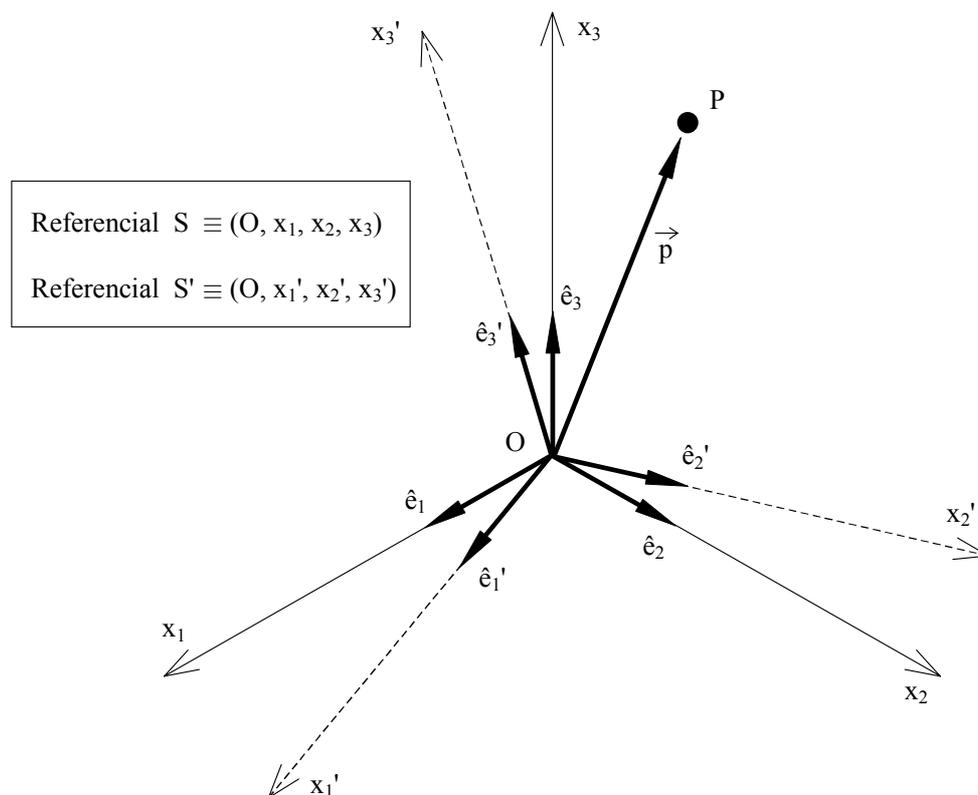


Figura 1.2 - Referenciais S e S' e respectivos versores.

O referencial S é definido pelos versores \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , e o referencial S' pelos versores \hat{e}_1' , \hat{e}_2' e \hat{e}_3' . Quando um referencial é ortonormado e directo, atendendo à definição de produto vectorial (\times) verifica-se o seguinte

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 \quad (1.9)$$

$$\hat{e}_3' = \hat{e}_1' \times \hat{e}_2' \quad (1.10)$$

Na Fig. 1.2, P é um ponto genérico e \vec{p} é o respectivo vector posição. Projectando \vec{p} sobre cada um dos eixos x_1 , x_2 e x_3 obtêm-se as suas componentes no referencial S , que se designam x_1 , x_2 e x_3 . Assim, tem-se

$$\vec{p} = (x_1, x_2, x_3)_S \quad (1.11)$$

ou

$$\vec{p} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \quad (1.12)$$

Os valores de x_1 , x_2 e x_3 são as coordenadas do ponto P no referencial S . Relativamente a S' tem-se

$$\vec{p} = (x'_1, x'_2, x'_3)_{S'} \quad (1.13)$$

ou

$$\vec{p} = x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3 \quad (1.14)$$

sendo x'_1 , x'_2 e x'_3 as coordenadas do ponto P em S' .

Na Fig. 1.3 encontra-se representado um vector \vec{a} e uma direcção definida pelo versor \hat{n} . Quer o vector, quer o versor, podem ter uma orientação qualquer no espaço a três dimensões.

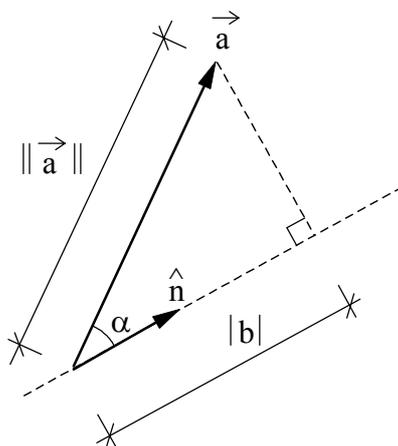


Figura 1.3 - Projecção de um vector sobre uma recta.

A projecção do vector \vec{a} sobre a direcção definida pelo versor \hat{n} corresponde ao produto escalar $\vec{a}|\hat{n}$, porque

$$\vec{a}|\hat{n} = \|\vec{a}\| \|\hat{n}\| \cos\alpha = \|\vec{a}\| \cos\alpha = b \quad (1.15)$$

Notas:

- no cálculo da projecção de \vec{a} sobre \hat{n} , o sinal do ângulo α é irrelevante porque $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$;
- quando $\alpha \in]90^\circ, 180^\circ]$, b apresenta sinal negativo.

Regressando à Fig. 1.2 e atendendo a (1.15), verifica-se que as coordenadas do ponto P no referencial S , i.e., as projecções de \vec{p} sobre os eixos do referencial S , são dadas por

$$x_1 = \vec{p}|\hat{e}_1 \quad (1.16)$$

$$x_2 = \vec{p}|\hat{e}_2 \quad (1.17)$$

$$x_3 = \vec{p}|\hat{e}_3 \quad (1.18)$$

De um modo semelhante têm-se as seguintes expressões para as coordenadas do ponto P no referencial S' .

$$x'_1 = \vec{p}|\hat{e}'_1 \quad (1.19)$$

$$x'_2 = \vec{p}|\hat{e}'_2 \quad (1.20)$$

$$x'_3 = \vec{p}|\hat{e}'_3 \quad (1.21)$$

Substituindo (1.12) em (1.19)-(1.21), tem-se

$$x'_1 = (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3) |\hat{e}'_1 \quad (1.22)$$

$$x'_2 = (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3) |\hat{e}'_2 \quad (1.23)$$

$$x'_3 = (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3) |\hat{e}'_3 \quad (1.24)$$

Atendendo à propriedade distributiva do produto escalar em relação à soma vectorial, tem-se

$$x'_1 = x_1 \hat{e}_1 |\hat{e}'_1 + x_2 \hat{e}_2 |\hat{e}'_1 + x_3 \hat{e}_3 |\hat{e}'_1 \quad (1.25)$$

$$x'_2 = x_1 \hat{e}_1 |\hat{e}'_2 + x_2 \hat{e}_2 |\hat{e}'_2 + x_3 \hat{e}_3 |\hat{e}'_2 \quad (1.26)$$

$$x'_3 = x_1 \hat{e}_1 |\hat{e}'_3 + x_2 \hat{e}_2 |\hat{e}'_3 + x_3 \hat{e}_3 |\hat{e}'_3 \quad (1.27)$$

Atendendo à propriedade comutativa do produto escalar, verifica-se facilmente que as equações (1.25)-(1.27) são equivalentes à seguinte expressão matricial

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}'_1 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_1 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_1 | \hat{e}_3 \\ \hat{e}'_2 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_3 \\ \hat{e}'_3 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

ou

$$\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} \quad (1.29)$$

sendo $\underset{\sim}{A}$ a seguinte matriz 3×3

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \hat{e}'_1 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_1 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_1 | \hat{e}_3 \\ \hat{e}'_2 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_3 \\ \hat{e}'_3 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_3 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

A matriz $\underset{\sim}{A}$, definida em (1.30), é designada matriz de transformação de S em S' . Se a matriz $\underset{\sim}{A}$ for conhecida, recorrendo a (1.29) é possível converter as coordenadas de um ponto do referencial S para o referencial S' . Esta transformação de coordenadas é designada transformação directa.

Se em vez de se ter efectuado a substituição de (1.12) em (1.19)-(1.21) se tivesse substituído (1.14) em (1.16)-(1.18), obter-se-iam as seguintes expressões para as coordenadas de P no referencial S

$$x_1 = (x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3) | \hat{e}_1 \quad (1.31)$$

$$x_2 = (x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3) | \hat{e}_2 \quad (1.32)$$

$$x_3 = (x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3) | \hat{e}_3 \quad (1.33)$$

Tal como no caso anterior, tem-se

$$x_1 = x'_1 \hat{e}'_1 | \hat{e}_1 + x'_2 \hat{e}'_2 | \hat{e}_1 + x'_3 \hat{e}'_3 | \hat{e}_1 \quad (1.34)$$

$$x_2 = x'_1 \hat{e}'_1 | \hat{e}_2 + x'_2 \hat{e}'_2 | \hat{e}_2 + x'_3 \hat{e}'_3 | \hat{e}_2 \quad (1.35)$$

$$x_3 = x'_1 \hat{e}'_1 | \hat{e}_3 + x'_2 \hat{e}'_2 | \hat{e}_3 + x'_3 \hat{e}'_3 | \hat{e}_3 \quad (1.36)$$

e matricialmente

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}'_1 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_1 \\ \hat{e}'_1 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_2 \\ \hat{e}'_1 | \hat{e}_3 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_3 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{x'} \quad (1.38)$$

com

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \hat{e}'_1 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_1 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_1 \\ \hat{e}'_1 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_2 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_2 \\ \hat{e}'_1 | \hat{e}_3 & \hat{e}'_2 | \hat{e}_3 & \hat{e}'_3 | \hat{e}_3 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Com a expressão (1.37) ou (1.38) fica definida a transformação de coordenadas de S' em S , que se designa transformação inversa.

1.4 - Ortogonalidade

Atendendo a (1.29) e (1.38) verifica-se simultaneamente

$$\underset{\sim}{x'} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} \quad (1.40)$$

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{x'} \quad (1.41)$$

Substituindo (1.41) em (1.40) resulta

$$\underset{\sim}{x'} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{x'} \quad (1.42)$$

Uma vez que $\underset{\sim}{x'}$ é um vector qualquer, de (1.42) conclui-se que

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{I} \quad (1.43)$$

sendo $\underset{\sim}{I}$ a matriz identidade. Multiplicando ambos os membros de (1.43) pela inversa da matriz $\underset{\sim}{A}$, resulta

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}^{-1} \quad (1.44)$$

Observando (1.30) e (1.39), constata-se que

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}^T \quad (1.45)$$

De (1.44) e (1.45) conclui-se que

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \underset{\sim}{A}^T \quad (1.46)$$

Assim se conclui que a matriz de transformação é ortogonal. (Nota: uma matriz é ortogonal quando a sua inversa coincide com a sua transposta).

Substituindo (1.45) em (1.41), chega-se a

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{x}' \quad (1.47)$$

que constitui uma expressão alternativa para a definição da transformação inversa.

1.5 - Significado dos elementos da matriz de transformação

O elemento genérico da matriz de transformação $\underset{\sim}{A}$ designa-se a_{ij} . Atendendo a (1.30), a sua expressão é a seguinte

$$a_{ij} = \hat{e}'_i | \hat{e}_j \quad (1.48)$$

Em a_{ij} o índice i representa a linha de $\underset{\sim}{A}$ e o índice j a coluna. Os índices i e j podem adoptar os valores 1, 2 ou 3.

Considerando, por exemplo, $i=2$ e $j=3$, tem-se (ver Fig. 1.4)

$$a_{23} = \hat{e}'_2 | \hat{e}_3 \quad (1.49)$$

$$a_{23} = \|\hat{e}'_2\| \|\hat{e}_3\| \cos(\hat{e}'_2, \hat{e}_3) \quad (1.50)$$

Uma vez que as normas dos versores são unitárias, resulta

$$a_{23} = \cos(\hat{e}'_2, \hat{e}_3) \quad (1.51)$$

Designando por γ_{23} o ângulo formado pelos versores \hat{e}'_2 e \hat{e}_3 (ver Fig. 1.4), tem-se

$$a_{23} = \cos(\gamma_{23}) \quad (1.52)$$

Nota: o sinal de γ_{23} é irrelevante porque $\cos(\gamma_{23}) = \cos(-\gamma_{23})$.

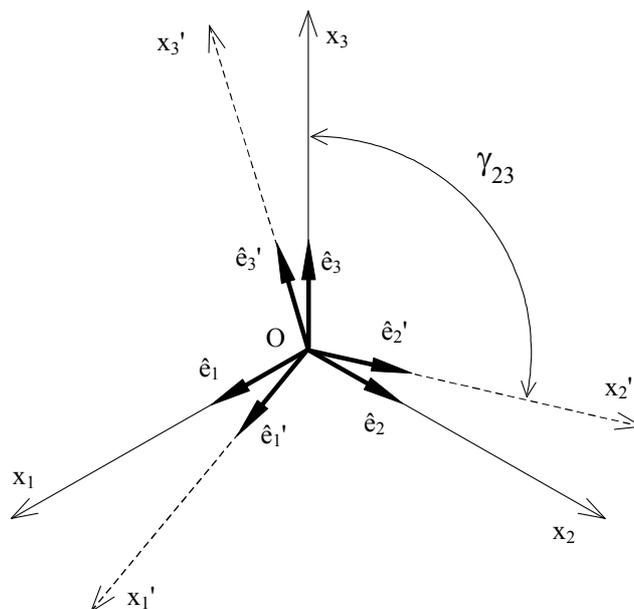


Figura 1.4 - Definição do ângulo γ_{23} .

Generalizando estas considerações, conclui-se que os elementos da matriz de transformação \underline{A} são cossenos de ângulos entre os semi-eixos positivos dos referenciais S e S' . Estes ângulos podem ser sempre definidos no intervalo $[0, 180^\circ]$.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_{11}) & \cos(\gamma_{12}) & \cos(\gamma_{13}) \\ \cos(\gamma_{21}) & \cos(\gamma_{22}) & \cos(\gamma_{23}) \\ \cos(\gamma_{31}) & \cos(\gamma_{32}) & \cos(\gamma_{33}) \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

$$a_{ij} = \cos(\gamma_{ij}) \quad (1.54)$$

Exceptuando alguns casos particulares (e.g., referenciais S e S' coincidentes), o ângulo entre \hat{e}_2' e \hat{e}_3 é diferente do ângulo entre \hat{e}_3' e \hat{e}_2 (ver Fig. 1.4). Assim, tem-se $\cos(\gamma_{23}) \neq \cos(\gamma_{32})$ e, atendendo a (1.54), $a_{23} \neq a_{32}$. Conclui-se assim que, exceptuando casos particulares, a matriz de transformação \underline{A} não é simétrica.

De acordo com (1.30), considere-se que cada linha da matriz \underline{A} constitui um vector

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1' | \hat{e}_1 & \hat{e}_1' | \hat{e}_2 & \hat{e}_1' | \hat{e}_3 \\ \hat{e}_2' | \hat{e}_1 & \hat{e}_2' | \hat{e}_2 & \hat{e}_2' | \hat{e}_3 \\ \hat{e}_3' | \hat{e}_1 & \hat{e}_3' | \hat{e}_2 & \hat{e}_3' | \hat{e}_3 \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

Atendendo à Fig. 1.3 e a (1.15), constata-se que a primeira linha da matriz \tilde{A} é constituída pelas projecções do versor \hat{e}'_1 sobre os versores dos eixos do referencial S (\hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3). Tratam-se assim das componentes do versor \hat{e}'_1 em S . De um modo semelhante, verifica-se que a segunda linha e a terceira linha da matriz \tilde{A} são constituídas pelas componentes de \hat{e}'_2 e \hat{e}'_3 no referencial S .

Conclui-se assim que as linhas da matriz de transformação \tilde{A} são constituídas pelas componentes dos versores de S' no referencial S .

Se num determinado problema os versores de S' forem os seguintes

$$\hat{e}'_1 = (a, b, c)_S \quad (1.56)$$

$$\hat{e}'_2 = (d, e, f)_S \quad (1.57)$$

$$\hat{e}'_3 = (g, h, i)_S \quad (1.58)$$

a matriz de transformação \tilde{A} pode escrever-se imediatamente como sendo

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \boxed{a \quad b \quad c} \\ \boxed{d \quad e \quad f} \\ \boxed{g \quad h \quad i} \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

1.6 - Índices livres e índices mudos

As coordenadas de um ponto no referencial S' podem ser obtidas a partir das suas coordenadas no referencial S recorrendo à equação matricial (1.29). Atendendo a (1.28) e designando por a_{ij} o elemento genérico da matriz \tilde{A} , pode escrever-se

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

Desenvolvendo o produto matricial em (1.60) chega-se a

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \quad (1.61)$$

$$x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \quad (1.62)$$

$$x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \quad (1.63)$$

De acordo com a notação indicial apresentada na Secção 1.1, pode-se recorrer a um índice i e escrever de um modo mais compacto

$$x'_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \quad (1.64)$$

Esta equação é válida para $i=1$, $i=2$ ou $i=3$. A seguinte equação é equivalente a (1.64).

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \quad (1.65)$$

Em notação indicial o símbolo Σ é suprimido, resultando

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (1.66)$$

Nota: a notação indicial tornou as equações (1.61)-(1.63) mais compactas.

Em (1.66), i é um índice livre e j é um índice mudo. As suas características são as seguintes:

Índice livre	- aparece uma vez em cada monómio - pode adoptar os valores 1, 2 ou 3 - figura em todos os monómios
Índice mudo	- aparece duas vezes no monómio - pode não figurar em todos os monómios - implica a existência de um somatório de 1 a 3 ao nível do monómio

Notas:

- nenhum índice pode aparecer mais do que duas vezes num monómio
- qualquer índice mudo pode ser substituído por outra letra que não figure no monómio. Como exemplo, apresentam-se as duas seguintes expressões que são equivalentes: $x'_i = a_{ij} x_j \Leftrightarrow x'_i = a_{it} x_t$
- qualquer índice livre pode ser substituído por outra letra que não figure na expressão. Por exemplo: $x'_i = a_{ij} x_j \Leftrightarrow x'_p = a_{pj} x_j$
- num monómio a ordem dos factores é arbitrária: $x'_i = a_{ij} x_j \Leftrightarrow x'_i = x_j a_{ij}$

Para clarificar as características dos dois tipos de índices, apresenta-se a seguinte equação

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pjk} = \delta_{ip} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jp} \quad (1.67)$$

Em todos os monómios de (1.67), i e p são índices livres. No primeiro membro, j e k são índices mudos. Em ambos os monómios do segundo membro, j é um índice mudo. Substituindo p por t em todos os monómios obtém-se a seguinte equação, que é equivalente a (1.67)

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = \delta_{it} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jt} \quad (1.68)$$

Substituindo j por r no último monómio, obtém-se uma nova equação que é equivalente às anteriores

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = \delta_{it} \delta_{jj} - \delta_{ir} \delta_{rt} \quad (1.69)$$

1.7 - Ortogonalidade em notação indicial

Considere-se que \tilde{P} , \tilde{Q} e \tilde{R} são matrizes 3×3 arbitrárias, cujos elementos genéricos são p_{ij} , q_{ij} e r_{ij} respectivamente. Atendendo às características da notação matricial e da notação indicial, verifica-se a seguinte equivalência

$$\tilde{P} \tilde{Q} = \tilde{R} \Leftrightarrow p_{ij} q_{jk} = r_{ik} \quad (1.70)$$

Nota: a repetição do índice j no monómio implica a existência de um somatório de $j=1$ até 3.

Pelos mesmos motivos, verifica-se também a seguinte equivalência

$$\tilde{P} \tilde{Q}^T = \tilde{R} \Leftrightarrow p_{ij} q_{kj} = r_{ik} \quad (1.71)$$

Nota: em notação indicial, a transposição de uma matriz corresponde à troca da ordem dos seus dois índices.

Considere-se agora a matriz de transformação \tilde{A} definida na Secção 1.3. Da substituição de (1.45) em (1.43) conclui-se que

$$\tilde{A} \tilde{A}^T = \tilde{I} \quad (1.72)$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.73)$$

Atendendo a (1.71), em notação indicial (1.72) e (1.73) correspondem a

$$a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik} \quad (1.74)$$

Nesta equação, δ_{ik} é o delta de Kronecker, que apresenta as seguintes propriedades: quando $i=k$, $\delta_{ik}=1$; quando $i \neq k$, $\delta_{ik}=0$. Estas características fazem com que o delta de Kronecker corresponda à matriz identidade I .

Multiplicando ambos os membros de (1.72) por \tilde{A}^T resulta

$$\tilde{A}^T \tilde{A} \tilde{A}^T = \tilde{A}^T \quad (1.75)$$

Concluindo-se que

$$\tilde{A}^T \tilde{A} = I \quad (1.76)$$

Em notação indicial (1.76) corresponde a

$$a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik} \quad (1.77)$$

As equações (1.74) e (1.77) exprimem a ortogonalidade da matriz de transformação \tilde{A} em notação indicial.

1.8 - Tensor de ordem n

De acordo com o que foi exposto nas Secções 1.3 e 1.6, as componentes de um vector \vec{p} no referencial S' podem ser calculadas com a expressão (1.66), em que intervêm as componentes de \vec{p} no referencial S e a matriz de transformação \tilde{A} .

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (1.78)$$

Considere-se agora um vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ao qual corresponde um conjunto de grandezas físicas no espaço a três dimensões. Se a respectiva lei de transformação for

$$v'_i = a_{ij} v_j \quad (1.79)$$

passa a designar-se v por tensor de primeira ordem.

Notas:

- o tensor v possui $3^1 = 3$ componentes;
- é necessário que a lei de transformação (1.79) seja válida para que v seja um tensor.

Generalizando estes conceitos, chega-se à lei de transformação de um tensor de segunda ordem, que é a seguinte

$$w'_{pq} = a_{pi} a_{qj} w_{ij} \quad (1.80)$$

Notas:

- no segundo membro de (1.80) está implícito um duplo somatório em i e em j ;
- tal como em (1.79), os índices i e j podem adoptar os valores 1, 2 ou 3;
- o tensor w possui $3^2 = 9$ componentes.

No caso mais geral, a lei de transformação de um tensor de ordem n é a seguinte

$$w'_{pqr \dots} = a_{pi} a_{qj} a_{rk} \dots w_{ijk \dots} \quad (1.81)$$

Notas:

- em w e em w' figuram n índices;
- no segundo membro de (1.81), a matriz de transformação A figura n vezes;
- o tensor w possui 3^n componentes.

Considerando o caso do tensor de ordem n com um valor de n nulo, tem-se o caso do tensor de ordem zero, cuja lei de transformação é a seguinte

$$w' = w \quad (1.82)$$

Notas:

- no tensor w que figura em (1.82), existem zero índices;
- a matriz de transformação A aparece zero vezes;
- w é um escalar, i.e., não apresenta componentes segundo os eixos coordenados;
- a equação (1.82) revela que o tensor w apresenta o mesmo valor em S e em S' , sendo portanto independente do referencial. Assim se conclui que um tensor de ordem zero é um invariante.

1.9 - Lei de transformação em notação matricial

As leis de transformação dos tensores de primeira e de segunda ordem podem ser expressas em notação matricial. No caso do tensor de primeira ordem, a lei de transformação definida em (1.79)

$$v'_i = a_{ij} v_j \quad (1.83)$$

corresponde à seguinte equação matricial, já referida nas Secções 1.3 e 1.6 (ver (1.29) e (1.66))

$$\underset{\sim}{v}' = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{v} \quad (1.84)$$

No caso do tensor de segunda ordem, cuja lei de transformação se encontra definida em (1.80), pode-se efectuar uma troca de factores e escrever

$$w'_{pq} = a_{pi} w_{ij} a_{qj} \quad (1.85)$$

A expressão que figura no segundo membro de (1.85) corresponde a um duplo somatório, que pode ser explicitado do seguinte modo

$$w'_{pq} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{pi} w_{ij} a_{qj} \quad (1.86)$$

A seguinte equação matricial, que é equivalente a (1.86), corresponde a uma representação alternativa da lei de transformação de um tensor de segunda ordem.

$$\underset{\sim}{w}' = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{w} \underset{\sim}{A}^T \quad (1.87)$$

Nesta expressão $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{w}$ e $\underset{\sim}{w}'$ são matrizes 3×3 .

1.10 - Operações com tensores

Nesta secção são apresentadas algumas operações envolvendo tensores. Nalguns casos demonstra-se que o resultado da operação continua a ser um tensor, i.e., respeita a lei de transformação tensorial, cuja expressão genérica é (1.81).

1.10.1 - Adição

Considerem-se dois tensores de segunda ordem designados u_{ij} e v_{ij} . Uma vez que se tratam de tensores, a lei de transformação (1.80) é válida para cada um deles

$$u'_{pq} = a_{pi} a_{qj} u_{ij} \quad (1.88)$$

$$v'_{pq} = a_{pi} a_{qj} v_{ij} \quad (1.89)$$

Em S , a soma de u_{ij} com v_{ij} designa-se w_{ij} , sendo

$$w_{ij} = u_{ij} + v_{ij} \quad (1.90)$$

Em S' tem-se

$$w'_{ij} = u'_{ij} + v'_{ij} \quad (1.91)$$

Uma vez que i e j são índices livres, podem ser substituídos por outra letra que não figure na expressão, podendo escrever-se

$$w'_{pq} = u'_{pq} + v'_{pq} \quad (1.92)$$

Substituindo (1.88) e (1.89) em (1.92), obtém-se

$$w'_{pq} = a_{pi} a_{qj} u_{ij} + a_{pi} a_{qj} v_{ij} \quad (1.93)$$

$$w'_{pq} = a_{pi} a_{qj} (u_{ij} + v_{ij}) \quad (1.94)$$

Atendendo a (1.90), resulta

$$w'_{pq} = a_{pi} a_{qj} w_{ij} \quad (1.95)$$

A equação (1.95) mostra que o resultado da soma tensorial é transformado de S para S' recorrendo à lei de transformação de tensores de segunda ordem. Assim se conclui que da operação de adição de tensores resulta um tensor.

Nota: de um modo semelhante seria possível chegar à mesma conclusão para o caso dos tensores de ordem n .

1.10.2 - Produto

Considerem-se os tensores u_{ij} (segunda ordem) e v_k (primeira ordem). Uma vez que se tratam de tensores, são válidas as leis de transformação (1.79) e (1.80)

$$u'_{pq} = a_{pi} a_{qj} u_{ij} \quad (1.96)$$

$$v'_r = a_{rk} v_k \quad (1.97)$$

Em S , o produto de u_{ij} por v_k designa-se w_{ijk} , sendo definido do seguinte modo

$$w_{ijk} = u_{ij} v_k \quad (1.98)$$

Em S' tem-se

$$w'_{pqr} = u'_{pq} v'_r \quad (1.99)$$

Nota: em (1.98) e (1.99) não está implícito qualquer somatório porque não existem monómios com índices repetidos.

Substituindo (1.96) e (1.97) em (1.99) resulta

$$w'_{pqr} = a_{pi} a_{qj} a_{rk} u_{ij} v_k \quad (1.100)$$

Substituindo (1.98) em (1.100) chega-se a

$$w'_{pqr} = a_{pi} a_{qj} a_{rk} w_{ijk} \quad (1.101)$$

Uma vez que (1.101) corresponde à lei de transformação de um tensor de terceira ordem, conclui-se assim que o resultado do produto entre um tensor de segunda ordem e um tensor de primeira ordem é um tensor de terceira ordem.

Nota: de um modo semelhante poder-se-ia concluir que do produto de um tensor de ordem m por um tensor de ordem n resulta um tensor de ordem $m + n$.

1.10.3 - Contração

Efectuar a contração de uma expressão tensorial consiste em igualar dois índices livres em todos os monómios. Este par de índices livres passa a constituir um par de índices mudos. Por exemplo, a contração dos índices i e j corresponde à substituição

do índice j pelo índice i ou, em alternativa, à substituição do índice i pelo índice j . Esquemáticamente tem-se

$$ij \rightarrow ii \quad (1.102)$$

ou

$$ij \rightarrow jj \quad (1.103)$$

Considere-se por exemplo o monómio w_{ijk} . A contracção de j e k corresponde a efectuar a seguinte substituição

$$\begin{array}{ccc} w_{ijk} & \xrightarrow{\text{contracção de } j \text{ e } k} & w_{ijj} = w_{i11} + w_{i22} + w_{i33} \\ (3^{\text{a}} \text{ ordem}) & & (1^{\text{a}} \text{ ordem}) \end{array} \quad (1.104)$$

Da contracção de um tensor de terceira ordem resultou um tensor de primeira ordem. É possível demonstrar que da contracção de um tensor de ordem n resulta um tensor de ordem $n - 2$.

Quando a contracção é aplicada a uma equação tensorial, tem de se aplicar a mesma contracção a todos os monómios. Apresenta-se como exemplo a seguinte equação tensorial

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} \quad (1.105)$$

Após a contracção dos índices j e q , i.e., após a substituição de q por j em todos os monómios, resulta

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pjk} = \delta_{ip} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jp} \quad (1.106)$$

Se a equação (1.105) for verdadeira, então a equação (1.106) também é verdadeira, porque resulta de uma operação de contracção.

1.10.4 - Produto contraído

O produto contraído consiste no produto de dois tensores seguido de uma ou mais contracções. Atendendo às características do produto e da contracção, atrás referidas, conclui-se facilmente que a ordem do produto de dois tensores de ordem p e q seguido de n contracções é $p + q - 2n$. Apresenta-se em seguida um exemplo, que

corresponde ao produto de dois tensores de segunda ordem seguido de duas contracções.

$$\begin{array}{c}
 d_{ik} \quad v_{pj} = w_{ikpj} \xrightarrow{\text{contracção de } k \text{ e } p} w_{ikkj} \xrightarrow{\text{contracção de } i \text{ e } j} w_{ikki} \\
 (2^{\text{ª}} \text{ ordem}) (2^{\text{ª}} \text{ ordem}) (4^{\text{ª}} \text{ ordem}) \quad (2^{\text{ª}} \text{ ordem}) \quad (\text{ordem zero})
 \end{array} \quad (1.107)$$

1.10.5 - Derivação

Esta operação consiste na derivação das componentes de um tensor de ordem n em ordem às variáveis do sistema (x_1, x_2, x_3) , resultando um tensor de ordem $n+1$. Considere-se o seguinte exemplo que corresponde à derivação de um tensor de segunda ordem

$$\begin{array}{c}
 w_{ij} \xrightarrow{\text{derivação}} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} = w_{ij,k} \\
 (2^{\text{ª}} \text{ ordem}) \quad (3^{\text{ª}} \text{ ordem})
 \end{array} \quad (1.108)$$

Neste exemplo, a derivação de um tensor de segunda ordem deu origem a um tensor de terceira ordem. (Nota: a representação da derivada com uma vírgula consiste numa alternativa mais compacta do que a notação tradicional.)

1.11 - Tensores notáveis

Apresentam-se em seguida dois tensores que possuem características particulares e que são muito utilizados em equações tensoriais.

1.11.1 - Delta de Kronecker

O delta de Kronecker (δ_{ij}), que também é por vezes designado símbolo de Kronecker, foi já referido na Secção 1.7. As suas características são as seguintes

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{quando } i = j \\ 0, & \text{quando } i \neq j \end{cases} \quad (1.109)$$

Atribuindo aos índices livres i e j os valores 1, 2 ou 3, obtém-se a seguinte matriz 3×3

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{I} \text{ (matriz identidade)} \quad (1.110)$$

Aplicando a lei de transformação de tensores de segunda ordem (1.80) ao delta de Kronecker (δ_{ij}) resulta

$$\delta'_{pq} = a_{pi} a_{qj} \delta_{ij} \quad (1.111)$$

Atendendo às características de δ_{ij} , a equação (1.111) pode ser simplificada, resultando

$$\delta'_{pq} = a_{pi} a_{qi} \quad (1.112)$$

Devido à ortogonalidade da matriz de transformação (ver (1.74)), o segundo membro de (1.112) corresponde ao delta de Kronecker, chegando-se assim à seguinte conclusão

$$\delta'_{pq} = \delta_{pq} \quad (1.113)$$

Esta equação indica que as componentes do delta de Kronecker apresentam o mesmo valor em S e em S' . Assim se conclui que o delta de Kronecker é um tensor invariante ou isotrópico, porque é independente do referencial.

1.11.2 - Tensor alternante

As características que definem o tensor alternante (ε_{ijk}) são as seguintes

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{quando dois quaisquer índices forem iguais} \\ 1, & \text{quando os índices } ijk \text{ estiverem por ordem circular directa} \\ -1, & \text{quando os índices } ijk \text{ estiverem por ordem circular inversa} \end{cases} \quad (1.114)$$

Na Fig. 1.5 é indicado o significado de ordem circular directa e ordem circular inversa.

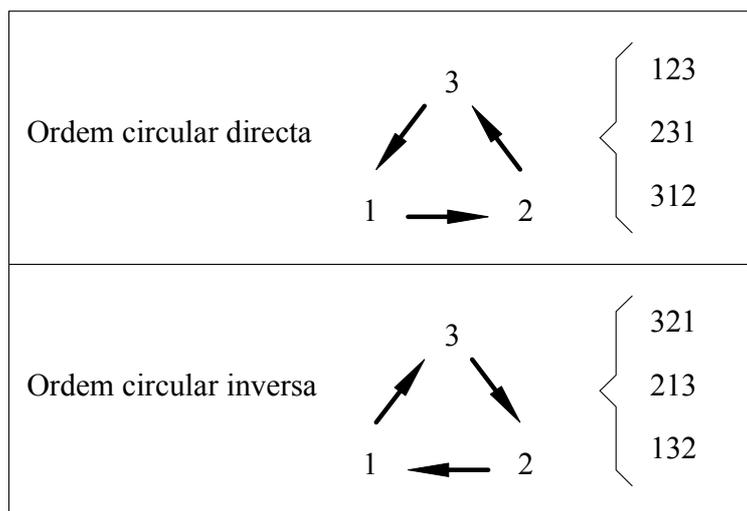


Figura 1.5 - Ordem circular directa e ordem circular inversa.

O tensor alternante ε_{ijk} é de terceira ordem, apresentando um número de componentes igual a 27 ($3^n = 3^3 = 27$). Atendendo à sua definição (1.114), verifica-se que três componentes são unitárias, outras três são iguais a -1 e as restantes 21 são nulas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1 \\ \text{Restantes 21 componentes são nulas} \end{array} \right. \quad (1.115)$$

É possível demonstrar que o tensor alternante é um tensor de terceira ordem invariante ou isotrópico.

1.12 - Operadores tensoriais

Os operadores gradiente, divergência e rotacional são em seguida apresentados, quer em notação matricial, quer em notação indicial. Qualquer um deles pode ser definido com recurso ao seguinte operador

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (1.116)$$

1.12.1 - Gradiente

Considere-se o seguinte campo escalar

$$u = u(x_1, x_2, x_3) \quad (1.117)$$

O gradiente de u define-se do seguinte modo

$$\vec{\text{grad}} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \quad (1.118)$$

Em notação indicial a representação do gradiente de u é

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (1.119)$$

ou, de um modo mais compacto

$$u_{,i} \quad (1.120)$$

correspondendo esta expressão a um tensor de primeira ordem.

1.12.2 - Divergência

Considere-se o seguinte campo vectorial

$$\vec{v} = \left(v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3) \right) \quad (1.121)$$

A divergência de \vec{v} é um escalar definido do seguinte modo

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (1.122)$$

Em notação indicial a representação da divergência de \vec{v} é

$$\text{div } \vec{v} = \nabla_i v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (1.123)$$

ou, de um modo mais compacto

$$\text{div } \vec{v} = v_{i,i} \quad (1.124)$$

Notas:

- em (1.123) e (1.124), a presença de índices repetidos num monómio implica a existência de um somatório de 1 a 3;
- $\nabla_i v_i$ corresponde ao produto contraído de ∇_i por v_i ;
- $v_{i,i}$ resulta da derivação de v_i seguida de contração.

1.12.3 - Rotacional

O rotacional do campo vectorial \vec{v} define-se do seguinte modo

$$\vec{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \quad (1.125)$$

ou

$$\vec{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_3 \quad (1.126)$$

O rotacional pode também ser definido como o seguinte produto vectorial

$$\vec{rot} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (1.127)$$

Em notação tensorial tem-se

$$\vec{rot} \vec{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \quad (1.128)$$

Nesta expressão ε_{ijk} é o tensor alternante. Desenvolvendo os somatórios em j e k , e atendendo às características de ε_{ijk} , chega-se à expressão (1.126).

1.13 - Simetria e antissimetria tensorial

Este assunto apenas é abordado para o caso dos tensores de segunda ordem.

Um tensor de segunda ordem é simétrico quando

$$w_{ij} = w_{ji} \quad (1.129)$$

para todos os valores de i e j . Quando $i = j$, a igualdade verifica-se sempre. Assim, um tensor de segunda ordem é simétrico quando

$$w_{12} = w_{21}, \quad w_{23} = w_{32} \quad \text{e} \quad w_{31} = w_{13} \quad (1.130)$$

Um tensor de segunda ordem é antissimétrico quando

$$w_{ij} = -w_{ji} \quad (1.131)$$

para todos os valores de i e j . Quando $i = j$, (1.131) só se verifica se o termo for nulo. Por este motivo, um tensor de segunda ordem é antissimétrico quando

$$w_{11} = w_{22} = w_{33} = 0 \quad (1.132)$$

e

$$w_{12} = -w_{21}, \quad w_{23} = -w_{32} \quad \text{e} \quad w_{31} = -w_{13} \quad (1.133)$$

Qualquer tensor de segunda ordem pode ser substituído pela soma de um tensor simétrico com um antissimétrico. Apresenta-se em seguida o respectivo modo de decomposição.

Considere-se um tensor de segunda ordem qualquer, designado d_{ij} . Este tensor pode ser substituído pela adição das suas metades

$$d_{ij} = \frac{1}{2}d_{ij} + \frac{1}{2}d_{ij} \quad (1.134)$$

Somando e subtraindo metade do tensor transposto (d_{ji}), chega-se a uma equação que é sempre verdadeira

$$d_{ij} = \frac{1}{2}d_{ij} + \frac{1}{2}d_{ij} + \frac{1}{2}d_{ji} - \frac{1}{2}d_{ji} \quad (1.135)$$

Agrupando as parcelas do seguinte modo

$$d_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(d_{ij} + d_{ji})}_{\text{simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2}(d_{ij} - d_{ji})}_{\text{antissimétrico}} \quad (1.136)$$

obtém-se a decomposição pretendida.

Para tornar mais evidentes as características de (1.136), atribui-se a i e j os valores 1, 2 ou 3, chegando-se à seguinte expressão

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \\ & = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_{11} + d_{11} & d_{12} + d_{21} & d_{13} + d_{31} \\ d_{21} + d_{12} & d_{22} + d_{22} & d_{23} + d_{32} \\ d_{31} + d_{13} & d_{32} + d_{23} & d_{33} + d_{33} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d_{11} - d_{11} & d_{12} - d_{21} & d_{13} - d_{31} \\ d_{21} - d_{12} & d_{22} - d_{22} & d_{23} - d_{32} \\ d_{31} - d_{13} & d_{32} - d_{23} & d_{33} - d_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.137)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \\ & = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2d_{11} & d_{12} + d_{21} & d_{13} + d_{31} \\ & 2d_{22} & d_{23} + d_{32} \\ \text{SIM.} & & 2d_{33} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & +(d_{12} - d_{21}) & +(d_{13} - d_{31}) \\ -(d_{12} - d_{21}) & 0 & +(d_{23} - d_{32}) \\ -(d_{13} - d_{31}) & -(d_{23} - d_{32}) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.138)$$

ou

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} d_{11} & \frac{1}{2}(d_{12} + d_{21}) & \frac{1}{2}(d_{13} + d_{31}) \\ & d_{22} & \frac{1}{2}(d_{23} + d_{32}) \\ \text{SIM.} & & d_{33} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(d_{12} - d_{21}) & \frac{1}{2}(d_{13} - d_{31}) \\ -\frac{1}{2}(d_{12} - d_{21}) & 0 & \frac{1}{2}(d_{23} - d_{32}) \\ -\frac{1}{2}(d_{13} - d_{31}) & -\frac{1}{2}(d_{23} - d_{32}) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.139)$$

2 - ESTADO DE TENSÃO

Neste capítulo são descritas as características do estado de tensão a que um corpo pode estar sujeito. Começa-se por apresentar o caso geral tridimensional, seguindo-se um caso particular, que é o do estado plano de tensão.

2.1 - Caso geral tridimensional

Nesta secção é apresentado o caso geral tridimensional, i.e., o estado de tensão é caracterizado em pontos de um corpo que apresenta uma forma qualquer no espaço a três dimensões. Admite-se também que as forças podem estar orientadas segundo uma qualquer direcção do espaço.

2.1.1 - Considerações gerais

Apresentam-se em seguida algumas definições e suposições.

Matéria	descontínua	- caso real devido à natureza atómica da matéria	
	contínua	- simplificação do problema	

Ao supor a matéria contínua, introduz-se uma simplificação, que na generalidade dos casos não introduz erros significativos.

Material	não homogéneo
	homogéneo

Diz-se que um material é homogéneo quando as suas propriedades não variam de ponto para ponto. Na generalidade dos casos, supõe-se que o material que constitui o corpo é homogéneo. No entanto, distintos materiais apresentam em geral propriedades distintas. Se um determinado corpo for constituído por dois ou mais materiais homogéneos, existe uma descontinuidade na transição entre os diversos materiais.

Material	anisótropo	- caso geral
	isótropo	- caso particular

Material anisótropo - as suas propriedades variam com a direcção considerada.

Material isótropo - as suas propriedades são independentes da direcção.

Material com comportamento	plástico	- caso geral
	elástico não linear	- caso particular
	elástico linear	- caso particular

Para exemplificar estes três tipos de comportamento num caso simples, considere-se uma barra prismática com uma extremidade fixa e com uma força F aplicada na outra extremidade (ver Fig. 2.1). A extremidade livre apresenta um deslocamento Δ . Nas figuras 2.2, 2.3 e 2.4 apresentam-se os diagramas $F-\Delta$ para os três tipos de comportamento atrás referidos.

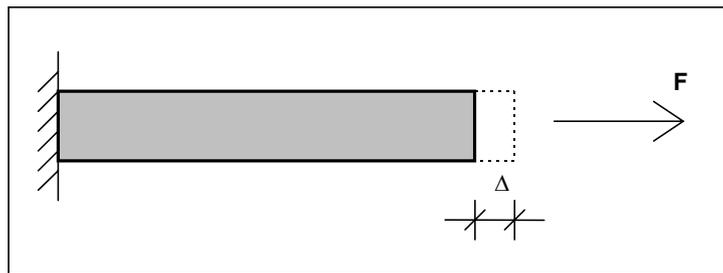
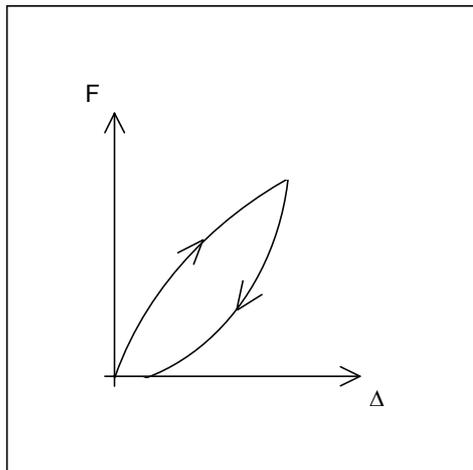


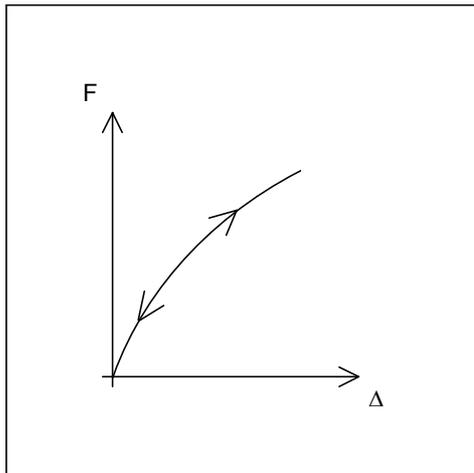
Fig. 2.1 - Barra prismática sujeita a uma força F .



Comportamento plástico

- as deformações não são reversíveis.
- existem deformações residuais.
- a relação força-deslocamento é não linear.

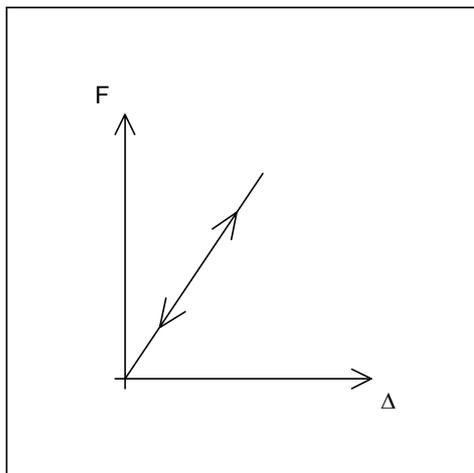
Fig. 2.2 - Comportamento plástico.



Comportamento elástico não linear

- as deformações são reversíveis.
- não existem deformações residuais.
- a relação força-deslocamento é não linear.

Fig. 2.3 - Comportamento elástico não linear.



Comportamento elástico linear

- as deformações são reversíveis.
- não existem deformações residuais.
- a relação força-deslocamento é linear.

Fig. 2.4 - Comportamento elástico linear.

O comportamento de um corpo pode ainda ser classificado relativamente à ordem de grandeza das deformações a que está sujeito.

Grandes deformações	- materiais muito deformáveis (e.g., borracha) ou - configurações muito deformáveis (e.g., lâmina de aço)
Pequenas deformações	- materiais muito rígidos com configurações pouco deformáveis (e.g., paralelepípedo em aço)

Exceptuando indicação em contrário, na disciplina de Mecânica dos Sólidos apenas serão tratados problemas com as seguintes características:

- material homogéneo
- material isótropo
- material com comportamento elástico linear
- pequenas deformações

2.1.2 - Estado de tensão num ponto

Considere-se um corpo nas condições indicadas na Fig. 2.5.

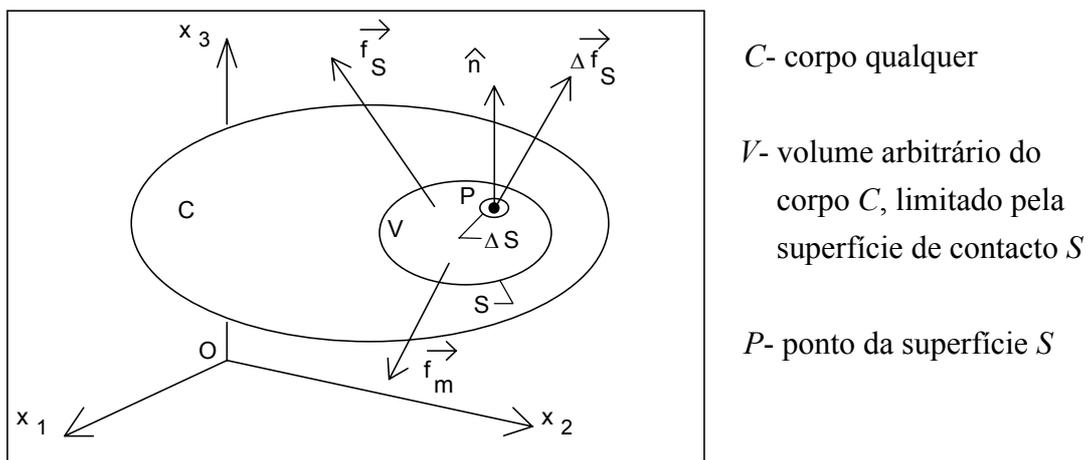


Fig. 2.5 - Corpo sujeito a forças mássicas e de superfície.

Forças que actuam sobre um corpo

\vec{f}_m - forças mássicas aplicadas a V
\vec{f}_s - forças de superfície aplicadas a V através de S

Forças mássicas ou forças de volume - exercem a sua acção sobre todos os elementos infinitesimais de volume (e.g., forças gravíticas, forças de inércia).

Forças de superfície - actuam na superfície exterior do corpo (e.g., acção do vento, pressão de um gás sobre a parede interior de uma caldeira).

Na Fig. 2.5 estão ainda definidos os seguintes elementos

ΔS - elemento de superfície de S contendo o ponto P

- \hat{n} - normal a ΔS dirigida para o exterior de S
- $\Delta \vec{f}_S$ - força exercida através de ΔS pela matéria exterior a V sobre a matéria interior a V

Definição de tensão no ponto P para uma faceta de normal \hat{n} :

$$\vec{t}_{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}_S}{\Delta S} = \frac{d \vec{f}_S}{d S} \quad (2.1)$$

$+\Delta \vec{f}_S$ - força que o exterior a V exerce sobre o interior a V .

$-\Delta \vec{f}_S$ - força que o interior a V exerce sobre o exterior a V .

Trata-se do princípio da igualdade da acção e reacção de Newton.

Por este motivo, verifica-se que

$$\vec{t}_{(-\hat{n})} = -\vec{t}_{(\hat{n})} \quad (2.2)$$

2.1.3 - Tensor das tensões

Na Fig. 2.6 está representado um cubo cujas faces são paralelas aos planos coordenados. As três faces representadas na figura são aquelas cujo versor normal \hat{n} coincide com \hat{e}_1 , \hat{e}_2 ou \hat{e}_3 . As faces do cubo são facetadas infinitesimais que contêm um mesmo ponto P . Na Fig. 2.6 está também representado o vector tensão $\vec{t}_{(\hat{e}_i)}$ correspondente a cada uma das três facetadas.

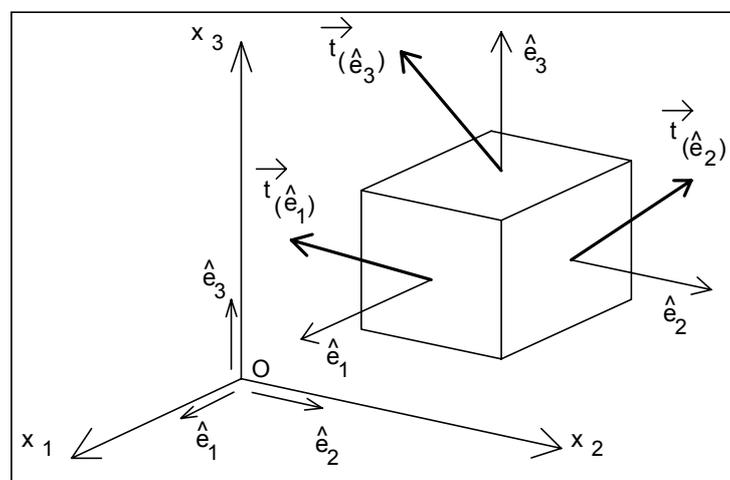


Fig. 2.6 - Vector tensão nas três facetadas paralelas aos planos coordenados.

Cada um dos vectores tensão representados na Fig. 2.6 possui três componentes, i.e., $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3) = t_1 \hat{e}_1 + t_2 \hat{e}_2 + t_3 \hat{e}_3$, sendo

$$\begin{aligned}\vec{t}_{(\hat{e}_1)} &= t_1^{(\hat{e}_1)} \cdot \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_1)} \cdot \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_1)} \cdot \hat{e}_3 \\ \vec{t}_{(\hat{e}_2)} &= t_1^{(\hat{e}_2)} \cdot \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_2)} \cdot \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_2)} \cdot \hat{e}_3 \\ \vec{t}_{(\hat{e}_3)} &= t_1^{(\hat{e}_3)} \cdot \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_3)} \cdot \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_3)} \cdot \hat{e}_3\end{aligned}\quad (2.3)$$

Em notação tensorial este conjunto de equações pode ser escrito de um modo mais compacto

$$\vec{t}_{(\hat{e}_i)} = t_j^{(\hat{e}_i)} \cdot \hat{e}_j \quad (2.4)$$

Nesta equação, i é um índice livre e j é um índice mudo. A cada índice mudo está associado um somatório de 1 a 3.

Considerando

$$\tau_{ij} = t_j^{(\hat{e}_i)} \quad (2.5)$$

resulta

$$\vec{t}_{(\hat{e}_i)} = \tau_{ij} \cdot \hat{e}_j \quad (2.6)$$

Nesta expressão, $\vec{t}_{(\hat{e}_i)}$ representa o vector tensão numa faceta de normal \hat{e}_i .

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \vec{t}_{(\hat{e}_1)} \\ \vec{t}_{(\hat{e}_2)} \\ \vec{t}_{(\hat{e}_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

A matriz 3×3 cujos elementos são os τ_{ij} designa-se por tensor das tensões. (Nota: a demonstração de que τ é um tensor será apresentada mais adiante).

Na Fig. 2.7 encontram-se representadas as componentes do vector tensão em cada uma das três facetas definidas na Fig. 2.6.

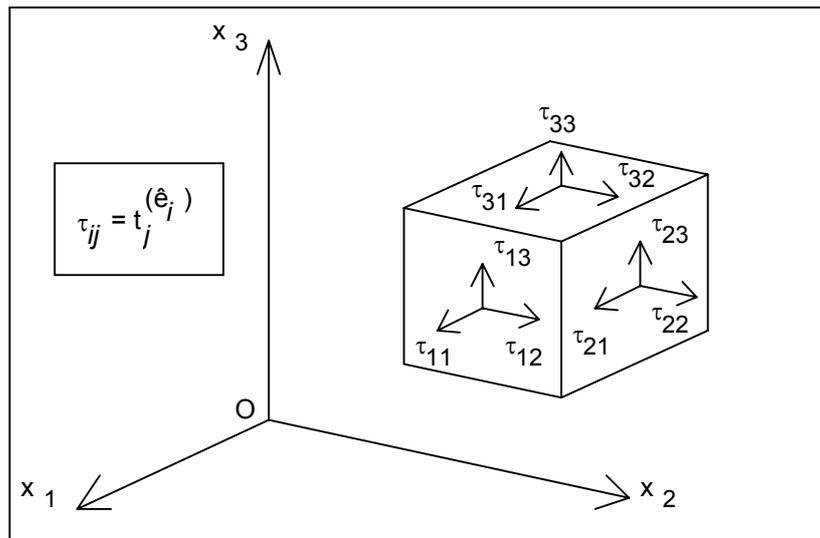


Fig. 2.7 - Significado dos elementos do tensor das tensões.

Nos elementos do tensor das tensões (τ_{ij}), o índice i está associado à faceta e o índice j está associado à componente de \vec{t} .

Os elementos do tensor das tensões podem ser classificados do seguinte modo (ver Fig. 2.7).

$\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ - tensões normais (valor positivo \Rightarrow tracção)

$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{21}, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{32}$ - tensões tangenciais

2.1.4 - Equações de equilíbrio definido

Considere-se um ponto P cujo estado de tensão é caracterizado pelo tensor τ . Na Fig. 2.8 encontra-se representado um tetraedro infinitesimal ($OABC$), cujas características são em seguida referidas.

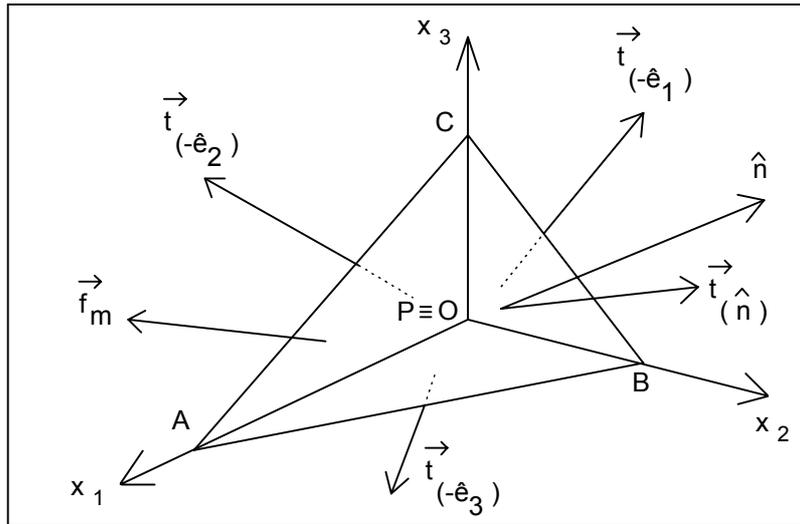


Fig. 2.8 - Tetraedro infinitesimal.

A face ABC é uma faceta que apresenta uma orientação arbitrária definida pelo versor \hat{n} . As faces OAB , OAC e OBC são paralelas aos planos coordenados. O referencial utilizado tem a origem coincidente com o ponto P . Uma vez que o tetraedro apresenta dimensões infinitesimais, no limite todas as suas faces contêm o ponto P .

\hat{n} - normal à face ABC

\hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 - versores normais às faces que são paralelas aos planos coordenados

\vec{f}_m - forças mássicas

dV - volume do tetraedro

dS - área do triângulo ABC

dS_i - área da face normal ao eixo x_i

Equação de equilíbrio segundo x_1 :

$$\left(\vec{t}_{(\hat{n})} dS\right)|_{\hat{e}_1} + \left(\vec{t}_{(-\hat{e}_1)} dS_1\right)|_{\hat{e}_1} + \left(\vec{t}_{(-\hat{e}_2)} dS_2\right)|_{\hat{e}_1} + \left(\vec{t}_{(-\hat{e}_3)} dS_3\right)|_{\hat{e}_1} + \left(\vec{f}_m dV\right)|_{\hat{e}_1} = 0 \quad (2.8)$$

Devido ao princípio da igualdade da acção e reacção de Newton (2.2), tem-se

$$\vec{t}_{(-\hat{e}_i)} = -\vec{t}_{(\hat{e}_i)} \quad (2.9)$$

Verifica-se também que

$$dS_i = dS n_i \quad (2.10)$$

sendo n_i a componente de \hat{n} de ordem i .

O termo em que figura dV é um infinitésimo de ordem superior, podendo ser suprimido. Destas considerações resulta

$$\left(\bar{t}_{(\hat{n})} | \hat{e}_1\right) dS - \left(\bar{t}_{(\hat{e}_1)} | \hat{e}_1\right) dS n_1 - \left(\bar{t}_{(\hat{e}_2)} | \hat{e}_1\right) dS n_2 - \left(\bar{t}_{(\hat{e}_3)} | \hat{e}_1\right) dS n_3 = 0 \quad (2.11)$$

Dividindo ambos os membros por dS resulta

$$\bar{t}_{(\hat{n})} | \hat{e}_1 - \left(\bar{t}_{(\hat{e}_1)} | \hat{e}_1\right) n_1 - \left(\bar{t}_{(\hat{e}_2)} | \hat{e}_1\right) n_2 - \left(\bar{t}_{(\hat{e}_3)} | \hat{e}_1\right) n_3 = 0 \quad (2.12)$$

A projecção sobre o versor \hat{e}_1 corresponde à primeira componente de cada vector

$$t_1^{(\hat{n})} - t_1^{(\hat{e}_1)} n_1 - t_1^{(\hat{e}_2)} n_2 - t_1^{(\hat{e}_3)} n_3 = 0 \quad (2.13)$$

Uma vez que

$$t_j^{(\hat{e}_i)} = \tau_{ij} \quad (2.14)$$

resulta

$$t_1^{(\hat{n})} = \tau_{11} n_1 + \tau_{21} n_2 + \tau_{31} n_3 \quad (2.15)$$

Recorrendo ao índice mudo j , pode-se escrever esta equação de um modo mais compacto

$$t_1^{(\hat{n})} = \tau_{j1} n_j \quad (2.16)$$

Desenvolvendo as equações de equilíbrio segundo x_2 e x_3 chegar-se-ia a

$$t_2^{(\hat{n})} = \tau_{j2} n_j \quad (2.17)$$

$$t_3^{(\hat{n})} = \tau_{j3} n_j \quad (2.18)$$

Resumindo as três últimas equações numa única equação tensorial, resulta

$$t_i^{(\hat{n})} = \tau_{ji} n_j \quad (2.19)$$

Em notação matricial escreve-se

$$\begin{bmatrix} t_1^{(\hat{n})} \\ t_2^{(\hat{n})} \\ t_3^{(\hat{n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

ou

$$\vec{t}_{(\hat{n})} = \tau^T \hat{n} \quad (2.21)$$

Esta expressão representa as equações de equilíbrio definido.

Fica assim demonstrado que é suficiente conhecer o tensor das tensões τ para poder calcular a tensão no ponto P para qualquer orientação de \hat{n} .

2.1.5 - Equações de equilíbrio indefinido

Antes de iniciar a dedução das equações de equilíbrio indefinido, apresenta-se a expressão correspondente ao teorema da divergência (ou teorema de Gauss).

Considere-se um campo vectorial \vec{F}

$$\vec{F} = (f_1, f_2, f_3) \quad (2.22)$$

As componentes de \vec{F} são funções de x_1 , x_2 e x_3 .

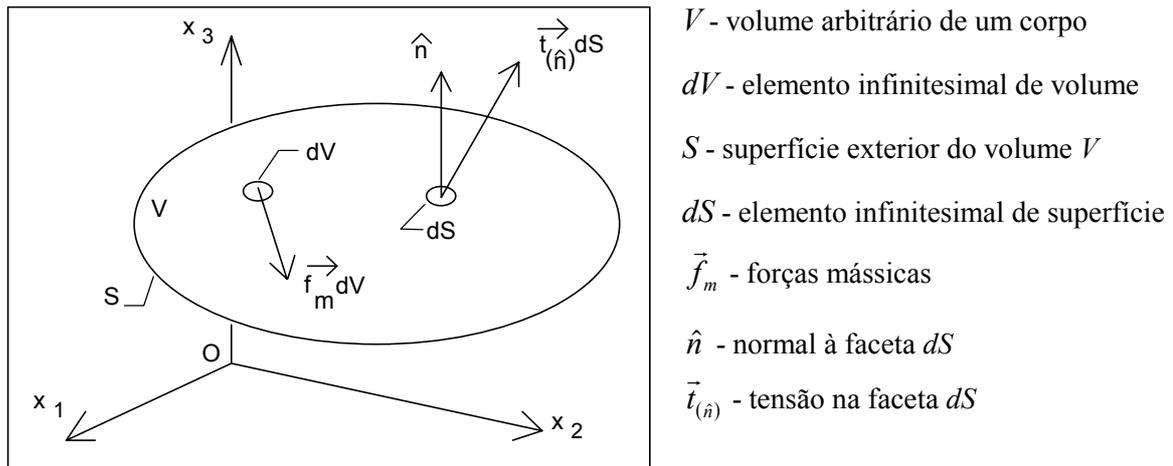
O teorema da divergência (ou teorema de Gauss) justifica a seguinte substituição de um integral de volume por um integral de superfície

$$\int_V \text{div } \vec{F} \, dV = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS \quad (2.23)$$

Substituindo \vec{F} e \hat{n} pelas suas componentes, obtém-se

$$\int_V \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_S (f_1, f_2, f_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) \, dS \quad (2.24)$$

Considere-se agora um volume arbitrário de um corpo, de acordo com a seguinte figura

Fig. 2.9 - Volume V sujeito a forças mássicas e de superfície.

Equilíbrio das forças que actuam sobre o volume V (projecções sobre x_1):

$$\int_V [(\vec{f}_m dV) | \hat{e}_1] + \int_S [(\vec{t}_{(\hat{n})} dS) | \hat{e}_1] = 0 \quad (2.25)$$

$$\int_V (\vec{f}_m | \hat{e}_1) dV + \int_S (\vec{t}_{(\hat{n})} | \hat{e}_1) dS = 0 \quad (2.26)$$

As projecções sobre \hat{e}_1 correspondem às primeiras componentes de cada vector

$$\int_V f_{m1} dV + \int_S t_1^{(\hat{n})} dS = 0 \quad (2.27)$$

Atendendo às equações de equilíbrio definido

$$\int_V f_{m1} dV + \int_S \tau_{j1} n_j dS = 0 \quad (2.28)$$

Nota: a repetição do índice j implica um somatório.

Representando $\sum_{j=1}^3 \tau_{j1} n_j$ como um produto escalar, obtém-se

$$\int_V f_{m1} dV + \int_S (\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}) | (n_1, n_2, n_3) dS = 0 \quad (2.29)$$

Atendendo ao teorema da divergência (ou teorema de Gauss)

$$\int_V f_{m1} dV + \int_V \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) dV = 0 \quad (2.30)$$

$$\int_V \left(f_{m1} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) dV = 0 \quad (2.31)$$

Uma vez que o volume seleccionado é arbitrário, a função integranda tem de ser sempre nula, resultando

$$f_{m1} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (2.32)$$

Efectuando a projecção das forças que actuam sobre o volume V sobre os eixos x_2 e x_3 , obter-se-iam as seguintes equações

$$f_{m2} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} = 0 \quad (2.33)$$

$$f_{m3} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (2.34)$$

Em notação tensorial escreve-se

$$f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.35)$$

Esta expressão representa as equações de equilíbrio indefinido.

Considere-se agora um ponto X no espaço, cujas coordenadas são x_1 , x_2 e x_3 .

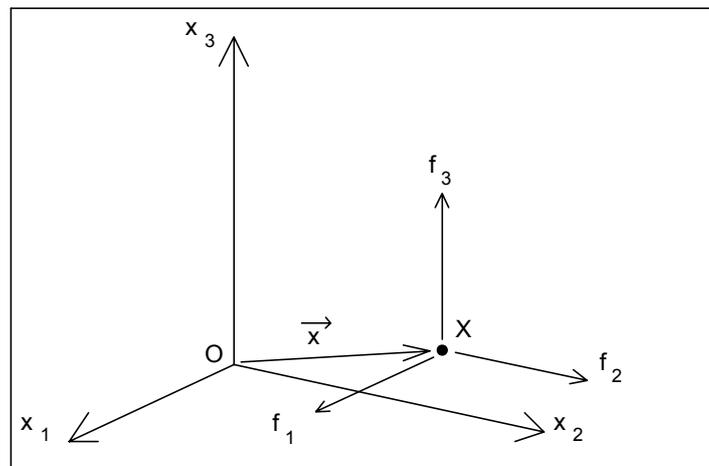


Fig. 2.10 - Ponto X e componentes da força que nela actua.

Neste ponto encontra-se aplicada uma força \vec{F} cujas componentes são f_1 , f_2 e f_3 .

O vector posição do ponto X é designado \vec{x} .

Verifica-se o seguinte

x_1 - distância do ponto X ao plano $(O x_2 x_3)$

x_2 - distância do ponto X ao plano $(O x_1 x_3)$

x_3 - distância do ponto X ao plano $(O x_1 x_2)$

Os momentos de \vec{F} em torno dos diversos eixos são

Momento em torno de x_1 : $m_1 = f_3 x_2 - f_2 x_3$

Momento em torno de x_2 : $m_2 = f_1 x_3 - f_3 x_1$

Momento em torno de x_3 : $m_3 = f_2 x_1 - f_1 x_2$

Nota: o sinal dos momentos respeita a regra do saca rolhas.

Estes três momentos são agrupados no vector \vec{M}

$$\vec{M} = (m_1, m_2, m_3) = (f_3 x_2 - f_2 x_3, f_1 x_3 - f_3 x_1, f_2 x_1 - f_1 x_2) \quad (2.36)$$

Atendendo à definição de produto vectorial, verifica-se que

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \quad (2.37)$$

Considere-se agora o equilíbrio de momentos do volume V (ver Figs 2.9 e 2.10)

$$\int_V \vec{x} \times \vec{f}_m dV + \int_S \vec{x} \times \vec{t}_{(\hat{n})} dS = \vec{0} \quad (2.38)$$

Destas três equações de momentos, selecciona-se a primeira

$$\int_V (x_2 f_{m3} - x_3 f_{m2}) dV + \int_S (x_2 t_3^{(\hat{n})} - x_3 t_2^{(\hat{n})}) dS = 0 \quad (2.39)$$

Em seguida vai-se proceder apenas ao desenvolvimento do integral de superfície.

Atendendo às equações de equilíbrio definido

$$t_2^{(\hat{n})} = \tau_{j2} n_j \quad (2.40)$$

$$t_3^{(\hat{n})} = \tau_{j3} n_j \quad (2.41)$$

Nota: a repetição do índice j implica somatório.

resulta para o integral de superfície

$$\int_S (x_2 \tau_{j3} n_j - x_3 \tau_{j2} n_j) dS \quad (2.42)$$

$$\int_S [x_2 (\tau_{13} n_1 + \tau_{23} n_2 + \tau_{33} n_3) - x_3 (\tau_{12} n_1 + \tau_{22} n_2 + \tau_{32} n_3)] dS \quad (2.43)$$

Reagrupando

$$\int_S [(x_2 \tau_{13} - x_3 \tau_{12}) n_1 + (x_2 \tau_{23} - x_3 \tau_{22}) n_2 + (x_2 \tau_{33} - x_3 \tau_{32}) n_3] dS \quad (2.44)$$

A função integranda pode ser substituída por um produto escalar

$$\int_S (x_2 \tau_{13} - x_3 \tau_{12}, x_2 \tau_{23} - x_3 \tau_{22}, x_2 \tau_{33} - x_3 \tau_{32}) \cdot (n_1, n_2, n_3) dS \quad (2.45)$$

Atendendo ao teorema da divergência (ou teorema de Gauss)

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 \tau_{13} - x_3 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 \tau_{23} - x_3 \tau_{22}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (x_2 \tau_{33} - x_3 \tau_{32}) \right] dV \quad (2.46)$$

$$\int_V \left(x_2 \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \tau_{23} + x_2 \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} - \tau_{32} - x_3 \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right) dV \quad (2.47)$$

$$\int_V \left[x_2 \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right) - x_3 \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right) + \tau_{23} - \tau_{32} \right] dV \quad (2.48)$$

Retomando a equação de equilíbrio de momentos, resulta

$$\int_V (x_2 f_{m3} - x_3 f_{m2}) dV + \int_V \left[x_2 \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right) - x_3 \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right) + \tau_{23} - \tau_{32} \right] dV = 0 \quad (2.49)$$

$$\int_V \left[x_2 \left(f_{m3} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right) - x_3 \left(f_{m2} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right) + \tau_{23} - \tau_{32} \right] dV = 0 \quad (2.50)$$

As expressões entre parênteses curvos são nulas (ver as equações de equilíbrio indefinido), resultando

$$\int_V (\tau_{23} - \tau_{32}) dV = 0 \quad (2.51)$$

Uma vez que o volume seleccionado é arbitrário, a função integranda tem de ser sempre nula, resultando

$$\tau_{23} - \tau_{32} = 0 \quad (2.52)$$

$$\tau_{23} = \tau_{32} \quad (2.53)$$

Desenvolvendo o equilíbrio de momentos do volume V em torno dos eixos x_2 e x_3 , obter-se-iam as seguintes equações

$$\tau_{31} = \tau_{13} \quad (2.54)$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} \quad (2.55)$$

Em notação tensorial pode-se escrever de um modo mais compacto

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2.56)$$

Esta conclusão constitui as equações de reciprocidade de Maxwell.

Conclui-se também que o tensor das tensões é sempre simétrico. Por este motivo, só seis componentes do tensor das tensões são independentes.

Atendendo a esta conclusão, as expressões atrás deduzidas podem tomar a seguinte forma:

Equações de equilíbrio definido

$$t_i^{(\hat{n})} = \tau_{ij} n_j \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} t_1^{(\hat{n})} \\ t_2^{(\hat{n})} \\ t_3^{(\hat{n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \text{SIM.} & & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\vec{t}_{(\hat{n})} = \tau \hat{n} \quad (2.59)$$

Equações de equilíbrio indefinido

$$f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.60)$$

$$f_{mi} + \tau_{ij,j} = 0 \quad (2.61)$$

$$f_{mi} + \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (2.62)$$

2.1.6 - Mudança de referencial

Considere-se a transformação directa entre dois referenciais S e S'

$$\vec{x}' = A \vec{x} \quad (2.63)$$

e a respectiva transformação inversa (ver Capítulo 1)

$$\vec{x} = A^T \vec{x}' \quad (2.64)$$

Considere-se uma faceta cuja normal é o versor \hat{n} . A lei de transformação inversa para este versor é

$$\hat{n} = A^T \hat{n}' \quad (2.65)$$

O vector tensão na faceta de normal \hat{n} pode ser transformado do seguinte modo

$$\vec{t}' = A \vec{t} \quad (2.66)$$

Recorrendo às equações de equilíbrio definido $\vec{t} = \tau \hat{n}$ resulta

$$\vec{t}' = A \tau \hat{n} \quad (2.67)$$

Substituindo \hat{n} de acordo com a lei de transformação inversa resulta

$$\vec{t}' = A \tau A^T \hat{n}' \quad (2.68)$$

No referencial S' as equações de equilíbrio definido escrevem-se

$$\vec{t}' = \tau' \hat{n}' \quad (2.69)$$

Comparando estas duas últimas equações conclui-se que

$$\vec{\tau}' = \underline{A} \vec{\tau} \underline{A}^T \quad (2.70)$$

Em notação tensorial escreve-se

$$\tau'_{pq} = a_{pi} a_{qj} \tau_{ij} \quad (2.71)$$

Conclui-se assim que τ_{ij} é um tensor de segunda ordem, porque respeita a lei de transformação tensorial.

2.1.7 - Tensões principais e invariantes do tensor das tensões

Considere-se um estado de tensão num ponto P . Na generalidade das facetas o vector tensão não é paralelo ao versor da faceta (ver caso A na Fig. 2.11). Contudo, é possível demonstrar que existe um número finito de facetas em que a tensão é paralela ao versor \hat{n} (ver caso B na Fig. 2.11).

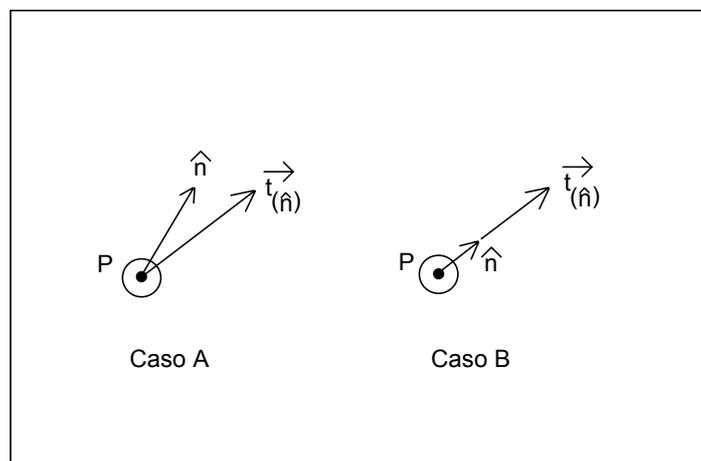


Fig. 2.11 - Vector tensão num ponto P para uma faceta de normal \hat{n} .

Para determinar quais são as facetas em que o vector tensão é paralelo ao versor \hat{n} recorre-se à seguinte equação em que \hat{n} é o versor das facetas que se pretendem determinar.

$$\vec{t}_{(\hat{n})} = \sigma \hat{n} \quad (2.72)$$

Nesta equação, σ é um escalar cujo valor traduz a grandeza e o sentido do vector tensão. O módulo de σ é a grandeza do vector tensão. Uma vez que o versor \hat{n} está orientado para o exterior do corpo, a um σ positivo corresponde uma tensão normal de tracção e a um σ negativo corresponde, obviamente, uma tensão normal de compressão.

Recorrendo às equações de equilíbrio definido $\vec{t}_{(\hat{n})} = \tau \hat{n}$ resulta

$$\tau \hat{n} = \sigma \hat{n} \quad (2.73)$$

Ou, matricialmente

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma n_1 \\ \sigma n_2 \\ \sigma n_3 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

que equivale a

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

ou

$$\begin{bmatrix} (\tau_{11} - \sigma) & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & (\tau_{22} - \sigma) & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & (\tau_{33} - \sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Este sistema de três equações a três incógnitas apresenta como solução o seguinte versor

$$\hat{n} = (n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 0) \quad (2.77)$$

Esta solução trivial não caracteriza nenhuma faceta e não respeita a seguinte condição de norma unitária

$$\|\hat{n}\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1 \quad (2.78)$$

ou

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.79)$$

Para que o sistema de equações (2.76) possua outras soluções, além da solução trivial, é necessário que o seu determinante principal seja nulo. Uma vez que σ é também uma incógnita do problema, é possível calcular o seu valor de tal forma que resulte um sistema de equações indeterminado, i.e., com múltiplas soluções. Entre esta infinidade de soluções, só serão consideradas as que respeitam a condição de norma unitária (2.79).

Assim, os valores de σ que respeitarem a seguinte condição de determinante nulo são aqueles que conduzem à existência de soluções não nulas para o sistema de equações (2.76)

$$\begin{vmatrix} (\tau_{11} - \sigma) & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & (\tau_{22} - \sigma) & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & (\tau_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.80)$$

Desenvolvendo este determinante obtém-se a seguinte equação do terceiro grau que é designada equação característica

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.81)$$

Nesta equação do terceiro grau, cuja incógnita é σ , as expressões de I_1 , I_2 e I_3 são as seguintes

$$I_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \quad (2.82)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{33} & \tau_{31} \\ \tau_{13} & \tau_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix} \quad (2.83)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} \quad (2.84)$$

As três raízes da equação característica (2.81) são as três tensões principais (σ_I , σ_{II} e σ_{III}). A cada tensão principal corresponde uma face em que o vector tensão é paralelo ao versor \hat{n} . Estas três faces designam-se faces principais e as respectivas normais são as direcções principais de tensão.

O cálculo dos versores \hat{n} que caracterizam as direcções principais é efectuado do seguinte modo:

- substituir σ pelo valor de σ_I no sistema de equações (2.76).

- acrescentar ao sistema de equações (2.76) a condição de norma unitária (2.79), resultando um sistema de quatro equações a três incógnitas. A quarta equação é não linear.
- resolver este sistema de equações por substituição. Existe a garantia de pelo menos uma das equações ser dependente das restantes.
- a solução do sistema de equações é um versor \hat{n}_I que caracteriza a faceta principal em que ocorre a tensão σ_I

Este procedimento deve ser repetido com σ_{II} no lugar de σ_I , obtendo-se assim o versor \hat{n}_{II} . Para que o conjunto de versores que definem as direcções principais de tensão constitua um referencial directo, o terceiro versor deve ser calculado com a seguinte expressão (Nota: a demonstração de que \hat{n}_{III} é perpendicular ao plano definido por \hat{n}_I e \hat{n}_{II} será apresentada mais adiante)

$$\hat{n}_{III} = \hat{n}_I \times \hat{n}_{II} \quad (2.85)$$

O cálculo das tensões e direcções principais coincide com o cálculo dos valores e vectores próprios de uma matriz, sendo

$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ - valores próprios de τ_{ij}

$\hat{n}_I, \hat{n}_{II}, \hat{n}_{III}$ - vectores próprios de τ_{ij}

Uma tensão é uma força exercida sobre uma superfície infinitesimal com uma determinada orientação. A tensão em si não depende do sistema de eixos utilizado, mas os valores das suas componentes modificam-se quando a tensão passa a ser expressa noutra referencial. Contudo, numa faceta principal, a grandeza de uma tensão principal e o seu sentido são independentes do referencial utilizado. Portanto, os valores das tensões principais são independentes do referencial. Devido ao facto de as raízes da equação característica (2.81) serem as tensões principais, os valores de I_1, I_2 e I_3 têm de ser também independentes do referencial. Por este motivo, I_1, I_2 e I_3 designam-se invariantes do tensor das tensões e o seu valor não se modifica quando o tensor das tensões passa a estar definido num outro referencial.

Apresenta-se em seguida a demonstração da seguinte afirmação:

- Quando duas tensões principais são distintas, as respectivas direcções principais de tensão são ortogonais entre si e, conseqüentemente, as correspondentes facetas principais são também ortogonais entre si.

Demonstração:

Considerem-se duas tensões principais σ_I e σ_{II} , e os versores das correspondentes facetas principais n_I e n_{II} . Estas tensões principais e estes versores respeitam a equação (2.74), que em notação tensorial apresenta a seguinte forma

$$\tau_{ij} n_j^I = \sigma_I n_i^I \quad (2.86)$$

$$\tau_{ij} n_j^{II} = \sigma_{II} n_i^{II} \quad (2.87)$$

Multiplicado ambos os membros de (2.86) por n_i^{II} e ambos os membros de (2.87) por n_i^I , obtém-se

$$n_i^{II} \tau_{ij} n_j^I = n_i^{II} \sigma_I n_i^I \quad (2.88)$$

$$n_i^I \tau_{ij} n_j^{II} = n_i^I \sigma_{II} n_i^{II} \quad (2.89)$$

Subtraindo a equação (2.89) à equação (2.88), resulta

$$n_i^{II} \tau_{ij} n_j^I - n_i^I \tau_{ij} n_j^{II} = n_i^{II} \sigma_I n_i^I - n_i^I \sigma_{II} n_i^{II} \quad (2.90)$$

que é equivalente a

$$n_j^I n_i^{II} \tau_{ij} - n_i^I n_j^{II} \tau_{ij} = n_i^I n_i^{II} (\sigma_I - \sigma_{II}) \quad (2.91)$$

Trocando i com j no primeiro monómio, resulta

$$n_i^I n_j^{II} \tau_{ji} - n_i^I n_j^{II} \tau_{ij} = n_i^I n_i^{II} (\sigma_I - \sigma_{II}) \quad (2.92)$$

Atendendo à simetria do tensor das tensões, conclui-se que

$$n_i^I n_i^{II} (\sigma_I - \sigma_{II}) = 0 \quad (2.93)$$

Em (2.93), sempre que $\sigma_I \neq \sigma_{II}$, tem de se verificar o seguinte

$$n_i^I n_i^{II} = 0 \quad (2.94)$$

$$n_1^I n_1^{II} + n_2^I n_2^{II} + n_3^I n_3^{II} = 0 \quad (2.95)$$

$$(n_1^I, n_2^I, n_3^I) \cdot (n_1^{II}, n_2^{II}, n_3^{II}) = 0 \quad (2.96)$$

$$\hat{n}_I \perp \hat{n}_{II} \quad (2.97)$$

Se as três tensões principais forem distintas entre si, i.e., $\sigma_I \neq \sigma_{II}$, $\sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ e $\sigma_I \neq \sigma_{III}$, então as três direcções principais são mutuamente ortogonais.

Os versores \hat{n}_I , \hat{n}_{II} e \hat{n}_{III} definem um referencial que se designa referencial principal.

Nas considerações que se seguem o referencial utilizado é o referencial principal. Nestas circunstâncias, as facetas principais são paralelas aos planos coordenados.

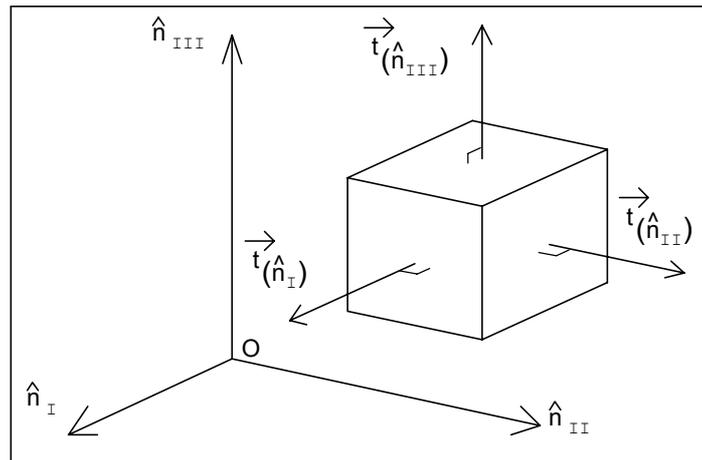


Fig. 2.12 - Referencial principal - tensões nas facetas paralelas aos planos coordenados.

Nas facetas principais o vector tensão é normal à faceta, sendo

$$\vec{t}_{(\hat{n}_I)} = \sigma_I \hat{n}_I \quad (2.98)$$

$$\vec{t}_{(\hat{n}_{II})} = \sigma_{II} \hat{n}_{II} \quad (2.99)$$

$$\vec{t}_{(\hat{n}_{III})} = \sigma_{III} \hat{n}_{III} \quad (2.100)$$

Nestas circunstâncias, o tensor das tensões apresenta a seguinte expressão (ver Secção 2.1.3)

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Apresenta-se em seguida o caso particular de duas tensões principais serem iguais entre si e a terceira ser distinta das outras duas.

$$\sigma_I = \sigma_{II} = a \quad (2.102)$$

$$\sigma_{III} = b \quad (2.103)$$

$$(a \neq b)$$

Vai-se em seguida proceder ao cálculo do vector tensão numa faceta cuja normal \hat{n}' se situa no plano definido por \hat{n}_I e \hat{n}_{II} (ver Fig. 2.13).

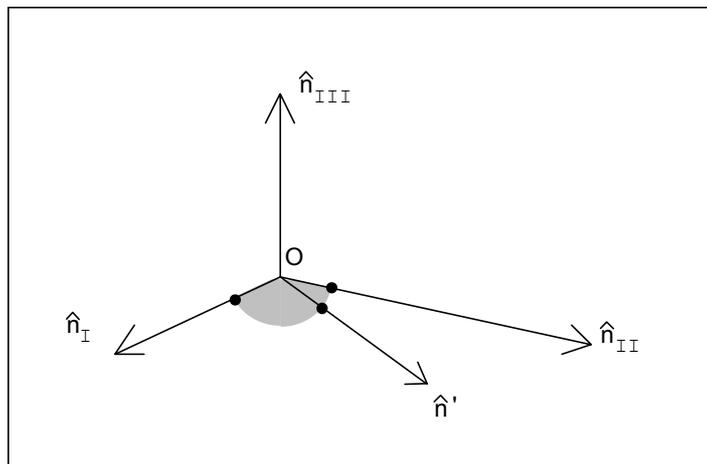


Fig. 2.13 - Referencial principal - \hat{n}' encontra-se no plano definido por \hat{n}_I e \hat{n}_{II} .

Nestas circunstâncias o versor \hat{n}' apresenta as seguintes componentes

$$\hat{n}' = (n'_1, n'_2, 0) \quad (2.104)$$

Recorrendo às equações de equilíbrio definido, tem-se

$$\vec{t}'_{(\hat{n}')} = \tau \hat{n}' \quad (2.105)$$

Atendendo a (2.101), (2.102) e (2.103), resulta

$$\begin{bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a n'_1 \\ a n'_2 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

$$\vec{t}'_{(\hat{n}')} = a \hat{n}' \quad (2.107)$$

$$\vec{t}'_{(\hat{n}')} = \sigma_I \hat{n}' \quad (2.108)$$

Conclusão: qualquer que seja o versor \hat{n}' no plano $(\hat{n}_I, \hat{n}_{II})$, a correspondente faceta é principal e a tensão principal é igual a σ_I . A direcção principal \hat{n}_{III} é normal ao

plano $(\hat{n}_I \hat{n}_{II})$. Conclusões semelhantes seriam obtidas para os casos em que $\sigma_{II} = \sigma_{III}$ ou $\sigma_I = \sigma_{III}$.

Apresenta-se em seguida um outro caso particular em que todas as tensões principais são iguais entre si.

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = a \quad (2.109)$$

Vai-se em seguida proceder ao cálculo do vector tensão numa faceta com orientação arbitrária e normal \hat{n}' . Nestas circunstâncias o versor \hat{n}' apresenta as seguintes componentes

$$\hat{n}' = (n'_1, n'_2, n'_3) \quad (2.110)$$

Recorrendo às equações de equilíbrio definido, tem-se

$$\vec{t}'_{(\hat{n}')} = \tau \hat{n}' \quad (2.111)$$

Atendendo a (2.101) e (2.109), resulta

$$\begin{bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a n'_1 \\ a n'_2 \\ a n'_3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

$$\vec{t}'_{(\hat{n}')} = a \hat{n}' \quad (2.113)$$

$$\vec{t}'_{(\hat{n}')} = \sigma_I \hat{n}' \quad (2.114)$$

Conclusão: qualquer que seja o versor \hat{n}' , a correspondente faceta é principal e a tensão principal é igual a σ_I . Quando as três tensões principais apresentam o mesmo valor, o estado de tensão designa-se isotrópico ou hidrostático. Num estado de tensão isotrópico as tensões tangenciais são nulas em todas as facetas.

Retomando o caso geral, com todas as tensões principais distintas entre si, já foi visto atrás (2.101) que, no referencial principal, o tensor das tensões apresenta a seguinte expressão

$$\tau = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Nestas circunstâncias os invariantes do tensor das tensões apresentam as seguintes expressões

$$I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \quad (2.116)$$

$$I_2 = \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I + \sigma_I \sigma_{II} \quad (2.117)$$

$$I_3 = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \quad (2.118)$$

A tensão numa faceta genérica de normal \hat{n} é dada pela seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} t_1^{(\hat{n})} \\ t_2^{(\hat{n})} \\ t_3^{(\hat{n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I n_1 \\ \sigma_{II} n_2 \\ \sigma_{III} n_3 \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

$$\vec{t}_{(\hat{n})} = (\sigma_I n_1, \sigma_{II} n_2, \sigma_{III} n_3) \quad (2.120)$$

Aplicando a lei de transformação tensorial (2.70) ao tensor (2.115) resulta

$$\vec{\tau}' = A \vec{\tau} A^T \quad (2.121)$$

$$\begin{bmatrix} \tau'_{11} & \tau'_{12} & \tau'_{13} \\ \tau'_{21} & \tau'_{22} & \tau'_{23} \\ \tau'_{31} & \tau'_{32} & \tau'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

Desenvolvendo (2.122) resulta

$$\tau'_{pq} = a_{p1} a_{q1} \sigma_I + a_{p2} a_{q2} \sigma_{II} + a_{p3} a_{q3} \sigma_{III} \quad (2.123)$$

2.1.8 - Tensões tangenciais máximas e mínimas

Nas considerações que se seguem, o vector tensão numa faceta de normal \hat{n} é designado apenas por \vec{t}

$$\vec{t}_{(\hat{n})} = \vec{t} \quad (2.124)$$

O vector tensão (\vec{t}) pode ser considerado como a soma de um vector normal à faceta ($\vec{\sigma}$) com um vector tangente à faceta ($\vec{\tau}$) (ver Fig. 2.14)

$$\vec{t} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} \quad (2.125)$$

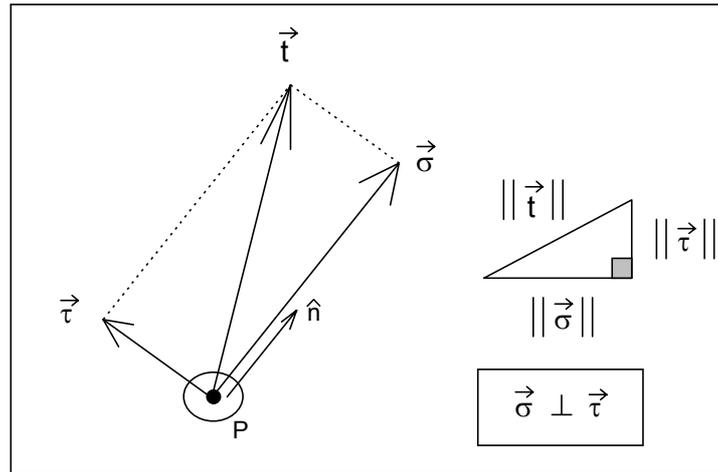


Fig. 2.14 - Decomposição do vector tensão \vec{t} nas suas componentes normal e tangencial.

A componente normal $\vec{\sigma}$ obtém-se projectando o vector \vec{t} sobre o versor normal à faceta (\hat{n})

$$\vec{\sigma} = \sigma \hat{n} = (\vec{t} \cdot \hat{n}) \hat{n} \quad (2.126)$$

A componente tangencial $\vec{\tau}$ obtém-se com a seguinte expressão, que é idêntica a (2.125)

$$\vec{\tau} = \vec{t} - \vec{\sigma} \quad (2.127)$$

Considere-se agora a seguinte simplificação de notação

$$t^2 = \|\vec{t}\|^2 \quad (2.128)$$

$$\sigma^2 = \|\vec{\sigma}\|^2 \quad (2.129)$$

$$\tau^2 = \|\vec{\tau}\|^2 \quad (2.130)$$

Atendendo ao facto de $\vec{\sigma}$ ser perpendicular a $\vec{\tau}$, pode-se escrever a seguinte equação, que relaciona as grandezas dos vectores indicados na Fig. 2.14 (teorema de Pitágoras)

$$t^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2.131)$$

As expressões apresentadas nesta secção até este ponto são genéricas. As considerações que se seguem apenas são válidas se o referencial utilizado for o referencial principal ($\hat{n}_I \hat{n}_{II} \hat{n}_{III}$).

Considere-se uma faceta cujo versor \hat{n} possui componentes (n_1, n_2, n_3) no referencial principal. De acordo com (2.120), o vector tensão nesta faceta apresenta as seguintes componentes no referencial principal

$$\vec{t} = (\sigma_I n_1, \sigma_{II} n_2, \sigma_{III} n_3) \quad (2.132)$$

A norma de \vec{t} é

$$t = \|\vec{t}\| = \sqrt{(\sigma_I n_1)^2 + (\sigma_{II} n_2)^2 + (\sigma_{III} n_3)^2} \quad (2.133)$$

Elevando ambos os membros ao quadrado resulta

$$t^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 \quad (2.134)$$

A grandeza da componente normal (σ) pode ser calculada do seguinte modo

$$\sigma = \vec{t} \cdot \hat{n} \quad (2.135)$$

$$\sigma = (\sigma_I n_1, \sigma_{II} n_2, \sigma_{III} n_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) \quad (2.136)$$

$$\sigma = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \quad (2.137)$$

Atendendo a (2.131) tem-se

$$\tau^2 = t^2 - \sigma^2 \quad (2.138)$$

Substituindo (2.134) e (2.137) em (2.138) resulta

$$\tau^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2 \quad (2.139)$$

Vai-se agora proceder ao cálculo dos valores mínimos e máximos de τ^2 . Devido ao facto de τ ser sempre considerado positivo ou nulo, os mínimos e máximos de τ^2 coincidem com os mínimos e máximos de τ . Interessa conhecer também as facetas em que esses mínimos ou máximos ocorrem. Para calcular estas grandezas, formula-se o seguinte programa matemático

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar ou Maximizar } \tau^2 \\ & \text{sujeito a} \\ & \|\hat{n}\| = 1 \end{aligned} \quad (2.140)$$

A solução de (2.140) é um ponto estacionário do Lagrangeano L , cuja expressão é a seguinte

$$L = \tau^2 + \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) \quad (2.141)$$

Substituindo (2.139) em (2.141) obtém-se

$$L = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2 + \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) \quad (2.142)$$

Os pontos estacionários do Lagrangeano L são as soluções do seguinte sistema de quatro equações não lineares a quatro incógnitas (n_1 , n_2 , n_3 e λ). Supõe-se que os valores das tensões principais (σ_I , σ_{II} e σ_{III}) são conhecidos.

$$\frac{\partial L}{\partial n_1} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma_I^2 n_1 - 2(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) 2\sigma_I n_1 + 2\lambda n_1 = 0 \quad (2.143)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_2} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma_{II}^2 n_2 - 2(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) 2\sigma_{II} n_2 + 2\lambda n_2 = 0 \quad (2.144)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_3} = 0 \Leftrightarrow 2\sigma_{III}^2 n_3 - 2(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) 2\sigma_{III} n_3 + 2\lambda n_3 = 0 \quad (2.145)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 = 0 \quad (2.146)$$

Simplificando estas expressões, resulta

$$n_1 [\sigma_I^2 - 2(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) \sigma_I + \lambda] = 0 \quad (2.147)$$

$$n_2 [\sigma_{II}^2 - 2(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) \sigma_{II} + \lambda] = 0 \quad (2.148)$$

$$n_3 [\sigma_{III}^2 - 2(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) \sigma_{III} + \lambda] = 0 \quad (2.149)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.150)$$

O sistema de equações (2.147)-(2.150) apresenta diversas soluções. Pode-se verificar facilmente que as soluções que são em seguida apresentadas satisfazem as quatro equações, sendo portanto mínimos ou máximos de τ .

Nota: omitem-se os versores de sentido oposto porque se referem à mesma faceta.

1º Conjunto de soluções:

$$\hat{n} = (1,0,0) \text{ ou } \hat{n} = (0,1,0) \text{ ou } \hat{n} = (0,0,1) \Rightarrow \tau = 0 \quad (2.151)$$

Esta conclusão é evidente, porque os versores (2.151) coincidem com os versores das direções principais. Nas facetas principais a tensão é paralela ao versor \hat{n} , sendo nula a componente tangencial da tensão (ver Fig. 2.14). Nas facetas em que τ é nulo a tensão tangencial assume o seu valor mínimo (Nota: τ é sempre maior ou igual a zero).

2º Conjunto de soluções:

$$a) \quad \hat{n}_A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \text{ ou } \hat{n}_B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \Rightarrow \tau_{AB} = \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right| \quad (2.152)$$

$$b) \quad \hat{n}_C = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ ou } \hat{n}_D = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \tau_{CD} = \left| \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right| \quad (2.153)$$

$$c) \quad \hat{n}_E = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ ou } \hat{n}_F = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \tau_{EF} = \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right| \quad (2.154)$$

Tratam-se de facetas que são paralelas a uma das direções principais e fazem 45° com as outras duas (ver Fig. 2.15).

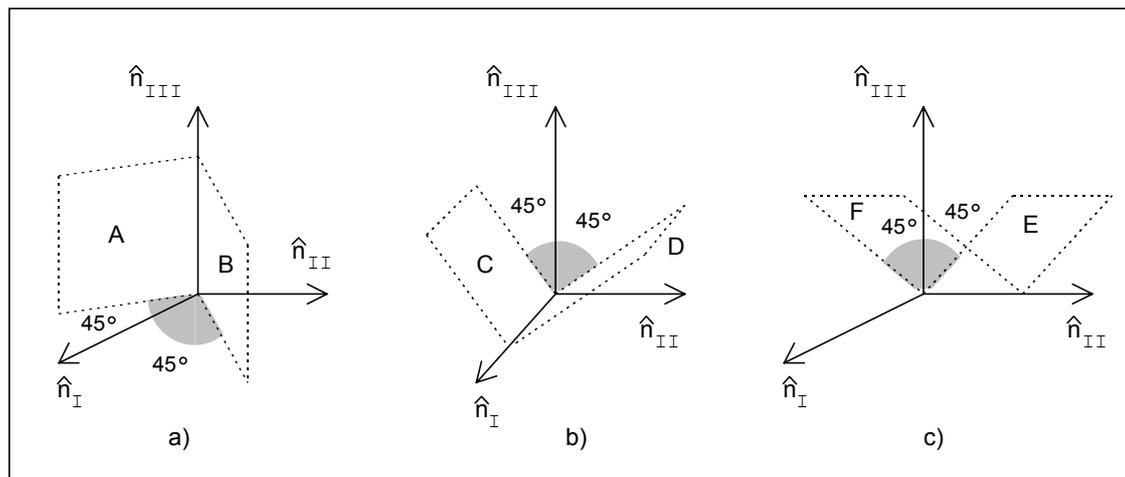


Fig. 2.15 - 2º Conjunto de soluções do sistema de equações não lineares.

A tensão tangencial máxima é o maior dos três valores indicados em (2.152)-(2.154)

$$\tau_{\max} = \max \left(\tau_{AB}, \tau_{CD}, \tau_{EF} \right) \quad (2.155)$$

Se as tensões principais estiverem ordenadas, i.e., $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, o valor da tensão tangencial máxima pode ser calculado com a seguinte expressão

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (2.156)$$

As facetas em que esta tensão tangencial ocorre são as facetas E e F da Fig. 2.15c.

Vai-se agora proceder ao cálculo da grandeza da tensão normal que ocorre nas facetas em que a tensão tangencial é máxima. Atendendo a (2.132) e (2.154), tem-se

$$\vec{t} = (\sigma_I n_1, \sigma_{II} n_2, \sigma_{III} n_3) \quad (2.157)$$

$$\hat{n}_E = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.158)$$

$$\vec{t} = \left(\frac{\sigma_I}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sigma_{III}}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.159)$$

Atendendo a (2.135)

$$\sigma_E = \vec{t} \cdot \hat{n}_E = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \quad (2.160)$$

De um modo semelhante se concluiria que

$$\sigma_F = \vec{t} \cdot \hat{n}_F = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \quad (2.161)$$

Assim se conclui que a grandeza da tensão normal que ocorre nas facetas em que a grandeza da tensão tangencial é máxima (facetas E e F) é

$$\sigma_{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \quad (2.162)$$

3º Conjunto de soluções:

Trata-se de um caso particular em que se verifica o seguinte

$$\sigma_I = \sigma_{II} \neq \sigma_{III} \quad (2.163)$$

Nestas circunstâncias, todos os versores \hat{n} que verificam as seguintes condições correspondem a facetas em que τ é máximo.

$$\begin{cases} n_1^2 + n_2^2 = 1/2 \\ n_3 = \pm 1/\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right| = \left| \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right| \quad (2.164)$$

Na Fig. 2.16 encontra-se representada uma superfície cónica que é tangente a todas as facetas cujo versor normal verifica (2.164).

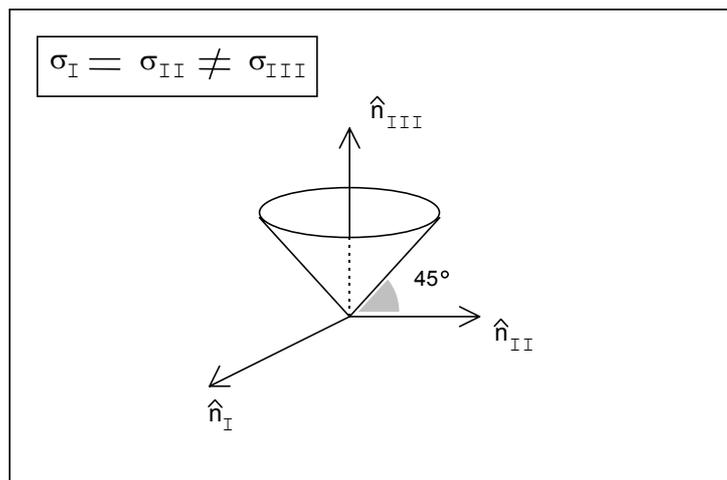


Fig. 2.16 - Superfície cônica tangente a todas as facetas cujo vetor normal verifica (2.164).

Os casos particulares $\sigma_{II} = \sigma_{III} \neq \sigma_I$ e $\sigma_I = \sigma_{III} \neq \sigma_{II}$ são semelhantes ao anteriormente exposto. Para obter as respectivas conclusões, é suficiente efectuar uma circulação de índices.

4º Conjunto de soluções:

Trata-se de um caso particular em que se verifica o seguinte

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} \quad (2.165)$$

Nestas circunstâncias:

- todas as direcções são principais;
- todas as facetas são principais;
- em todas as facetas a tensão tangencial é nula;
- em todas as facetas a grandeza da tensão normal é $\sigma = \sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$;
- trata-se de um estado de tensão hidrostático ou isotrópico.

Este estado de tensão é o que ocorre no interior de um fluido em repouso (por este motivo se designa hidrostático). O significado de isotrópico é o de "igual em todas as direcções".

2.1.9 - Circunferências de Mohr

Apresenta-se em primeiro lugar a equação de uma circunferência cujo centro se encontra sobre o eixo x (ver Fig. 2.17)

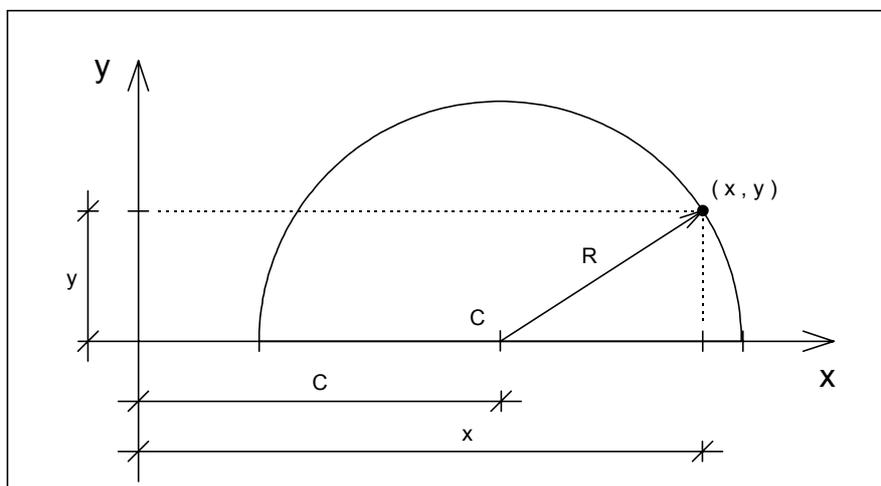


Fig. 2.17 - Circunferência com o centro sobre o eixo x .

Os pontos (x, y) que se encontram sobre a circunferência obedecem à seguinte condição (teorema de Pitágoras)

$$R^2 = y^2 + (x - C)^2 \quad (2.166)$$

Os valores de y^2 obtêm-se com a seguinte expressão

$$y^2 = R^2 - (x - C)^2 \quad (2.167)$$

Considere-se agora um estado de tensão cujas tensões principais são σ_I , σ_{II} e σ_{III} . No caso de todas as tensões principais serem distintas e de se encontrarem ordenadas por ordem decrescente, tem-se

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \quad (2.168)$$

Considere-se um versor \hat{n} com componentes (n_1, n_2, n_3) no referencial principal. Na faceta de normal \hat{n} a tensão normal é σ e a tensão tangencial é τ . Atendendo às equações (2.131), (2.134) e (2.137) e ao facto de o versor \hat{n} apresentar norma unitária, é possível escrever o seguinte sistema de três equações

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.169)$$

$$\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 = \sigma \quad (2.170)$$

$$\sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2.171)$$

Supondo que todas as grandezas são conhecidas com exceção de n_1 , n_2 e n_3 , é possível formular matricialmente o seguinte sistema de três equações lineares a três incógnitas (n_1^2 , n_2^2 e n_3^2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_I & \sigma_{II} & \sigma_{III} \\ \sigma_I^2 & \sigma_{II}^2 & \sigma_{III}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

Este sistema de equações lineares pode ser resolvido por substituição ou recorrendo à regra de Cramer, obtendo-se as seguintes expressões para as incógnitas n_1^2 , n_2^2 e n_3^2

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_{II})(\sigma - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \quad (2.173)$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_{III})(\sigma - \sigma_I)}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)} \quad (2.174)$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_I)(\sigma - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})} \quad (2.175)$$

Uma vez que n_1^2 , n_2^2 e n_3^2 são sempre não negativos, os segundos membros de (2.173), (2.174) e (2.175) têm de ser também não negativos. Atendendo a (2.168), os segundos membros de (2.173) e (2.175) apresentam denominador positivo, enquanto o segundo membro de (2.174) apresenta denominador negativo. Por estes motivos, verifica-se o seguinte

$$n_1^2 \geq 0 \Rightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_{II})(\sigma - \sigma_{III}) \geq 0 \quad (2.176)$$

$$n_2^2 \geq 0 \Rightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_{III})(\sigma - \sigma_I) \leq 0 \quad (2.177)$$

$$n_3^2 \geq 0 \Rightarrow \tau^2 + (\sigma - \sigma_I)(\sigma - \sigma_{II}) \geq 0 \quad (2.178)$$

Estas três inequações podem ser escritas na seguinte forma

$$\tau^2 \geq -(\sigma - \sigma_{II})(\sigma - \sigma_{III}) \quad (2.179)$$

$$\tau^2 \leq -(\sigma - \sigma_{III})(\sigma - \sigma_I) \quad (2.180)$$

$$\tau^2 \geq -(\sigma - \sigma_I)(\sigma - \sigma_{II}) \quad (2.181)$$

Recorrendo a operações algébricas elementares, é possível obter as seguintes inequações, que são equivalentes a (2.179), (2.180) e (2.181), respectivamente

$$\tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right)^2 - \left(\sigma - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \right)^2 \quad (2.182)$$

$$\tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right)^2 - \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)^2 \quad (2.183)$$

$$\tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 - \left(\sigma - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)^2 \quad (2.184)$$

Por analogia com a equação (2.167) (ver Fig. 2.17), definem-se os seguintes parâmetros

$$R_1 = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} ; C_1 = \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \quad (2.185)$$

$$R_2 = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} ; C_2 = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \quad (2.186)$$

$$R_3 = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} ; C_3 = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \quad (2.187)$$

As inequações (2.182), (2.183) e (2.184) podem ser escritas recorrendo a estes parâmetros

$$\tau^2 \geq R_1^2 - (\sigma - C_1)^2 \quad (2.188)$$

$$\tau^2 \leq R_2^2 - (\sigma - C_2)^2 \quad (2.189)$$

$$\tau^2 \geq R_3^2 - (\sigma - C_3)^2 \quad (2.190)$$

Uma vez que τ se considera sempre não negativo, conclui-se o seguinte (ver Fig. 2.18):

- a inequação (2.188) impõe que os pares (σ, τ) se situem acima de uma semi-circunferência de raio R_1 e centro $(C_1, 0)$;
- a inequação (2.189) impõe que os pares (σ, τ) se situem abaixo de uma semi-circunferência de raio R_2 e centro $(C_2, 0)$;
- a inequação (2.190) impõe que os pares (σ, τ) se situem acima de uma semi-circunferência de raio R_3 e centro $(C_3, 0)$;

Assim se conclui que o lugar geométrico dos possíveis pares (σ, τ) é a região que na Fig. 2.18 se encontra sombreada.

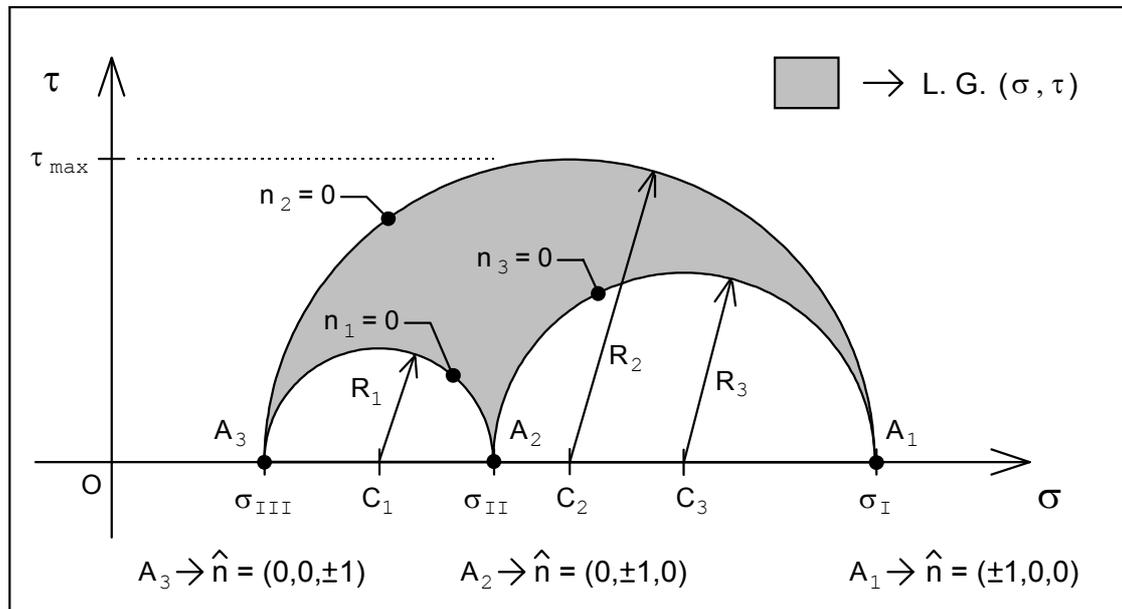


Fig. 2.18 - Circunferências de Mohr.

Da Fig. 2.18 é possível extrair as seguintes conclusões:

- A tensão normal máxima é σ_I (pode ser positiva ou negativa).
- A tensão normal mínima é σ_{III} (pode ser positiva ou negativa).
- A tensão tangencial máxima é

$$\tau_{\max} = R_2 = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (2.191)$$

Nota: este resultado coincide com o expresso em (2.156).

- Na faceta em que ocorre τ_{\max} , a tensão normal é a seguinte

$$\sigma_{\tau_{\max}} = C_2 = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \quad (2.192)$$

Nota: este resultado coincide com o expresso em (2.162).

A partir da equação (2.173), que em seguida se reproduz, é possível obter mais algumas conclusões

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_{II})(\sigma - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \quad (2.193)$$

$$n_1^2 (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) = \tau^2 + (\sigma - \sigma_{II})(\sigma - \sigma_{III}) \quad (2.194)$$

Recorrendo às expressões de R_1 e C_1 indicadas em (2.185), é possível mostrar a equivalência entre as equações (2.194) e (2.195)

$$n_1^2 (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) = \tau^2 - R_1^2 + (\sigma - C_1)^2 \quad (2.195)$$

A seguinte equação é equivalente à anterior

$$\tau^2 = R_1^2 + n_1^2 (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) - (\sigma - C_1)^2 \quad (2.196)$$

Considerado

$$r_1^2 = R_1^2 + n_1^2 (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) \quad (2.197)$$

resulta

$$\tau^2 = r_1^2 - (\sigma - C_1)^2 \quad (2.198)$$

De acordo com (2.167), a equação (2.198) corresponde a uma circunferência de centro $(C_1, 0)$ e raio r_1 no plano (σ, τ) . O valor de r_1 pode ser calculado com a seguinte expressão, que resulta de (2.197) após a substituição de R_1 pela sua expressão (2.185)

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + n_1^2 (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \quad (2.199)$$

O valor de r_1 depende de σ_I , σ_{II} , σ_{III} e n_1 . Para um determinado estado de tensão num ponto, σ_I , σ_{II} e σ_{III} apresentam valores fixos. Portanto, atendendo a (2.198) e (2.199), conclui-se que a cada valor de n_1 correspondem pares (σ, τ) situados sobre uma circunferência de centro $(C_1, 0)$ e raio $r_1(n_1)$. Analogamente se pode concluir que os pontos situados sobre uma circunferência de centro $(C_1, 0)$ e raio r_1 apresentam um valor constante de n_1 .

Apresenta-se em seguida o caso particular de ser $n_1 = 0$. Da equação (2.199) resulta

$$n_1 = 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2} = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} = R_1 \quad (2.200)$$

Considerações semelhantes às que relacionam n_1 , R_1 , C_1 e r_1 poderiam ser obtidas para n_2 , R_2 , C_2 e r_2 e também para n_3 , R_3 , C_3 e r_3 . É assim possível concluir o seguinte (ver Fig. 2.18)

- a) Aos pontos situados sobre a semi-circunferência de raio R_1 correspondem versores com $n_1 = 0$.
- b) Aos pontos situados sobre a semi-circunferência de raio R_2 correspondem versores com $n_2 = 0$.
- c) Aos pontos situados sobre a semi-circunferência de raio R_3 correspondem versores com $n_3 = 0$.

Uma vez que o ponto A_1 da Fig. 2.18 se situa sobre as circunferências às quais corresponde $n_2 = 0$ e $n_3 = 0$, pela condição de norma unitária (2.169) n_1^2 tem de ser unitário. Esta conclusão era esperada, porque ao ponto A_1 corresponde $\sigma = \sigma_I$ e $\tau = 0$ (faceta principal). Conclusões semelhantes se obteriam para os pontos A_2 e A_3 da Fig. 2.18.

2.1.10 - Tensões octaédricas

Na Fig. 2.19 estão representadas as oito facetas que se apresentam igualmente inclinadas em relação ao referencial principal

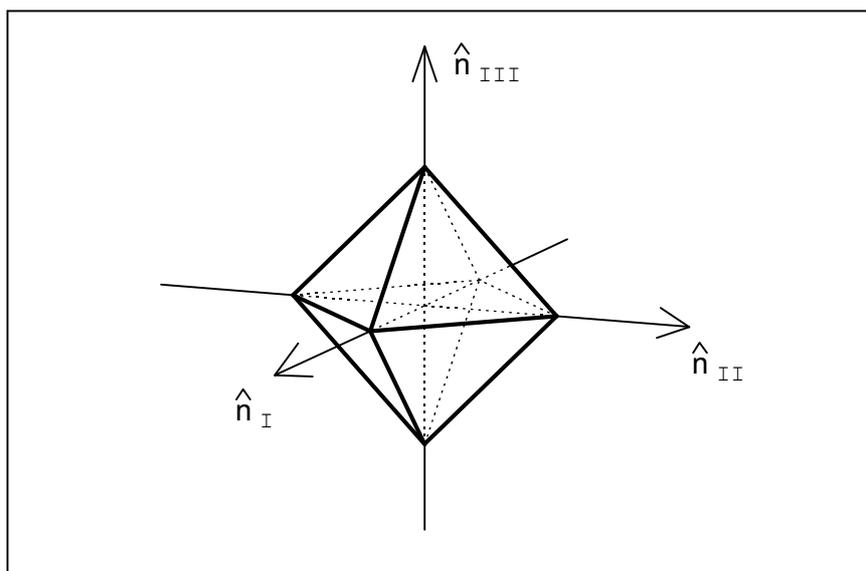


Fig. 2.19 - Facetas octaédricas.

Em qualquer uma das oito facetas octaédricas o respectivo versor apresenta a seguinte expressão geral

$$\hat{n}_{oct} = (n_{oct_1}, n_{oct_2}, n_{oct_3}) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (2.201)$$

Uma vez que este versor se encontra no referencial principal, é possível utilizar a expressão (2.137) para calcular a componente normal da tensão

$$\sigma_{oct} = \sigma_I n_{oct_1}^2 + \sigma_{II} n_{oct_2}^2 + \sigma_{III} n_{oct_3}^2 \quad (2.202)$$

Substituindo as componentes de \hat{n}_{oct} por (2.201) obtém-se

$$\sigma_{oct} = \sigma_I \frac{1}{3} + \sigma_{II} \frac{1}{3} + \sigma_{III} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) \quad (2.203)$$

A expressão (2.116) fornece o valor de I_1 em função das tensões principais, resultando

$$\sigma_{oct} = \frac{I_1}{3} \quad (2.204)$$

De um modo semelhante e recorrendo a (2.134) é possível calcular o quadrado da norma do vector tensão nas facetas octaédricas

$$t_{oct}^2 = \sigma_I^2 n_{oct_1}^2 + \sigma_{II}^2 n_{oct_2}^2 + \sigma_{III}^2 n_{oct_3}^2 \quad (2.205)$$

$$t_{oct}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) \quad (2.206)$$

Atendendo a (2.116) e (2.117), é possível demonstrar a equivalência entre os segundos membros de (2.206) e (2.207)

$$t_{oct}^2 = \frac{1}{3} (I_1^2 - 2I_2) \quad (2.207)$$

Recorrendo a (2.138), é possível calcular a grandeza da componente tangencial da tensão nas facetas octaédricas (τ_{oct})

$$\tau_{oct}^2 = t_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2 \quad (2.208)$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{3} (I_1^2 - 2I_2) - \left(\frac{I_1}{3} \right)^2 \quad (2.209)$$

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \quad (2.210)$$

De (2.204) e (2.210) se conclui que a tensão normal octaédrica σ_{oct} e a tensão tangencial octaédrica τ_{oct} apenas dependem dos invariantes do tensor das tensões, sendo também invariantes.

2.1.11 - Tensor hidrostático e tensor de desvio

A tensão média $\bar{\sigma}$ é calculada com a seguinte expressão

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = \frac{I_1}{3} \quad (2.211)$$

O tensor das tensões pode ser decomposto na soma de dois tensores de acordo com a seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{11} - \bar{\sigma} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \bar{\sigma} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad (2.212)$$

ou

$$\underline{\tau} = \underline{\tau}_{\sim H} + \underline{\tau}' \quad (2.213)$$

O tensor $\underline{\tau}_{\sim H}$ designa-se tensor hidrostático ou isotrópico e apresenta as características já descritas no 4º conjunto de soluções da Secção 2.1.8.

O tensor $\underline{\tau}'$ designa-se tensor do desvio das tensões. Este tensor possui tensões principais σ' e direcções principais \hat{n}' que verificam a seguinte equação

$$\underline{\tau}' \hat{n}' = \sigma' \hat{n}' \quad (2.214)$$

Em notação tensorial tem-se

$$\tau'_{ij} n'_j = \sigma' n'_i \quad (2.215)$$

Atendendo a (2.212), a expressão tensorial de τ'_{ij} é

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \bar{\sigma} \delta_{ij} \quad (2.216)$$

Nesta expressão δ_{ij} representa o delta de Kronecker.

Substituindo (2.216) em (2.215) resulta

$$\left(\tau_{ij} - \bar{\sigma} \delta_{ij}\right) n'_j = \sigma' n'_i \quad (2.217)$$

$$\tau_{ij} n'_j - \bar{\sigma} \delta_{ij} n'_j = \sigma' n'_i \quad (2.218)$$

$$\tau_{ij} n'_j - \bar{\sigma} n'_i = \sigma' n'_i \quad (2.219)$$

$$\tau_{ij} n'_j = \left(\sigma' + \bar{\sigma}\right) n'_i \quad (2.220)$$

$$\tau \hat{n}' = \left(\sigma' + \bar{\sigma}\right) \hat{n}' \quad (2.221)$$

Os versores \hat{n}' que verificam (2.221) coincidem com os versores \hat{n} que verificam (2.73). Assim se conclui que as direcções principais do tensor do desvio das tensões coincidem com as direcções principais do tensor das tensões.

Da comparação de (2.221) com (2.73) resulta também a seguinte conclusão

$$\sigma = \sigma' + \bar{\sigma} \quad (2.222)$$

$$\sigma' = \sigma - \bar{\sigma} \quad (2.223)$$

As tensões principais do tensor do desvio das tensões podem ser calculadas com as seguintes expressões

$$\sigma'_{I} = \sigma_{I} - \bar{\sigma} \quad (2.224)$$

$$\sigma'_{II} = \sigma_{II} - \bar{\sigma} \quad (2.225)$$

$$\sigma'_{III} = \sigma_{III} - \bar{\sigma} \quad (2.226)$$

2.2 - Estado plano de tensão

Em muitas situações, o estado de tensão apresenta um determinado conjunto de particularidades que permitem que o seu estudo seja efectuado considerando apenas duas dimensões.

2.2.1 - Formulação

Se as componentes τ_{31} , τ_{32} e τ_{33} do tensor das tensões forem nulas (ver Figs 2.7 e 2.20), devido à simetria de $\tilde{\tau}$, as componentes τ_{13} e τ_{23} também são nulas, resultando

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.227)$$

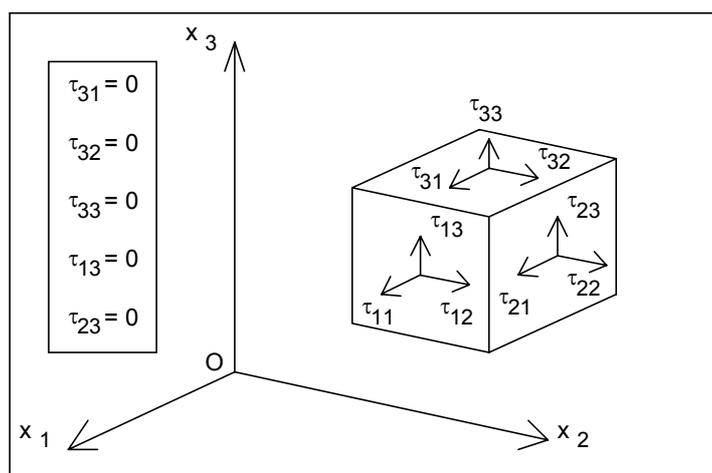


Fig. 2.20 - Estado plano de tensão - componentes nulas do tensor das tensões.

O estado de tensão caracterizado pelo tensor (2.227) é o que se verifica na superfície exterior de um corpo na ausência de forças de superfície e nos casos em que ocorre o seguinte (ver Fig. 2.21):

- corpo de espessura h muito pequena quando comparada com as outras duas dimensões;
- corpo simétrico em relação a um plano médio (x_1, x_2) ;
- todas as acções paralelas ao plano médio (x_1, x_2) ;
- todas as acções simétricas em relação ao plano médio (x_1, x_2) ;
- ausência de acções nas superfícies não ortogonais ao plano médio (x_1, x_2) .

Pode-se assim considerar que o tensor das tensões em qualquer ponto de um corpo com estas características é o correspondente a (2.227).

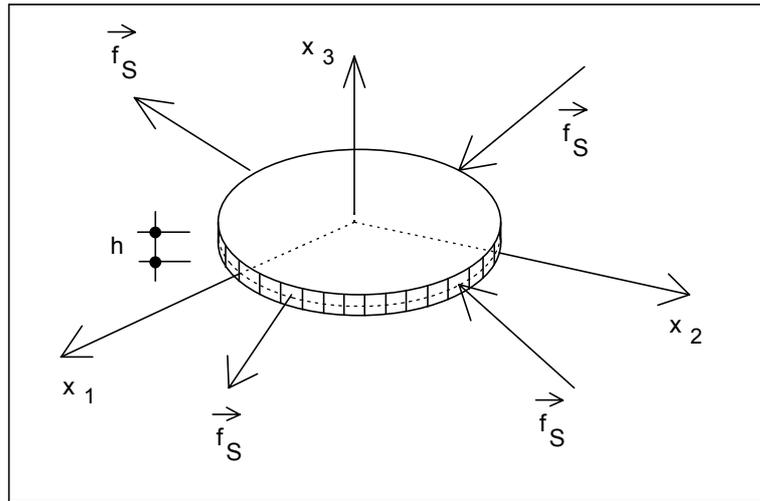


Fig. 2.21 - Corpo sujeito a um estado plano de tensão.

No estudo do estado plano de tensão, é habitual designar os eixos x_1 e x_2 por x e y , as tensões normais por σ e as tensões tangenciais por τ . Por este motivo procede-se à seguinte substituição de notação

$$\sigma_x = \tau_{11} \quad (2.228)$$

$$\sigma_y = \tau_{22} \quad (2.229)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{12} = \tau_{21} \quad (2.230)$$

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.231)$$

Os invariantes do tensor (2.231) são os seguintes

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y \quad (2.232)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \quad (2.233)$$

$$I_3 = 0 \quad (2.234)$$

Uma vez que o terceiro invariante é nulo, as raízes da equação característica (2.81) podem ser calculadas de um modo mais simples

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.235)$$

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma = 0 \quad (2.236)$$

$$(\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2) \sigma = 0 \quad (2.237)$$

As soluções da equação característica são as seguintes

$$\sigma_I = \frac{I_1 + \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2} \quad (2.238)$$

$$\sigma_{II} = \frac{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2} \quad (2.239)$$

$$\sigma_{III} = 0 \quad (2.240)$$

A direcção principal associada à tensão principal σ_{III} é o eixo x_3 da Fig. 2.21. As direcções principais correspondentes a σ_I e σ_{II} são paralelas ao plano (x_1, x_2) .

Substituindo (2.232) e (2.233) em (2.238) e (2.239) obtém-se a seguinte expressão para as tensões principais σ_I e σ_{II}

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.241)$$

É habitual designar por σ_I a maior tensão principal, que é a que resulta da soma das duas parcelas do segundo membro de (2.241). Obviamente, da diferença resulta σ_{II} .

Na Fig. 2.22 está representado o plano (x_1, x_2) da Fig. 2.21. Tal como no caso tridimensional, o vector tensão $(\vec{t}_{(\hat{n})})$ pode ser decomposto nas suas componentes normal $(\vec{\sigma})$ e tangencial $(\vec{\tau})$. O versor \hat{n} é normal à faceta, correspondendo-lhe um ângulo α (o sentido positivo está indicado na Fig. 2.22). Ao versor \hat{m} corresponde um ângulo igual a $\alpha + 90^\circ$.

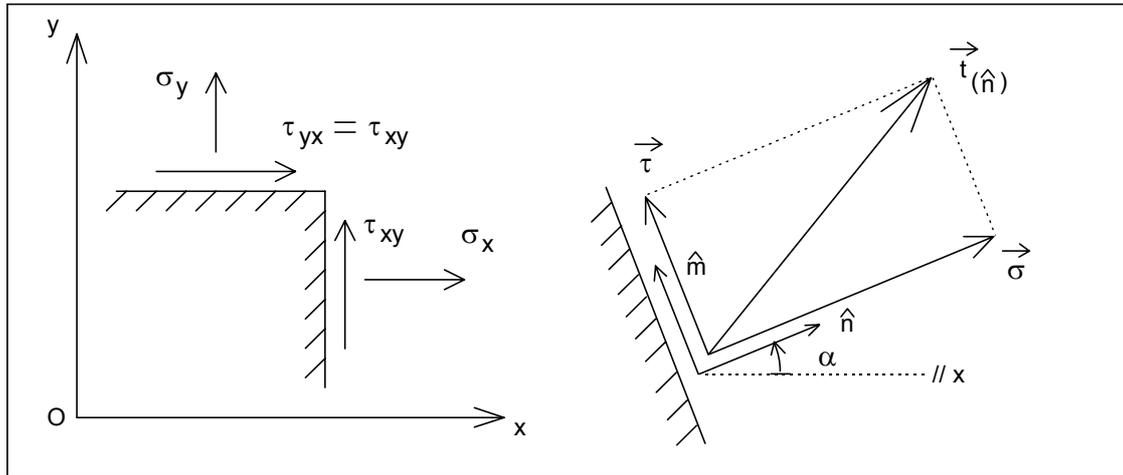


Fig. 2.22 - Estado plano de tensão - componentes do vector tensão.

De acordo com a Fig. 2.22, os versores \hat{n} e \hat{m} apresentam as seguintes componentes

$$\hat{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \quad (2.242)$$

$$\hat{m} = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \quad (2.243)$$

Atendendo a (2.231) e a (2.242), as equações de equilíbrio definido (2.59) apresentam a seguinte expressão

$$\vec{t}_{(\hat{n})} = \tau \hat{n} \quad (2.244)$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.245)$$

Atendendo a (2.126), tem-se de novo

$$\sigma = \vec{t} \cdot \hat{n} \quad (2.246)$$

$$\sigma = (\sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha, \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha, 0) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \quad (2.247)$$

Simplificando esta expressão resulta

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin(2\alpha) \quad (2.248)$$

A um valor positivo de σ corresponde uma tracção e a um valor negativo corresponde uma compressão.

De um modo semelhante tem-se

$$\tau = \vec{t} \cdot \hat{m} \quad (2.249)$$

$$\tau = \left(\sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha, \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha, 0 \right) \cdot \left(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0 \right) \quad (2.250)$$

$$\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cos(2\alpha) \quad (2.251)$$

O valor de τ pode ser positivo ou negativo.

Nas facetas principais a tensão tangencial é nula. Por este motivo, para calcular os valores de α aos quais correspondem as direcções principais, basta igualar a zero a expressão (2.251), resultando

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cos(2\alpha) = 0 \quad (2.252)$$

que é equivalente à seguinte equação

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.253)$$

Uma vez que a função $\tan(x)$ possui período de 180° , as soluções (2α) e $(2\alpha + 180^\circ)$ satisfazem a equação (2.253). Assim, são principais as duas facetas às quais correspondem os seguintes ângulos (ver Fig. 2.23)

$$\alpha_I = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad (2.254)$$

$$\alpha_{II} = \alpha_I + 90^\circ \quad (2.255)$$

Para se ficar a saber a qual das tensões principais corresponde cada um destes ângulos, deve-se recalculer as tensões principais σ_I e σ_{II} com a expressão (2.248).

$$\sigma_I = \sigma_x \cos^2 \alpha_I + \sigma_y \sin^2 \alpha_I + \tau_{xy} \sin(2\alpha_I) \quad (2.256)$$

$$\sigma_{II} = \sigma_x \cos^2 \alpha_{II} + \sigma_y \sin^2 \alpha_{II} + \tau_{xy} \sin(2\alpha_{II}) \quad (2.257)$$

Com a simples utilização da expressão (2.241) não é possível determinar a qual das tensões principais corresponde cada uma das direcções principais.

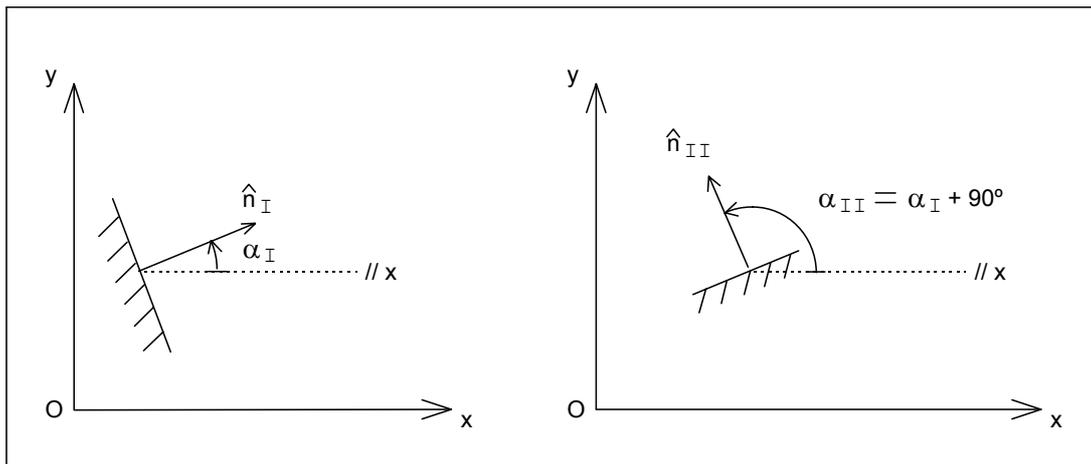


Fig. 2.23 - Estado plano de tensão - facetas principais.

2.2.2 - Circunferência de Mohr

Considere-se uma circunferência com as características indicadas na Fig. 2.24.

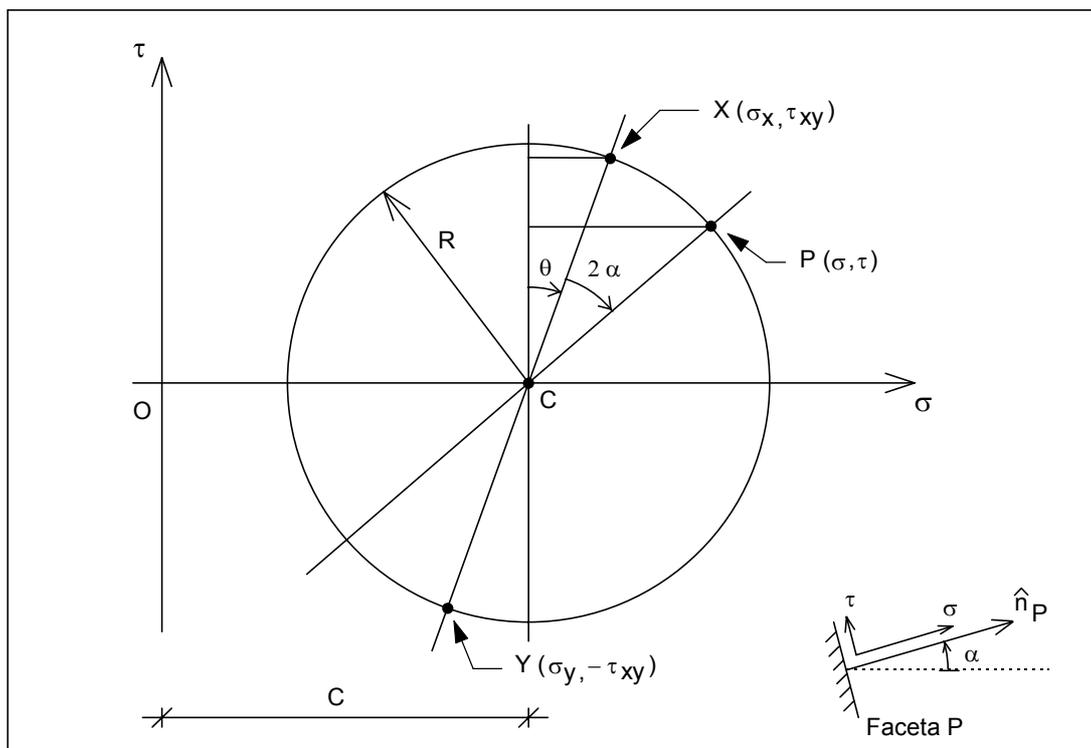


Fig. 2.24 - Estado plano de tensão - circunferência de Mohr.

A posição dos pontos X e Y depende dos elementos do tensor das tensões (2.231) (σ_x , σ_y e τ_{xy}). Aos pontos X e Y correspondem facetas com ângulos $\alpha=0$ e $\alpha=90^\circ$ respectivamente (ver Fig. 2.22). Ao ponto P corresponde uma faceta genérica com tensão normal σ , tensão tangencial τ e ângulo α . A circunferência tem centro no ponto $(C, 0)$ e raio R . De acordo com a Fig. 2.24 verifica-se o seguinte

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (2.258)$$

$$R \sin \theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (2.259)$$

$$R \cos \theta = \tau_{xy} \quad (2.260)$$

A equação paramétrica da circunferência é constituída pelas duas seguintes equações

$$\sigma = C + R \sin(\theta + 2\alpha) \quad (2.261)$$

$$\tau = R \cos(\theta + 2\alpha) \quad (2.262)$$

Desenvolvendo o seno e o coseno da soma obtém-se

$$\sigma = C + R \sin \theta \cos(2\alpha) + R \cos \theta \sin(2\alpha) \quad (2.263)$$

$$\tau = -R \sin \theta \sin(2\alpha) + R \cos \theta \cos(2\alpha) \quad (2.264)$$

Substituindo em (2.263) e (2.264) C , $R \sin \theta$ e $R \cos \theta$ pelos segundos membros de (2.258), (2.259) e (2.260) obtêm-se as seguintes expressões

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha) \quad (2.265)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cos(2\alpha) \quad (2.266)$$

Recorrendo apenas a equações trigonométricas é possível demonstrar a equivalência entre as expressões (2.265) e (2.248), bem como a equivalência entre as expressões (2.266) e (2.251). Desta forma fica provado que os pontos situados sobre a circunferência da Fig. 2.24 constituem o lugar geométrico dos possíveis pares (σ, τ) . A cada posição do ponto P sobre a circunferência corresponde o ângulo 2α que se encontra definido na Fig. 2.24. A faceta em que ocorre a tensão correspondente ao ponto P é definida pelo ângulo α .

Apresentam-se em seguida algumas observações relativas à circunferência de Mohr que se encontra representada na Fig. 2.24.

- quando α é nulo, o ponto P coincide com o ponto X e tem-se $\sigma = \sigma_x$ e $\tau = \tau_{xy}$ (ver Fig. 2.22);
- quando $\alpha = 90^\circ$, $2\alpha = 180^\circ$, o ponto P coincide com o ponto Y e tem-se $\sigma = \sigma_y$ e $\tau = -\tau_{xy}$ (ver Fig. 2.22);
- quando uma faceta roda α (ver Fig. 2.22), o respectivo ponto roda sobre a circunferência 2α em sentido contrário (ver Fig. 2.24);

A observação c) é válida para duas facetas A e B quaisquer, caracterizadas pelos versores \hat{n}_A e \hat{n}_B (ver Fig. 2.25).

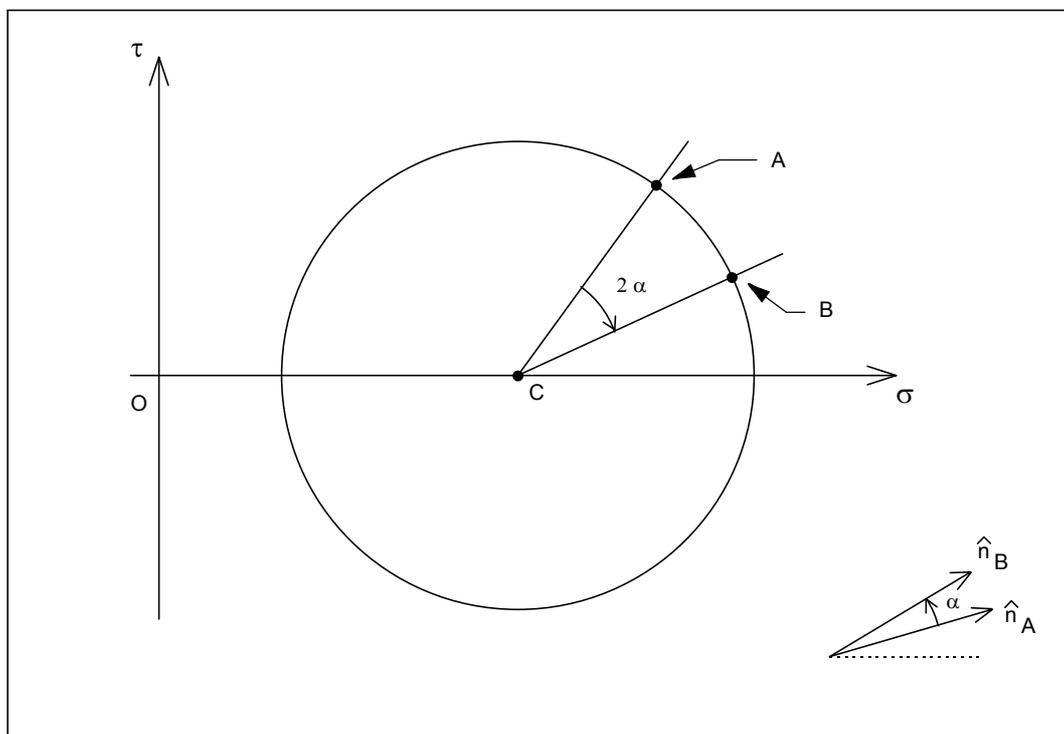


Fig. 2.25 - Representação gráfica do ângulo entre duas facetas quaisquer.

A convenção de sinal associada à tensão normal σ e à tensão tangencial τ é a seguinte:

- a tensão normal σ é positiva quando provoca tracção;
- a tensão tangencial τ é positiva nas condições indicadas na Fig. 2.26.

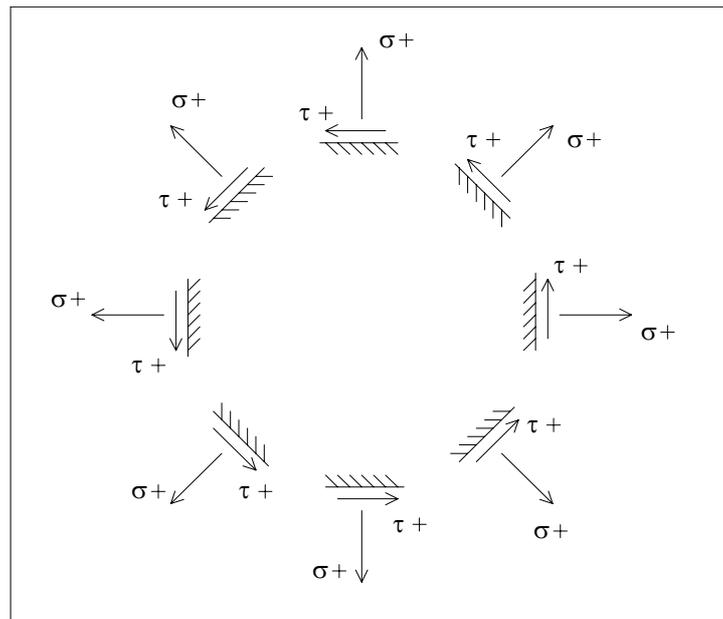


Fig. 2.26 - Estado plano de tensão - sentidos positivos de σ e τ .

Na Fig. 2.27 encontra-se esquematizado o motivo pelo qual na expressão (2.251) a um valor de $\alpha=90^\circ$ corresponde $\tau=-\tau_{xy}$.

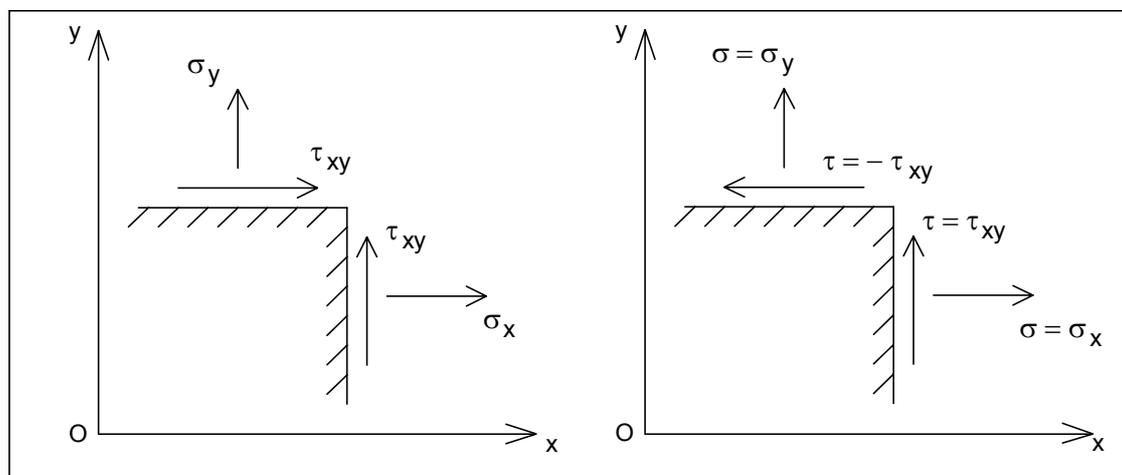


Fig. 2.27 - Estado plano de tensão - facetas com $\alpha=0$ e $\alpha=90^\circ$.

Na Fig. 2.28 é apresentado o modo de determinar graficamente a orientação da faceta correspondente ao ponto P .

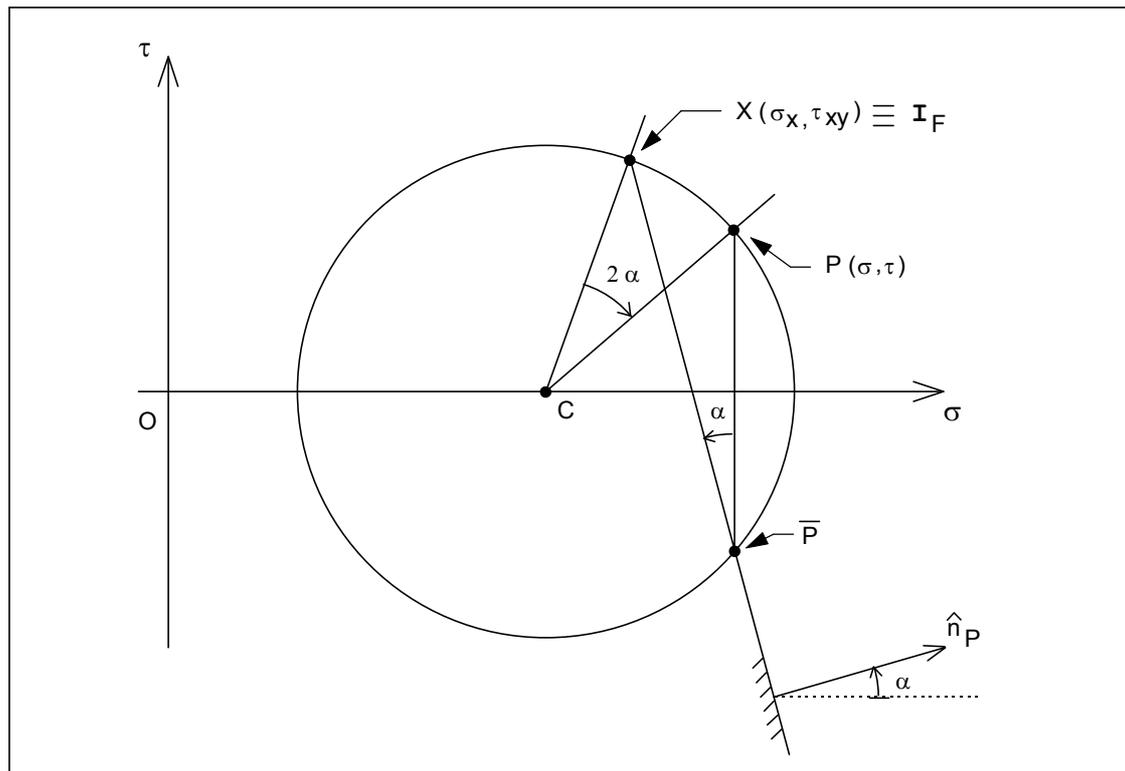


Fig. 2.28 - Circunferência de Mohr - definição do polo irradiante das facetas.

Considere-se que o polo irradiante das facetas (I_F) coincide sempre com o ponto X . Simetricamente em relação ao eixo σ determina-se o ponto \bar{P} em correspondência com o ponto P . Traçando uma recta do ponto I_F para o ponto \bar{P} encontra-se a faceta em que ocorre a tensão normal σ e a tensão tangencial τ correspondentes ao ponto P . A justificação deste procedimento baseia-se no facto de o ângulo ao centro (XCP) ser sempre o dobro do ângulo inscrito ($X\bar{P}P$).

Na Fig. 2.29 encontram-se assinalados os pontos aos quais corresponde uma tensão tangencial nula. Estes pontos representam as tensões principais σ_I e σ_{II} . A orientação das respectivas facetas determina-se unindo o polo irradiante das facetas (I_F) com os pontos $(\sigma_I, 0)$ e $(\sigma_{II}, 0)$.

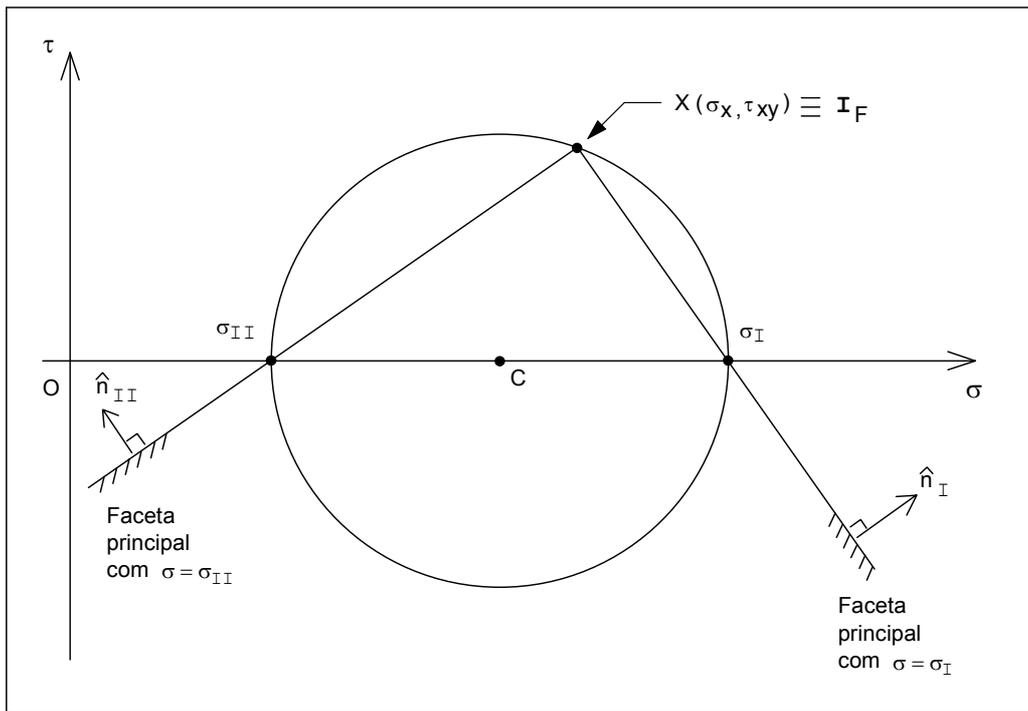


Fig. 2.29 - Tensões principais e respectivas facetas.

Na Fig. 2.30 encontram-se representadas as facetas em que ocorrem os valores extremos da tensão tangencial. Apenas são consideradas as facetas paralelas ao eixo x_3 (ver Fig. 2.21).

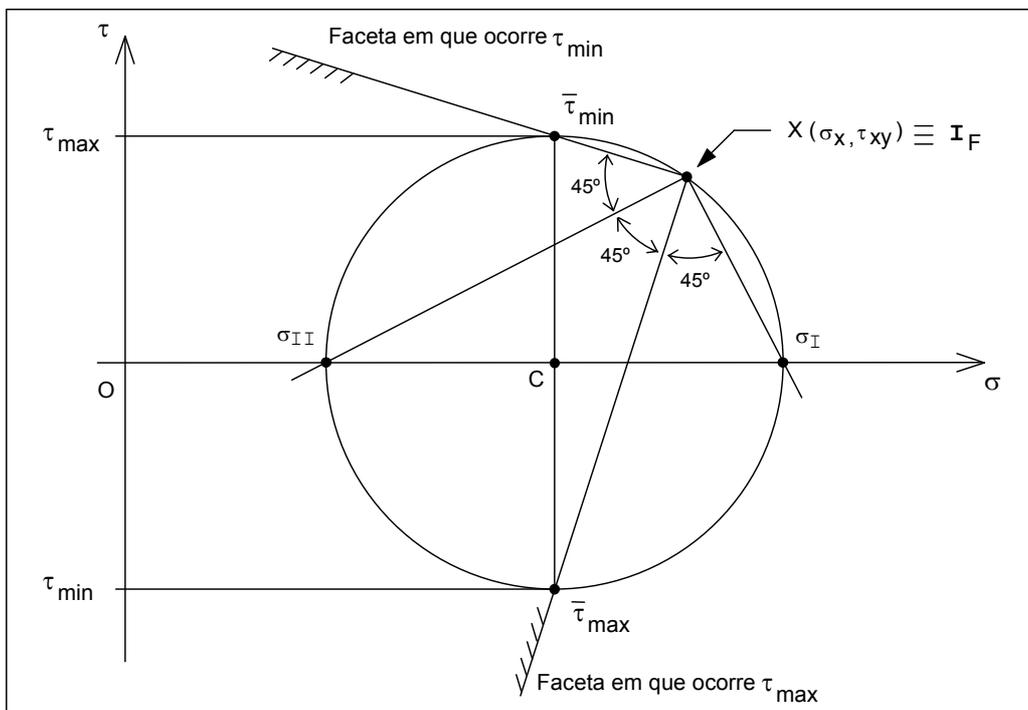


Fig. 2.30 - Valores extremos da tensão tangencial.

Na Fig. 2.30 verifica-se que as facetas em que ocorrem os valores extremos da tensão tangencial fazem ângulos de 45° com as facetas principais, porque ao ângulo ao centro $(\bar{\tau}_{\min} C \sigma_{II})$ (90°) corresponde o ângulo inscrito $(\bar{\tau}_{\min} X \sigma_{II})$ (45°).

Na Fig. 2.30 é também possível constatar que a tensão tangencial máxima é

$$\tau_{\max} = R = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \quad (2.267)$$

Na faceta em que ocorre a tensão tangencial máxima a tensão normal é (ver Fig. 2.24)

$$\sigma_{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (2.268)$$

Da Fig. 2.31 é possível extrair a seguinte relação

$$\tan(2\alpha_I) = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.269)$$

Esta equação, que permite calcular o ângulo de inclinação das facetas principais, coincide com (2.254).

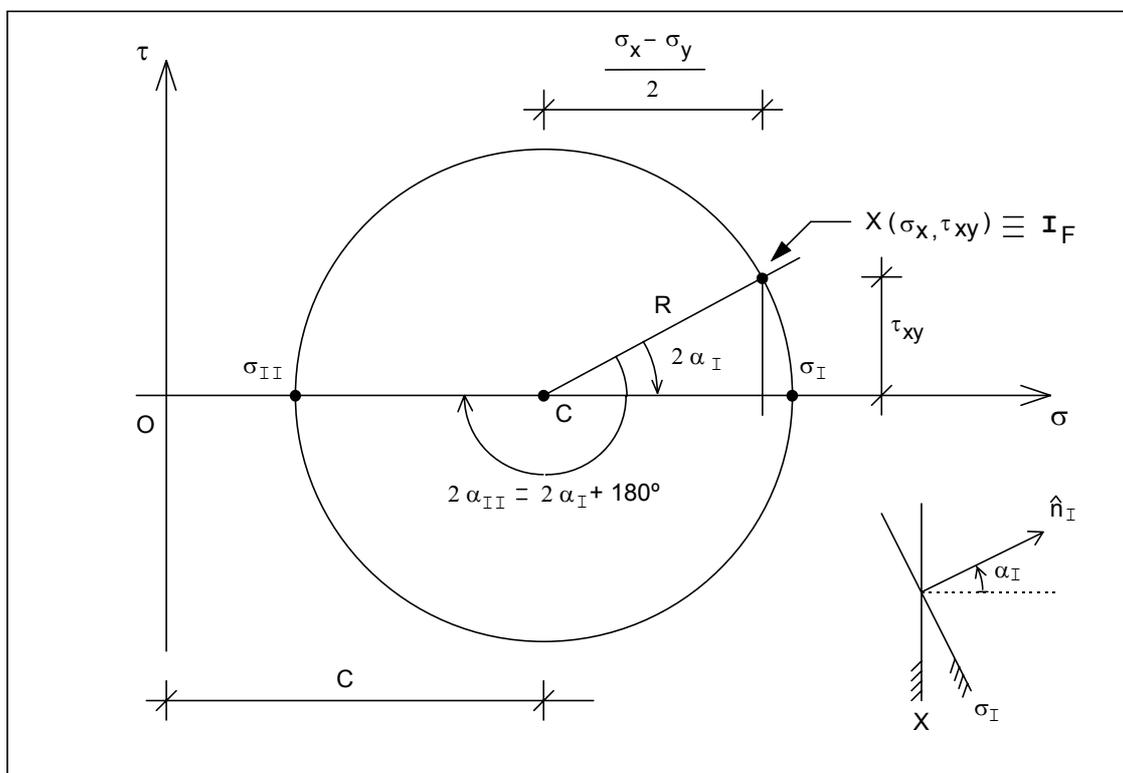


Fig. 2.31 - Cálculo do ângulo das facetas principais.

Da Fig. 2.31 é também possível constatar que

$$\sigma_{I,II} = C \pm R \quad (2.270)$$

sendo

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (2.271)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.272)$$

Substituindo (2.271) e (2.272) em (2.270), obtém-se (2.241).

2.2.3 - Facetas conjugadas

Considere-se o estado de tensão num ponto P e duas facetas A e B com orientações distintas (ver Fig. 2.32).

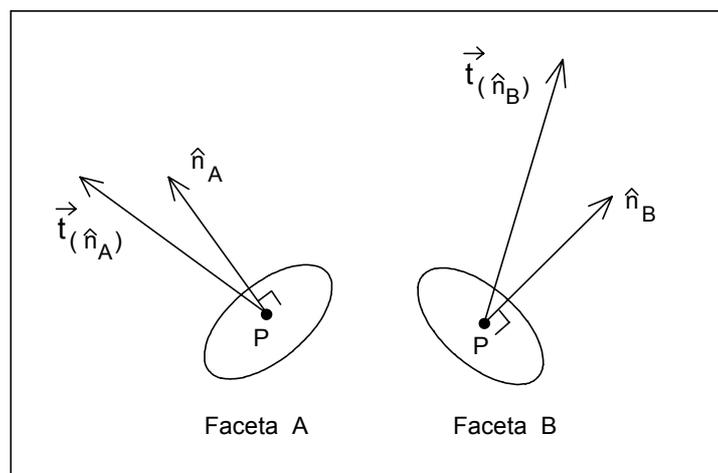


Fig. 2.32 - Par de facetas contendo o ponto P .

As equações de equilíbrio definido (2.59) no caso da faceta A são as seguintes

$$\vec{t}_{(\hat{n}_A)} = \tau \hat{n}_A \quad (2.273)$$

Em notação indicial tem-se

$$t_{A_i} = \tau_{ij} n_{A_j} \quad (2.274)$$

Multiplicando ambos os membros por n_{B_i} obtém-se

$$n_{B_i} t_{A_i} = n_{B_i} \tau_{ij} n_{A_j} \quad (2.275)$$

Trocando os índices i e j entre si resulta

$$n_{B_j} t_{A_j} = n_{B_j} \tau_{ji} n_{A_i} \quad (2.276)$$

Uma vez que o tensor das tensões é simétrico, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, resultando

$$n_{B_j} t_{A_j} = n_{A_i} \tau_{ij} n_{B_j} \quad (2.277)$$

Procedendo de um modo semelhante em relação à faceta B , tem-se

$$\vec{t}_{(\hat{n}_B)} = \tau \hat{n}_B \quad (2.278)$$

$$t_{B_i} = \tau_{ij} n_{B_j} \quad (2.279)$$

Multiplicando ambos os membros por n_{A_i} obtém-se

$$n_{A_i} t_{B_i} = n_{A_i} \tau_{ij} n_{B_j} \quad (2.280)$$

Comparando (2.277) com (2.280) verifica-se que

$$n_{B_j} t_{A_j} = n_{A_i} t_{B_i} \quad (2.281)$$

Em notação matricial tem-se

$$\vec{t}_{(\hat{n}_A)} | \hat{n}_B = \vec{t}_{(\hat{n}_B)} | \hat{n}_A \quad (2.282)$$

Esta equação é sempre válida para qualquer par de facetas.

Considere-se agora um estado plano de tensão num ponto e as facetas A e B representadas na Fig. 2.33.

A faceta A é uma faceta qualquer e a faceta B é paralela ao vector tensão na faceta A . Nestas condições tem-se

$$\vec{t}_{(\hat{n}_A)} // \text{Faceta } B \Rightarrow \vec{t}_{(\hat{n}_A)} \perp \hat{n}_B \Rightarrow \vec{t}_{(\hat{n}_A)} | \hat{n}_B = 0 \quad (2.283)$$

Atendendo a (2.282) verifica-se ser

$$\vec{t}_{(\hat{n}_B)} | \hat{n}_A = 0 \Rightarrow \vec{t}_{(\hat{n}_B)} \perp \hat{n}_A \Rightarrow \vec{t}_{(\hat{n}_B)} // \text{Faceta } A \quad (2.284)$$

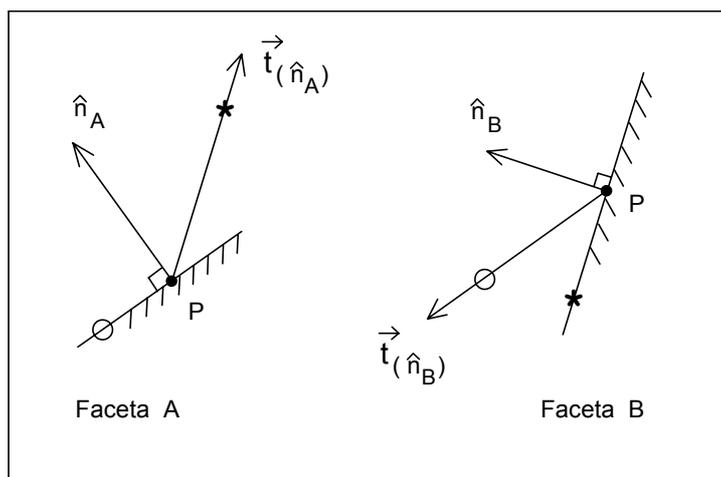


Fig. 2.33 - Estado plano de tensão - faceta B paralela à tensão na faceta A .

Assim se conclui que, quando a faceta B é paralela à tensão que actua na faceta A , então a tensão que actua na faceta B é paralela à faceta A . Nestas circunstâncias as facetas A e B designam-se facetas conjugadas.

3 - ESTADO DE DEFORMAÇÃO

Quando são aplicadas forças a um corpo, este deforma-se, sendo possível estudar as características da deformação independentemente das forças que a originaram. Tal como no capítulo anterior, o caso geral tridimensional é descrito em primeiro lugar, seguindo-se o caso particular do estado plano de deformação.

3.1 - Deformação homogénea

Considere-se um corpo sólido e contínuo sujeito a uma deformação que o faz passar de um estado inicial para um estado final (ver Fig. 3.1). Esta deformação é provocada por um conjunto de forças, que não necessitam de ser caracterizadas quando se está a estudar apenas as características da deformação.

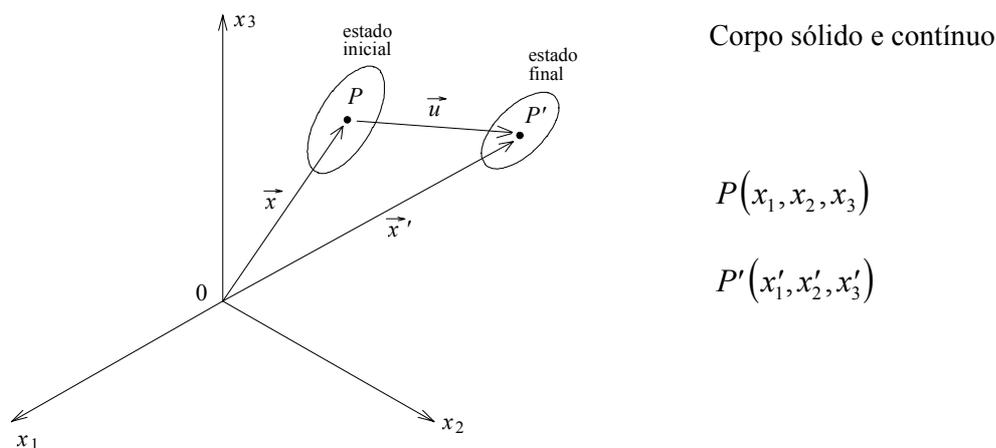


Figura 3.1 - Corpo sujeito a uma deformação - estado inicial e estado final.

O vector deslocamento \vec{u} apresenta as seguintes três componentes

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad (3.1)$$

De acordo com a Fig. 3.1, o novo vector posição do ponto P (\vec{x}') obtém-se por soma vectorial do vector posição inicial (\vec{x}) com o vector deslocamento (\vec{u})

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{u} \quad (3.2)$$

Em notação tensorial tem-se

$$x'_i = x_i + u_i \quad (3.3)$$

Nas considerações que se seguem supõe-se que as deformações são infinitesimais. Na realidade, sempre que as deformações sejam pequenas quando comparadas com as dimensões do corpo consideram-se válidas as expressões deduzidas para o caso das deformações infinitesimais. Nestas circunstâncias, admite-se que o vector deslocamento \vec{u} apresenta componentes infinitesimais. A dedução de algumas expressões que serão apresentadas mais adiante requer que as componentes de \vec{u} sejam funções contínuas e que apresentem 1^{as}, 2^{as} e 3^{as} derivadas contínuas.

Na Fig. 3.2 está representado um corpo sujeito a uma deformação. O ponto Q encontra-se na vizinhança infinitesimal do ponto P , antes e após a deformação caracterizada pelo campo de deslocamentos \vec{u} .

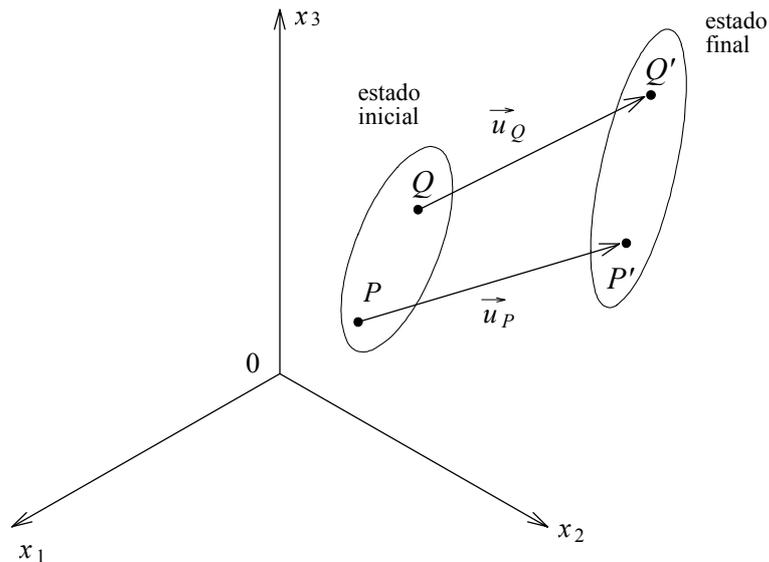


Figura 3.2 - Corpo sujeito a uma deformação.

Cada uma das componentes do vector deslocamento \vec{u} dependem da posição do ponto

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (3.4)$$

Desenvolvendo cada uma das componentes de \vec{u} em série de Taylor, obtém-se

$$\begin{aligned}
(u_i)_Q &= (u_i)_P + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_P (x_1^Q - x_1^P) + \\
&+ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right)_P (x_2^Q - x_2^P) + \\
&+ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right)_P (x_3^Q - x_3^P) + \\
&+ \text{termos de ordem superior à primeira} \quad (i = 1,2,3)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Considerando $\Delta x_i = x_i^Q - x_i^P$ e, desprezando os termos de ordem superior à primeira, tem-se

$$(u_i)_Q = (u_i)_P + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_P \Delta x_j \quad \begin{cases} i = 1,2,3 \\ j \text{ é um índice mudo} \end{cases} \tag{3.6}$$

Se a origem do referencial seleccionado coincidir com o ponto P , Δx_j são as coordenadas de um ponto Q situado na vizinhança infinitesimal de P , passando a designar-se apenas x_j .

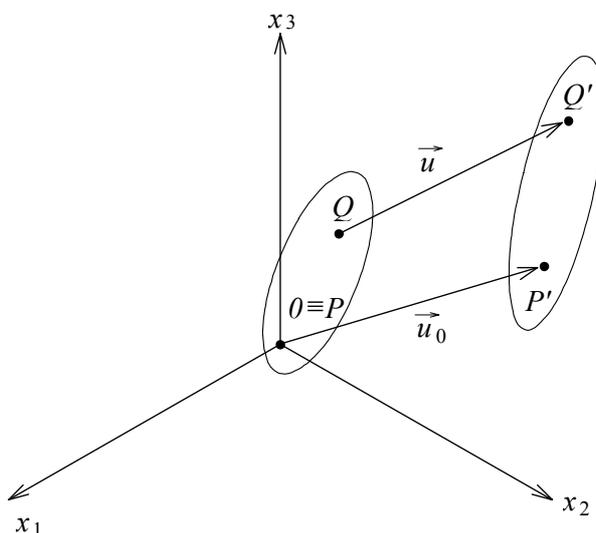


Figura 3.3 - Corpo sujeito a uma deformação.

O deslocamento do ponto P passa a ser o deslocamento da origem (\vec{u}_0) e o deslocamento do ponto Q passa a ser o deslocamento de um ponto genérico (\vec{u})

$$u_i = u_{i0} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 x_j \quad (3.7)$$

Nesta expressão u_{i0} e $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0$ são constantes. Assim, nas condições atrás especificadas, considera-se que as componentes do deslocamento (u_i) são funções lineares das coordenadas (x_j) .

Considerando

$$e_{i0} = u_{i0} \quad (3.8)$$

$$e_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 \quad (3.9)$$

tem-se

$$u_i = e_{i0} + e_{ij} x_j \quad (3.10)$$

Conforme se verá mais adiante, o facto de esta relação ser linear implica que na vizinhança infinitesimal de um ponto, todos os pontos apresentam a mesma deformação, tratando-se portanto de uma deformação homogénea.

Atendendo a (3.3) e a (3.10) tem-se sucessivamente

$$x'_i = x_i + u_i \quad (3.11)$$

$$u_i = e_{i0} + e_{ij} x_j \quad (3.12)$$

$$x'_i = x_i + e_{i0} + e_{ij} x_j \quad (3.13)$$

Uma vez que δ_{ij} representa o delta de Kronecker, é verdadeira a seguinte relação

$$x_i = \delta_{ij} x_j \quad (3.14)$$

Substituindo x_i em (3.13) resulta

$$x'_i = \delta_{ij} x_j + e_{i0} + e_{ij} x_j \quad (3.15)$$

$$x'_i = e_{i0} + (\delta_{ij} + e_{ij}) x_j \quad (3.16)$$

A expressão (3.16) caracteriza uma transformação afim.

Uma vez que a deformação não dá origem à sobreposição de matéria, nem ao aparecimento de vazios, tem de existir uma correspondência biunívoca entre os pontos do corpo no estado inicial e no estado final (ver Fig. 3.2). Por estes motivos, a relação inversa tem de ser também uma transformação afim, com as mesmas características da relação (3.16)

$$x_i = e'_{i0} + (\delta_{ij} + e'_{ij})x'_j \quad (3.17)$$

A transformação afim apresenta as seguintes propriedades:

1) Planos transformam-se em planos

Os pontos pertencentes a um plano π verificam a seguinte equação em que A_1, A_2, A_3 e B são constantes

$$A_i x_i + B = 0 \quad (3.18)$$

Substituindo (3.17) resulta

$$A_i \left[e'_{i0} + (\delta_{ij} + e'_{ij})x'_j \right] + B = 0 \quad (3.19)$$

$$A_i e'_{i0} + A_i (\delta_{ij} + e'_{ij})x'_j + B = 0 \quad (3.20)$$

$$\left[A_i (\delta_{ij} + e'_{ij}) \right] x'_j + (A_i e'_{i0} + B) = 0 \quad (3.21)$$

Esta expressão corresponde a um plano, cuja equação é a seguinte (A'_j e B' são constantes)

$$A'_j x'_j + B' = 0 \quad (3.22)$$

Assim se conclui que, após a aplicação de uma transformação afim aos pontos de um plano, o conjunto de pontos resultantes continuam a constituir um plano.

2) Rectas transformam-se em rectas

Considere-se uma recta definida pela intersecção de dois planos π_1 e π_2 (ver Fig. 3.4). Uma vez que planos se transformam em planos, após a transformação, os pontos da recta continuam a estar situados na intersecção dos dois planos (π'_1 e π'_2), continuando a constituir uma recta.

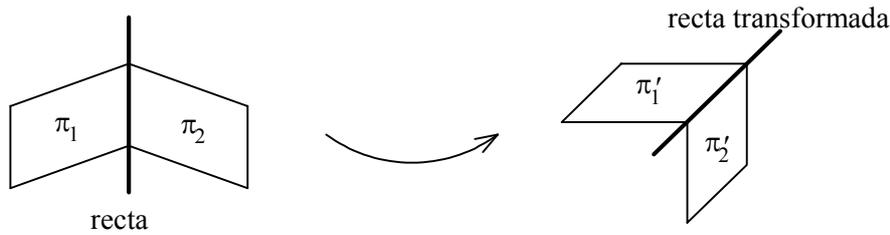


Figura 3.4 - Transformação afim de uma recta.

3) Planos paralelos transformam-se em planos paralelos

Considerem-se dois planos paralelos, cujos pontos verificam as seguintes equações

$$A_i x_i + B = 0 \quad (3.23)$$

$$A_i x_i + C = 0 \quad (3.24)$$

De acordo com (3.21), os seus transformados são

$$\left[A_i (\delta_{ij} + e'_{ij}) \right] x'_j + (A_i e'_{i0} + B) = 0 \quad (3.25)$$

$$\left[A_i (\delta_{ij} + e'_{ij}) \right] x'_j + (A_i e'_{i0} + C) = 0 \quad (3.26)$$

De um modo semelhante ao que foi atrás exposto, tem-se

$$A'_j x'_j + B' = 0 \quad (3.27)$$

$$A'_j x'_j + C' = 0 \quad (3.28)$$

Assim se verifica que os planos paralelos (3.23) e (3.24) se transformam nos planos paralelos (3.27) e (3.28).

4) Rectas paralelas transformam-se em rectas paralelas

Duas rectas paralelas resultam da intersecção de dois planos paralelos por um terceiro plano (ver Fig. 3.5).

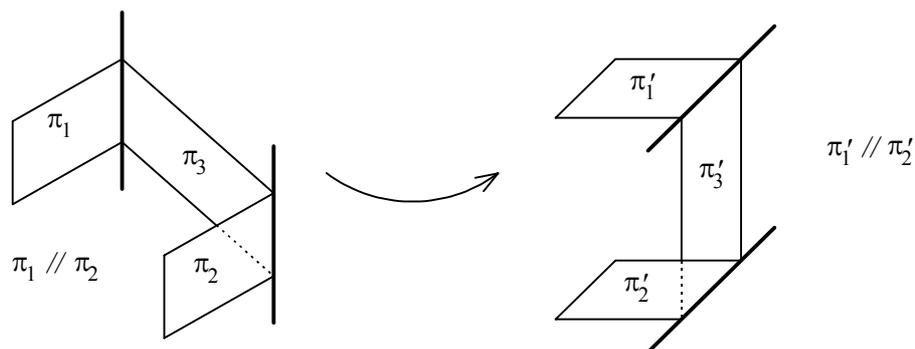


Figura 3.5 - Transformação afim de duas rectas paralelas.

Uma vez que os planos π_1 e π_2 se mantêm paralelos após a transformação, as rectas também se mantêm paralelas.

Na Fig. 3.6 encontra-se representada a transformação afim de um cubo, sendo possível visualizar as quatro conclusões atrás obtidas:

- 1) Planos transformam-se em planos
- 2) Rectas transformam-se em rectas
- 3) Planos paralelos transformam-se em planos paralelos
- 4) Rectas paralelas transformam-se em rectas paralelas

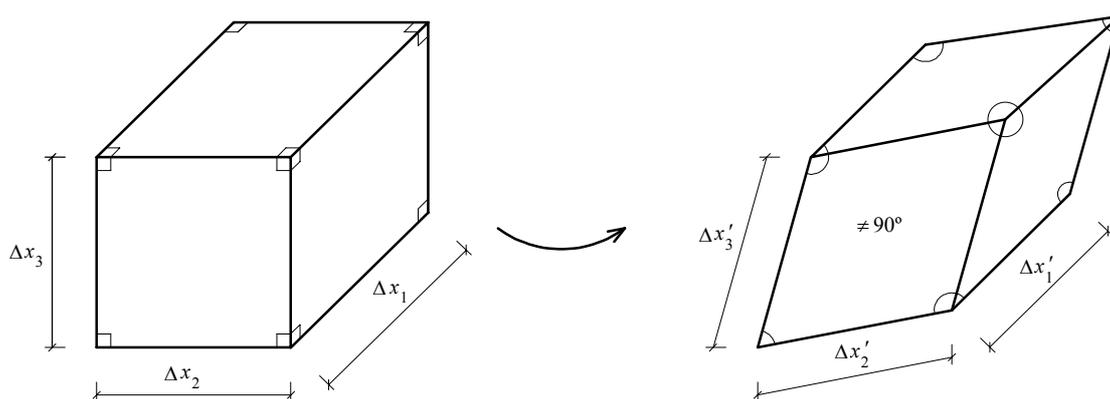


Figura 3.6 - Transformação afim de um cubo.

3.2 - Sobreposição de deformações homogéneas

Considere-se a aplicação sucessiva de duas deformações homogéneas. A primeira implica um deslocamento que faz com que o ponto A passe a coincidir com o ponto B , i.e., o ponto de coordenadas x_i^A passa a ter coordenadas x_i^B . A segunda deformação homogénea faz com que o ponto B passe a coincidir com o ponto C , i.e., o ponto de coordenadas x_i^B passa a ter coordenadas x_i^C .

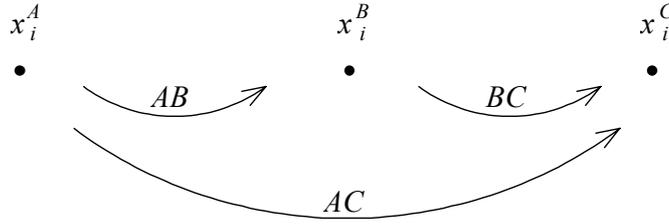


Figura 3.7 - Sobreposição de deformações homogéneas.

Atendendo à equação (3.16) tem-se sucessivamente

$$x_j^B = e_{j0}^{AB} + (\delta_{jk} + e_{jk}^{AB})x_k^A \quad (3.29)$$

$$x_i^C = e_{i0}^{BC} + (\delta_{ij} + e_{ij}^{BC})x_j^B \quad (3.30)$$

Substituindo a (3.29) em (3.30) resulta

$$x_i^C = e_{i0}^{BC} + (\delta_{ij} + e_{ij}^{BC})e_{j0}^{AB} + (\delta_{ij} + e_{ij}^{BC})(\delta_{jk} + e_{jk}^{AB})x_k^A \quad (3.31)$$

$$x_i^C = e_{i0}^{BC} + \delta_{ij}e_{j0}^{AB} + e_{ij}^{BC}e_{j0}^{AB} + \delta_{ij}\delta_{jk}x_k^A + \delta_{ij}e_{jk}^{AB}x_k^A + e_{ij}^{BC}\delta_{jk}x_k^A + e_{ij}^{BC}e_{jk}^{AB}x_k^A \quad (3.32)$$

Os termos em que e_{ij} figura mais do que uma vez são de ordem inferior aqueles em que e_{ij} figura uma só vez, podendo ser desprezados. Assim, depois de retirar esses termos e de efectuar algumas simplificações tem-se

$$x_i^C = e_{i0}^{BC} + e_{i0}^{AB} + \delta_{ik}x_k^A + e_{ik}^{AB}x_k^A + e_{ik}^{BC}x_k^A \quad (3.33)$$

$$x_i^C = (e_{i0}^{AB} + e_{i0}^{BC}) + [\delta_{ik} + (e_{ik}^{AB} + e_{ik}^{BC})]x_k^A \quad (3.34)$$

$$x_i^C = e_{i0}^{AC} + (\delta_{ik} + e_{ik}^{AC})x_k^A \quad (3.35)$$

sendo

$$e_{i0}^{AC} = e_{i0}^{AB} + e_{i0}^{BC} \quad (3.36)$$

$$e_{ik}^{AC} = e_{ik}^{AB} + e_{ik}^{BC} \quad (3.37)$$

Fica assim demonstrado que da aplicação sucessiva de duas deformações homogéneas resulta uma deformação homogénea caracterizada por (3.36) e (3.37).

3.3 - Decomposição de deformações homogéneas

De acordo com (3.10) e com as considerações atrás expostas, tem-se

$$u_i = e_{i0} + e_{ij} x_j \quad (3.38)$$

sendo

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.39)$$

Decompondo e_{ij} na soma de um tensor simétrico com um antissimétrico, resulta (ver Capítulo 1)

$$u_i = e_{i0} + \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji})x_j + \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji})x_j \quad (3.40)$$

Considerando

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.41)$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.42)$$

a equação (3.40) passa a ser a seguinte

$$u_i = e_{i0} + w_{ij} x_j + d_{ij} x_j \quad (3.43)$$

Os três termos de (3.43) adoptam agora as seguintes designações

$$u_i = u_i^T + u_i^R + u_i^D \quad (3.44)$$

Nesta expressão, $u_i^T = e_{i0}$ representa uma translação, porque é independente das coordenadas. Mais adiante será demonstrado que $u_i^R = w_{ij} x_j$ representa uma rotação e que $u_i^D = d_{ij} x_j$ representa uma deformação pura.

O deslocamento u_i é assim a soma de uma translação, de uma rotação e de uma deformação pura. A translação e a rotação são movimentos de corpo rígido, i.e., isentos de deformação pura.

Em notação matricial tem-se

$$\vec{u} = \vec{u}^T + \vec{u}^R + \vec{u}^D \quad (3.45)$$

$$\vec{u} = \vec{u}^T + \underset{\sim}{w} \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{d} \underset{\sim}{x} \quad (3.46)$$

Uma vez que $\underset{\sim}{w}$ é antissimétrico e $\underset{\sim}{d}$ é simétrico, tem-se

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{20} \\ e_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -w_{21} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & -w_{32} \\ -w_{13} & w_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

3.3.1 - Rotação

O tensor w_{ij} é antissimétrico, i.e., quando $i = j$, $w_{ij} = 0$ e quando $i \neq j$, $w_{ij} = -w_{ji}$. Os elementos de w_{ij} podem ser obtidos com a expressão (3.41)

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.48)$$

De acordo com (3.46) e (3.47), o tensor $\underset{\sim}{w}$ é o seguinte

$$\underset{\sim}{w} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{21} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & -w_{32} \\ -w_{13} & w_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

sendo os seus elementos calculados com as seguintes expressões, que são casos particulares da expressão genérica (3.48)

$$w_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (3.50)$$

$$w_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad (3.51)$$

$$w_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.52)$$

De acordo com (3.43) e (3.44) tem-se

$$u_i^R = w_{ij} x_j \quad (3.53)$$

e, atendendo a (3.45), (3.46) e (3.47) tem-se

$$\vec{u}^R = \begin{bmatrix} u_1^R \\ u_2^R \\ u_3^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{21} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & -w_{32} \\ -w_{13} & w_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{13} x_3 - w_{21} x_2 \\ w_{21} x_1 - w_{32} x_3 \\ w_{32} x_2 - w_{13} x_1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Considerando um vector \vec{w} com as seguintes características

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = (w_{32}, w_{13}, w_{21}) \quad (3.55)$$

e efectuando o produto vectorial

$$\vec{w} \wedge \vec{x} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ w_{32} & w_{13} & w_{21} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} w_{13} x_3 - w_{21} x_2 \\ w_{21} x_1 - w_{32} x_3 \\ w_{32} x_2 - w_{13} x_1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

constata-se, atendendo a (3.54) e (3.56) que

$$\vec{u}^R = \vec{w} \wedge \vec{x} = \|\vec{w}\| \|\vec{x}\| \text{sen } \alpha \hat{n}_{wx} \quad (3.57)$$

Nesta expressão α é o ângulo entre o vector \vec{w} e o vector \vec{x} e \hat{n}_{wx} é o versor normal ao plano (\vec{w}, \vec{x}) .

Em (3.54) verifica-se que na origem $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ o vector \vec{u}^R é nulo. Considere-se agora o conjunto dos pontos X situados sobre a recta que passa pela origem e é paralela ao vector \vec{w} (ver Fig. 3.8). O vector posição \vec{x} destes pontos X faz um ângulo α nulo com o vector \vec{w} . Em (3.57) verifica-se que devido ao facto de α ser nulo, todos os pontos situados sobre a recta $O + k \vec{w}, \forall k$ apresentam deslocamento \vec{u}^R nulo. Assim se verifica que esta recta constitui o eixo de rotação, que é o lugar geométrico dos pontos que apresentam a componente \vec{u}^R nula.

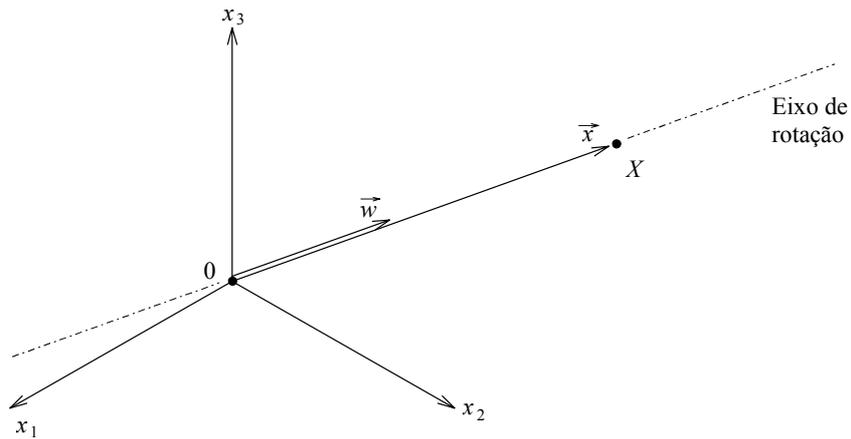


Figura 3.8 - Eixo de rotação.

Para um ponto genérico X , tem-se o deslocamento \vec{u}^R representado na Fig. 3.9, sendo respeitada a regra do saca-rolhas.

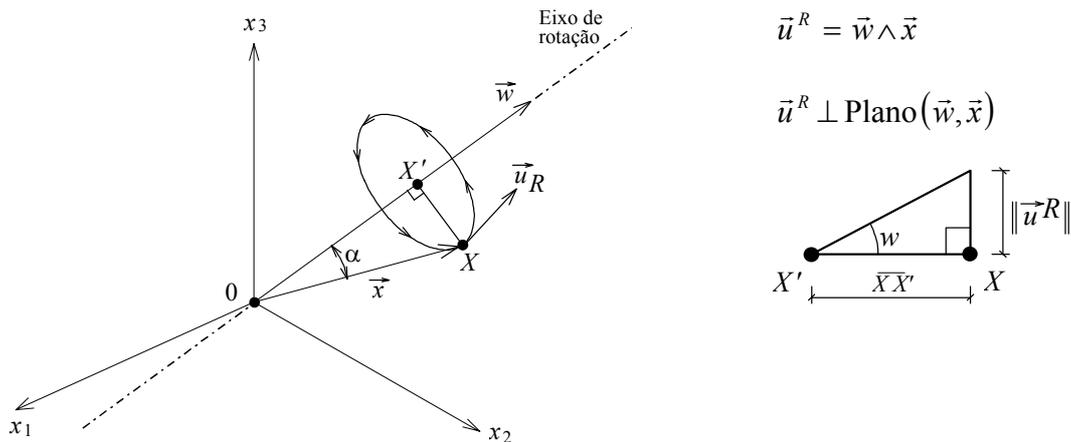


Figura 3.9 - Deslocamento devido à rotação.

De acordo com a Fig. 3.9, o ângulo de rotação w é

$$w \cong \operatorname{tg} w = \frac{\|\vec{u}^R\|}{\|\vec{x}\| \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\|\vec{u}^R\|}{\|\vec{x}\| \operatorname{sen} \alpha} \quad (3.58)$$

Atendendo ao facto de w ser muito pequeno, considera-se $w = \operatorname{tg} w$, resultando

$$w = \frac{\|\vec{u}^R\|}{\|\vec{x}\| \operatorname{sen} \alpha} \quad (3.59)$$

Atendendo a (3.57) tem-se

$$w = \frac{\|\vec{w}\| \|\vec{x}\| \sin \alpha}{\|\vec{x}\| \sin \alpha} \quad (3.60)$$

$$w = \|\vec{w}\| \quad (3.61)$$

Assim se conclui que o ângulo de rotação (w) expresso em radianos coincide com a norma do vector rotação ($\|\vec{w}\|$).

3.3.2 - Deformação pura

Vai ser em seguida demonstrado que a deformação pura é caracterizada pelo tensor simétrico \tilde{d} , cujos elementos podem ser obtidos com a expressão (3.42)

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.62)$$

De acordo com (3.46) e (3.47), o tensor \tilde{d} é o seguinte

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

sendo os seus elementos calculados com as seguintes expressões, que são casos particulares da expressão genérica (3.62)

$$d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (3.64)$$

$$d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (3.65)$$

$$d_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (3.66)$$

$$d_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.67)$$

$$d_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad (3.68)$$

$$d_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (3.69)$$

Em seguida será analisado o significado de um elemento com $i = j$ (e.g., d_{11}) e de um elemento com $i \neq j$ (e.g., d_{12}). O significado dos restantes elementos deduz-se facilmente, recorrendo apenas a uma circulação de índices.

Extensão

Considere-se um paralelepípedo infinitesimal de dimensões dx_1 , dx_2 e dx_3 (ver Fig. 3.10).

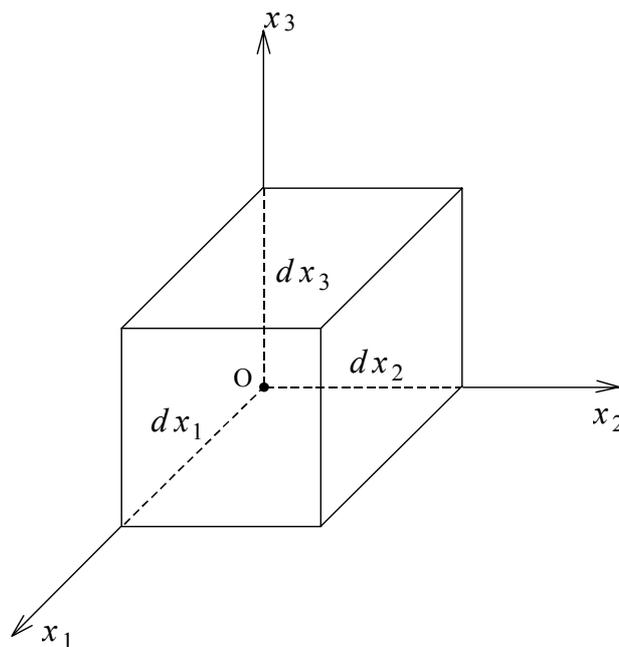


Figura 3.10 - Paralelepípedo infinitesimal.

Na Fig. 3.11 está representada a projecção do paralelepípedo no plano (x_1, x_2) .

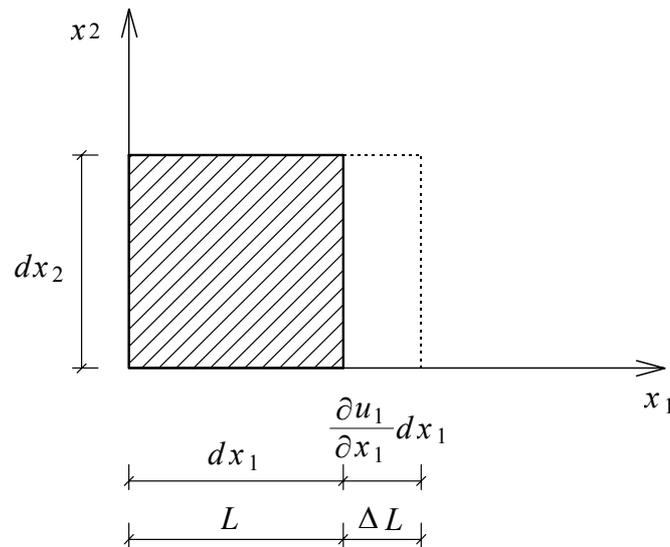


Figura 3.11 - Extensão segundo x_1 .

De acordo com a Fig. 3.11 e com (3.64), tem-se

$$d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\Delta L}{L} \quad (3.70)$$

Assim se verifica que o elemento d_{11} corresponde a uma extensão, i.e., uma variação de comprimento por unidade de comprimento, passando a designar-se ε_1 . De um modo semelhante concluir-se-ia que ε_2 e ε_3 são extensões segundo x_2 e x_3 respectivamente.

$$\varepsilon_1 = d_{11} \quad (3.71)$$

$$\varepsilon_2 = d_{22} \quad (3.72)$$

$$\varepsilon_3 = d_{33} \quad (3.73)$$

Distorção

De acordo com (3.67) tem-se

$$d_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.74)$$

Na Fig. 3.12 está de novo representada a projecção do paralelepípedo da Fig. 3.10 no plano (x_1, x_2) .

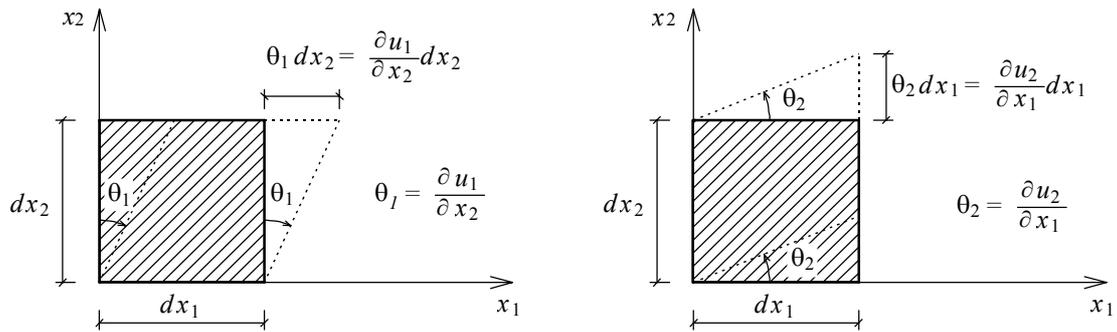


Figura 3.12 - Distorção entre os eixos x_1 e x_2 .

Da Fig. 3.12 e de (3.74) conclui-se que

$$d_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \quad (3.75)$$

O valor de $\theta_1 + \theta_2$ representa a diminuição do ângulo entre os semi-eixos positivos x_1 e x_2 (ver Fig. 3.13).

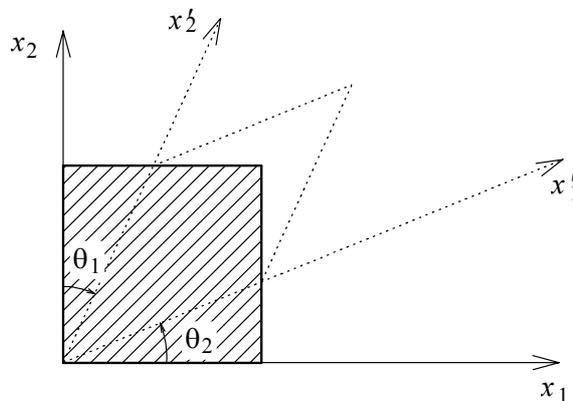


Figura 3.13 - Diminuição do ângulo entre x_1 e x_2 .

A grandeza $\theta_1 + \theta_2$ designa-se distorção entre x_1 e x_2 e é representada por γ_{12} . Atendendo a (3.75), tem-se

$$\gamma_{12} = \theta_1 + \theta_2 = 2d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (3.76)$$

Considerando as direcções x_i e x_j tem-se

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 2 d_{ij} \quad (3.77)$$

sendo

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \quad (3.78)$$

Assim, γ_{ij} é a distorção entre as direcções x_i e x_j ou diminuição do ângulo entre os semi-eixos positivos x_i e x_j . O valor de d_{ij} corresponde a metade da distorção.

Tensor das deformações

O tensor das deformações \tilde{d} apresenta as seguintes características:

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{12}/2 & \varepsilon_2 & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{13}/2 & \gamma_{23}/2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Elementos da diagonal

- correspondem a uma extensão, que significa uma variação de comprimento por unidade de comprimento;
- são positivos quando há um aumento de comprimento;
- representam uma variação de volume com forma constante.

Elementos fora da diagonal

- correspondem a metade de uma distorção, sendo a distorção uma variação angular;
- são positivos quando há uma diminuição do ângulo entre dois semi-eixos positivos;
- representam uma variação de forma com volume constante.

3.4 - Deformação volumétrica

O volume inicial do paralelepípedo elementar representado na Fig. 3.10 é

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.80)$$

Após a deformação pura caracterizada pelo tensor das deformações \tilde{d} o seu volume passa a ser

$$dV + \Delta dV = dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (3.81)$$

Nota: a translação, a rotação de corpo rígido e a distorção não provocam variação de volume.

De acordo com (3.70) e (3.71) e com a Fig. 3.11, a dimensão segundo x_1 do paralelepípedo infinitesimal após a deformação é

$$dx'_1 = dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = dx_1 + \varepsilon_1 dx_1 = dx_1 (1 + \varepsilon_1) \quad (3.82)$$

De um modo análogo tem-se

$$dx'_2 = dx_2 (1 + \varepsilon_2) \quad (3.83)$$

$$dx'_3 = dx_3 (1 + \varepsilon_3) \quad (3.84)$$

A expressão (3.81) passa a ser

$$dV + \Delta dV = dx'_1 dx'_2 dx'_3 = dx_1 (1 + \varepsilon_1) dx_2 (1 + \varepsilon_2) dx_3 (1 + \varepsilon_3) \quad (3.85)$$

$$dV + \Delta dV = dx_1 dx_2 dx_3 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_3) \quad (3.86)$$

$$dV + \Delta dV = dx_1 dx_2 dx_3 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) \quad (3.87)$$

Atendendo a (3.80) e desprezando os termos em que extensões aparecem multiplicadas por extensões, tem-se

$$dV + \Delta dV = dV (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (3.88)$$

$$dV + \Delta dV = dV + dV (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (3.89)$$

$$\Delta dV = dV (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (3.90)$$

$$\frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (3.91)$$

Nesta equação, $\Delta dV / dV$ é a variação de volume por unidade de volume ou deformação volumétrica.

Atendendo a (3.71), (3.72) e (3.73), tem-se

$$\frac{\Delta dV}{dV} = d_{11} + d_{22} + d_{33} = I_1 \quad (3.92)$$

sendo I_1 o primeiro invariante do tensor das deformações \tilde{d} .

3.5 - Deformação em torno de um ponto

Considerem-se duas direcções quaisquer a e b , no espaço a três dimensões, passando pelo ponto O . O referencial utilizado possui origem coincidente com o ponto O . Considerem-se dois pontos A e B , situados sobre as rectas a e b respectivamente. Os pontos A e B encontram-se a uma distância infinitesimal do ponto O .

De acordo com a Fig. 3.14 tem-se

$$\theta = \text{ângulo entre as direcções } a \text{ e } b \quad (3.93)$$

$$\vec{a} = \vec{OA} \quad (3.94)$$

$$\vec{b} = \vec{OB} \quad (3.95)$$

$$\hat{n}_a = \vec{a} / \|\vec{a}\| \quad (3.96)$$

$$\hat{n}_b = \vec{b} / \|\vec{b}\| \quad (3.97)$$

$$a = \|\vec{a}\| \quad (3.98)$$

$$b = \|\vec{b}\| \quad (3.99)$$

$$\vec{a} = a \hat{n}_a \quad (3.100)$$

$$\vec{b} = b \hat{n}_b \quad (3.101)$$

Em notação tensorial (3.100) e (3.101) escrevem-se

$$a_i = a n_{a_i} \quad (3.102)$$

$$b_i = b n_{b_i} \quad (3.103)$$

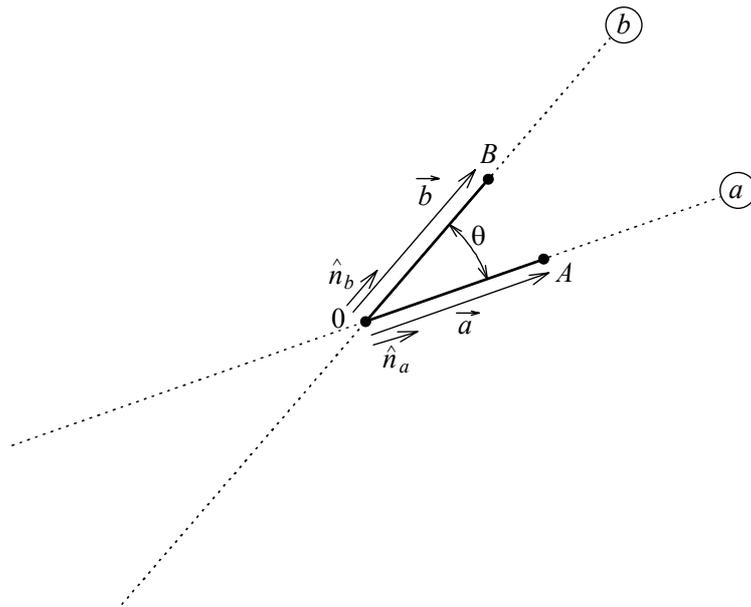


Figura 3.14 - Par de direcções no espaço.

Se o corpo ao qual pertencem os pontos O , A e B for sujeito a uma deformação pura, os segmentos de recta \overline{OA} e \overline{OB} passam a ter outro comprimento e o ângulo θ modifica-se (ver Fig. 3.15).

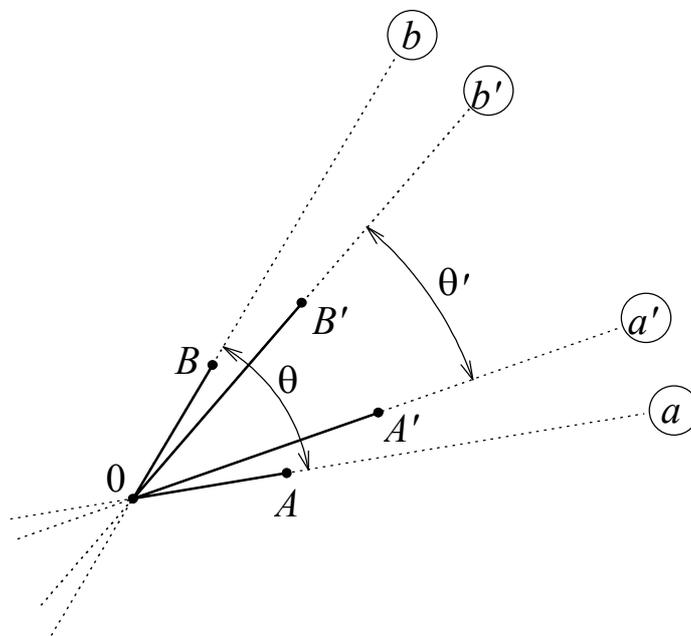


Figura 3.15 - Distorção entre duas direcções quaisquer.

Considerem-se ainda as seguintes extensões e distorção.

ε_a - extensão segundo a direcção a ;

ε_b - extensão segundo a direcção b ;

γ_{ab} - distorção ou diminuição do ângulo entre as direcções a e b .

As extensões ε_a e ε_b e a distorção γ_{ab} definem-se do seguinte modo (ver Fig. 3.15)

$$\varepsilon_a = \frac{\overline{OA'} - \overline{OA}}{\overline{OA}} \quad (3.104)$$

$$\varepsilon_b = \frac{\overline{OB'} - \overline{OB}}{\overline{OB}} \quad (3.105)$$

$$\gamma_{ab} = \theta - \theta' \quad (3.106)$$

Procede-se em seguida à dedução de uma expressão que relaciona as diversas grandezas associadas à deformação indicada na Fig. 3.15.

É a seguinte a definição de produto escalar entre os vectores \vec{a} e \vec{b}

$$\vec{a} | \vec{b} = ab \cos \theta \quad (3.107)$$

Diferenciando ambos os membros, resulta

$$d\vec{a} | \vec{b} + \vec{a} | d\vec{b} = (a \cdot db + da \cdot b) \cos \theta - ab \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta \quad (3.108)$$

Os pontos O e A têm deslocamentos \vec{u}_O e \vec{u}_A respectivamente. Assim, a variação do vector \vec{a} é a diferença entre os deslocamentos dos pontos A e O

$$d\vec{a} = \vec{u}_A - \vec{u}_O \quad (3.109)$$

Pelos mesmos motivos

$$d\vec{b} = \vec{u}_B - \vec{u}_O \quad (3.110)$$

Atendendo à equação (3.7), tem-se em notação tensorial

$$u_{A_i} = u_{O_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} x_j \quad (3.111)$$

Uma vez que x_j são as coordenadas do ponto A e atendendo a (3.102), tem-se

$$x_j = a n_{a_j} \quad (3.112)$$

Substituindo (3.112) em (3.111), resulta

$$u_{A_i} = u_{O_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a n_{a_j} \quad (3.113)$$

$$u_{A_i} - u_{O_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a n_{a_j} \quad (3.114)$$

De um modo semelhante chegar-se-ia a

$$u_{B_i} - u_{O_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} b n_{b_j} \quad (3.115)$$

Substituindo (3.109) e (3.110) em (3.108) tem-se em notação tensorial

$$\left(u_{A_i} - u_{O_i}\right) b_i + a_i \left(u_{B_i} - u_{O_i}\right) = (a \cdot db + da \cdot b) \cos \theta - a b \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta \quad (3.116)$$

Substituindo (3.102), (3.103), (3.114) e (3.115) em (3.116), resulta

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} a n_{a_j}\right) \left(b n_{b_i}\right) + \left(a n_{a_i}\right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} b n_{b_j}\right) = (a \cdot db + da \cdot b) \cos \theta - a b \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta \quad (3.117)$$

Reordenando alguns factores tem-se

$$a b n_{a_j} n_{b_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + a b n_{a_i} n_{b_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = (a \cdot db + da \cdot b) \cos \theta - a b \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta \quad (3.118)$$

Dividindo ambos os membros por $a \cdot b$, resulta

$$n_{a_j} n_{b_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + n_{a_i} n_{b_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \left(\frac{db}{b} + \frac{da}{a}\right) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta \quad (3.119)$$

Trocando entre si os índices mudos i e j no primeiro monómio, obtém-se

$$n_{a_i} n_{b_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + n_{a_i} n_{b_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \left(\frac{da}{a} + \frac{db}{b}\right) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta \quad (3.120)$$

Uma vez que as extensões e distorções não dependem da translação, nem da rotação de corpo rígido, pode-se considerar uma deformação que apresenta componentes de translação e rotação nulas. Assim, existe apenas deformação pura, sendo possível demonstrar que nestas circunstâncias

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (3.121)$$

De (3.121) e (3.42) conclui-se que

$$d_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.122)$$

Substituindo (3.122) em (3.120), tem-se

$$n_{a_i} n_{b_j} (d_{ij} + d_{ji}) = \left(\frac{da}{a} + \frac{db}{b} \right) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta \quad (3.123)$$

Uma vez que d_{ij} é um tensor simétrico ($d_{ij} = d_{ji}$), resulta

$$2n_{a_i} n_{b_j} d_{ij} = \left(\frac{da}{a} + \frac{db}{b} \right) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cdot d\theta \quad (3.124)$$

Da definição de extensão tem-se

$$\varepsilon_a = \frac{da}{a} \quad (3.125)$$

$$\varepsilon_b = \frac{db}{b} \quad (3.126)$$

A variação do ângulo θ designa-se $d\theta$ e corresponde à diferença entre o ângulo após a deformação e o ângulo inicial, sendo portanto

$$d\theta = \theta' - \theta \quad (3.127)$$

Uma vez que a uma distorção positiva corresponde uma diminuição do ângulo entre as direcções a e b (ver Fig. 3.15), tem-se

$$\gamma_{ab} = \theta - \theta' \quad (3.128)$$

Atendendo a (3.127) e (3.128) verifica-se que

$$\gamma_{ab} = -d\theta \quad (3.129)$$

Substituindo (3.125), (3.126) e (3.129) em (3.124) resulta

$$2d_{ij} n_{a_i} n_{b_j} = (\varepsilon_a + \varepsilon_b) \cos \theta + \gamma_{ab} \operatorname{sen} \theta \quad (3.130)$$

Em notação matricial tem-se

$$\left(\varepsilon_a + \varepsilon_b\right) \cos \theta + \gamma_{ab} \operatorname{sen} \theta = 2 \underset{(1 \times 3)}{\hat{n}_a^T} \underset{(3 \times 3)}{d} \underset{(3 \times 1)}{\hat{n}_b} \quad (3.131)$$

Casos particulares

a) Direcções a e b coincidentes ($\theta = 0$)

$$\varepsilon_a = \hat{n}_a^T d \hat{n}_a \quad (3.132)$$

ou, abandonando a referência à direcção a

$$\varepsilon = \hat{n}^T d \hat{n} \quad (3.133)$$

sendo \hat{n} o versor de uma direcção arbitrária e ε a extensão nessa direcção.

b) Direcções a e b ortogonais entre si ($\theta = 90^\circ$)

$$\gamma_{ab} = 2 \hat{n}_a^T d \hat{n}_b \quad (3.134)$$

sendo γ_{ab} a distorção ou diminuição do ângulo entre duas direcções ortogonais entre si e definidas pelos versores \hat{n}_a e \hat{n}_b .

Caso geral (θ qualquer)

Considere-se de novo o caso geral (θ qualquer) e a correspondente expressão (3.131).

Recorrendo a (3.132), é possível calcular γ_{ab} com a seguinte expressão

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \left[2 \hat{n}_a^T d \hat{n}_b - \left(\hat{n}_a^T d \hat{n}_a + \hat{n}_b^T d \hat{n}_b \right) \cos \theta \right] \quad (3.135)$$

3.6 - Tensor das deformações - mudança de referencial

Com o objectivo de verificar se d é um tensor, procede-se em seguida ao cálculo dos seus elementos no referencial S' , distinto de S . Antes de iniciar este cálculo, efectuam-se algumas considerações.

A transformação de coordenadas de S' para S é efectuada do seguinte modo (ver Capítulo 1)

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{x}' \quad (3.136)$$

Em notação tensorial tem-se

$$x_i = a_{ji} x'_j \quad (3.137)$$

Da derivação de ambos os membros resulta

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = a_{ji} \quad (3.138)$$

O vector deslocamento apresenta a seguinte lei de transformação de S para S' (ver Capítulo 1)

$$u'_p = a_{pj} u_j \quad (3.139)$$

Da derivação de ambos os membros resulta

$$\frac{\partial u'_p}{\partial x_i} = a_{pj} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (3.140)$$

No referencial S' a deformação pura é caracterizada por

$$d'_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_p}{\partial x'_q} + \frac{\partial u'_q}{\partial x'_p} \right) \quad (3.141)$$

$$d'_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_p}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_q} + \frac{\partial u'_q}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_p} \right) \quad (3.142)$$

Substituindo (3.138) em (3.142), resulta

$$d'_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_p}{\partial x_i} a_{qi} + \frac{\partial u'_q}{\partial x_i} a_{pi} \right) \quad (3.143)$$

Substituindo (3.140) em (3.143), resulta

$$d'_{pq} = \frac{1}{2} \left(a_{pj} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} a_{qi} + a_{qj} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} a_{pi} \right) \quad (3.144)$$

Trocando entre si os índices mudos i e j no primeiro termo do segundo membro obtém-se

$$d'_{pq} = \frac{1}{2} \left(a_{pi} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a_{qj} + a_{qj} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} a_{pi} \right) \quad (3.145)$$

$$d'_{pq} = a_{pi} a_{qj} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.146)$$

Substituindo (3.42) em (3.146), resulta

$$d'_{pq} = a_{pi} a_{qj} d_{ij} \quad (3.147)$$

Assim se conclui que \tilde{d} verifica a lei de transformação tensorial, sendo portanto um tensor de segunda ordem (ver Capítulo 1).

3.7 - Extensões principais e direcções principais de deformação

A extensão numa direcção arbitrária $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ pode ser calculada com a expressão (3.133)

$$\varepsilon = \hat{n}^T \tilde{d} \hat{n} \quad (3.148)$$

Para determinar as direcções em que a extensão ε assume valores extremos, define-se o seguinte programa matemático

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar ou maximizar} \quad \varepsilon(\hat{n}) \\ &\text{sujeito a} \\ &\quad \|\hat{n}\| = 1 \end{aligned} \quad (3.149)$$

Substituindo (3.148), resulta

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar ou maximizar} \quad \hat{n}^T \tilde{d} \hat{n} \\ &\text{sujeito a} \\ &\quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.150)$$

O Lagrangeano correspondente a este programa matemático é o seguinte

$$L = \hat{n}^T \tilde{d} \hat{n} + \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) \quad (3.151)$$

Uma vez que \tilde{d} é um tensor de segunda ordem simétrico, tem-se

$$L = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} + \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) \quad (3.152)$$

Desenvolvendo os produtos matriciais obtém-se

$$L = d_{11}n_1^2 + d_{22}n_2^2 + d_{33}n_3^2 + 2d_{12}n_1n_2 + 2d_{13}n_1n_3 + 2d_{23}n_2n_3 + \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) \quad (3.153)$$

Derivando L em ordem a n_1 , n_2 , n_3 e λ e igualando cada uma das derivadas parciais a zero, obtém-se o seguinte sistema de quatro equações não lineares a quatro incógnitas

$$d_{11}n_1 + d_{12}n_2 + d_{13}n_3 + \lambda n_1 = 0 \quad (3.154)$$

$$d_{12}n_1 + d_{22}n_2 + d_{23}n_3 + \lambda n_2 = 0 \quad (3.155)$$

$$d_{13}n_1 + d_{23}n_2 + d_{33}n_3 + \lambda n_3 = 0 \quad (3.156)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 = 0 \quad (3.157)$$

Estas quatro equações são equivalentes a

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.158)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (3.159)$$

Os vectores próprios de \tilde{d} são os versores \hat{n}_I , \hat{n}_{II} e \hat{n}_{III} que verificam

$$\tilde{d} \hat{n} = \varphi \hat{n} \quad (3.160)$$

$$\|\hat{n}\| = 1 \quad (3.161)$$

sendo φ_I , φ_{II} e φ_{III} os correspondentes valores próprios.

As soluções do sistema de equações (3.154)-(3.157) são as seguintes

$$\hat{n} = \hat{n}_I \text{ com } \lambda = -\varphi_I \quad (3.162)$$

$$\hat{n} = \hat{n}_{II} \text{ com } \lambda = -\varphi_{II} \quad (3.163)$$

$$\hat{n} = \hat{n}_{III} \text{ com } \lambda = -\varphi_{III} \quad (3.164)$$

Assim se conclui que as direcções em que a extensão ε assume valores extremos são definidas pelos vectores próprios de \tilde{d} , sendo designadas direcções principais de

deformação. O valor da extensão segundo estas direcções pode ser calculado com a expressão (3.148). Atendendo a (3.160) tem-se

$$\varepsilon_I = \hat{n}_I^T d \hat{n}_I = \hat{n}_I^T \varphi_I \hat{n}_I = \varphi_I \hat{n}_I^T \hat{n}_I \quad (3.165)$$

Uma vez que $\hat{n}_I^T \hat{n}_I = \hat{n}_I | \hat{n}_I = 1$ resulta

$$\varepsilon_I = \varphi_I \quad (3.166)$$

Repetindo este cálculo para as outras duas direcções principais de deformação, chegar-se-ia a

$$\varepsilon_{II} = \varphi_{II} \quad (3.167)$$

$$\varepsilon_{III} = \varphi_{III} \quad (3.168)$$

Assim se conclui que os valores das extensões segundo as direcções principais de deformação coincidem com os valores próprios de \tilde{d} , sendo designadas extensões principais.

Atendendo ao facto de as extensões principais e de as direcções principais de deformação coincidirem com os valores e vectores próprios de \tilde{d} , tem-se

$$\tilde{d} \hat{n}_I = \varepsilon_I \hat{n}_I \quad (3.169)$$

$$\tilde{d} \hat{n}_{II} = \varepsilon_{II} \hat{n}_{II} \quad (3.170)$$

$$\tilde{d} \hat{n}_{III} = \varepsilon_{III} \hat{n}_{III} \quad (3.171)$$

Sempre que os valores próprios são numericamente conhecidos, deve-se proceder à sua ordenação do seguinte modo

$$\varepsilon_I \geq \varepsilon_{II} \geq \varepsilon_{III} \quad (3.172)$$

Uma vez que os vectores próprios são ortogonais entre si, a distorção entre direcções principais de deformação pode ser calculada com a expressão (3.134). Considerando as direcções principais de deformação definidas por \hat{n}_I e \hat{n}_{II} , tem-se

$$\gamma_{I,II} = 2 \hat{n}_I^T d \hat{n}_{II} \quad (3.173)$$

Substituindo (3.170) em (3.173), resulta

$$\gamma_{I,II} = 2 \hat{n}_I^T \varepsilon_{II} \hat{n}_{II} = 2 \varepsilon_{II} \hat{n}_I^T \hat{n}_{II} \quad (3.174)$$

Uma vez que os vectores próprios são ortogonais entre si, $\hat{n}_I^T \hat{n}_{II} = \hat{n}_I | \hat{n}_{II} = 0$, sendo

$$\gamma_{I,II} = 0 \quad (3.175)$$

De um modo semelhante chegar-se-ia às seguintes conclusões

$$\gamma_{I,III} = 0 \quad (3.176)$$

$$\gamma_{II,III} = 0 \quad (3.177)$$

Apresenta-se em seguida um resumo das conclusões obtidas:

- o valor máximo e o valor mínimo da extensão ocorrem segundo duas das direcções principais de deformação, que coincidem com dois dos vectores próprios de \tilde{d} ;
- a extensão segundo cada uma das direcções principais de deformação coincide com o correspondente valor próprio de \tilde{d} ;
- as direcções principais de deformação são ortogonais entre si;
- entre pares de direcções principais de deformação não há distorção;
- no referencial principal de deformação tem-se

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

Atendendo às conclusões atrás obtidas, o cálculo das extensões principais pode ser efectuado de um modo análogo ao descrito no Capítulo 2.

Considerem-se os invariantes do estado de deformação I_1 , I_2 e I_3 definidos do seguinte modo

$$I_1 = d_{11} + d_{22} + d_{33} \quad (3.179)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_{11} & d_{13} \\ d_{13} & d_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{vmatrix} \quad (3.180)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} \quad (3.181)$$

A equação característica é a seguinte

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0 \quad (3.182)$$

As raízes da equação característica (ε_I , ε_{II} e ε_{III}) são os valores próprios de \underline{d} que coincidem com as extensões principais. O procedimento de cálculo das direcções principais foi descrito no Capítulo 2.

A generalidade das conclusões obtidas para o caso do estado de tensão são extensíveis ao caso do estado de deformação.

3.8 - Tensor do desvio das deformações

Considere-se o primeiro invariante do tensor das deformações definido por (3.179)

$$I_1 = d_{11} + d_{22} + d_{33} \quad (3.183)$$

Considere-se a extensão média d_0 definida do seguinte modo

$$d_0 = \frac{1}{3}(d_{11} + d_{22} + d_{33}) = \frac{I_1}{3} \quad (3.184)$$

O tensor do desvio das deformações \underline{d}' tem a seguinte definição

$$\underline{d}' = \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{12} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{13} & d'_{23} & d'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

sendo

$$\underline{d}' = \begin{bmatrix} d_{11} - d_0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} - d_0 & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} - d_0 \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

Em notação tensorial tem-se

$$d'_{ij} = d_{ij} - d_0 \delta_{ij} \quad (3.187)$$

Nesta equação δ_{ij} é o delta de Kronecker.

O tensor do desvio das deformações, também designado tensor das distorções, apresenta as seguintes características:

- possui primeiro invariante nulo;
- representa uma deformação isenta de variação volumétrica;
- representa uma deformação puramente distorcional.

O tensor das deformações pode assim ser decomposto nas suas componentes volumétrica (\tilde{d}_0) e distorcional (\tilde{d}')

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} \\ d'_{12} & d'_{22} & d'_{23} \\ d'_{13} & d'_{23} & d'_{33} \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

$$\tilde{d} = \tilde{d}_0 + \tilde{d}' \quad (3.189)$$

3.9 - Equações de compatibilidade

Considerem-se as expressões das extensões (ε_i) e das distorções (γ_{ij})

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (3.190)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (3.191)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (3.192)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (3.193)$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad (3.194)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (3.195)$$

Se se arbitrarem seis funções de x_1 , x_2 e x_3 para as três extensões e para as três distorções, não se pode garantir a existência de três funções u_1 , u_2 e u_3 de cuja derivação resultem as seis referidas funções. Apresenta-se em seguida um exemplo.

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 3x_1^2 + x_2^2 \quad (3.196)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 \quad (3.197)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = x_2 \quad (3.198)$$

$$\varepsilon_3 = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0 \quad (3.199)$$

Integrando ε_1 e ε_2 relativamente a x_1 e x_2 respectivamente obtém-se

$$u_1 = x_1^3 + x_1x_2^2 + f(x_2, x_3) \quad (3.200)$$

$$u_2 = x_1x_2 + x_2^2 + g(x_1, x_3) \quad (3.201)$$

Calculando γ_{12} com estas funções resulta

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2x_1x_2 + \frac{\partial f(x_2, x_3)}{\partial x_2} + x_2 + \frac{\partial g(x_1, x_3)}{\partial x_1} \quad (3.202)$$

$$\gamma_{12} = 2x_1x_2 + x_2 + F(x_2, x_3) + G(x_1, x_3) \quad (3.203)$$

Igualando o segundo membro de (3.203) com a expressão inicialmente arbitrada para γ_{12} (3.198), obtém-se

$$2x_1x_2 + x_2 + F(x_2, x_3) + G(x_1, x_3) = x_2 \quad (3.204)$$

$$F(x_2, x_3) + G(x_1, x_3) = -2x_1x_2 \quad (3.205)$$

Como não existem funções F e G que verifiquem a igualdade (3.205) para todos os pontos (x_1, x_2, x_3) , conclui-se que o campo de extensões e distorções (3.196)-(3.199) não é admissível.

Para que um conjunto de funções de x_1 , x_2 e x_3 constitua um campo de extensões (ε_i) e um campo de distorções (γ_{ij}) admissível têm de se verificar determinadas equações, designadas equações de compatibilidade, que se obtêm da seguinte forma:

- derivar (3.190) duas vezes em ordem a x_2

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} \quad (3.206)$$

- derivar (3.191) duas vezes em ordem a x_1

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \quad (3.207)$$

- derivar (3.195) em ordem a x_1 e a x_2

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \quad (3.208)$$

- substituir (3.206) e (3.207) em (3.208)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} \quad (3.209)$$

A equação (3.209) é uma das seis equações de compatibilidade que serão apresentadas mais adiante. Efectuando uma circulação de índices na equação (3.209) obter-se-iam mais duas equações de compatibilidade.

A quarta equação de compatibilidade obtém-se da seguinte forma:

- derivar (3.190) em ordem a x_2 e a x_3

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \quad (3.210)$$

- derivar (3.195) em ordem a x_1 e a x_3

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} \quad (3.211)$$

- substituir (3.210) em (3.211)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} \quad (3.212)$$

- derivar (3.194) em ordem a x_1 e a x_2

$$\frac{\partial^2 \gamma_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \quad (3.213)$$

- substituir (3.210) em (3.213)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (3.214)$$

- derivar (3.193) duas vezes em ordem a x_1

$$\frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \quad (3.215)$$

- adicionar as equações (3.212) e (3.214)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \gamma_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \quad (3.216)$$

- substituir (3.215) em (3.216)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \gamma_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_1^2} \quad (3.217)$$

A expressão (3.217) é equivalente a

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (3.218)$$

A equação (3.218) corresponde à quarta equação de compatibilidade das seis atrás referidas. Efectuando uma circulação de índices na equação (3.218) obter-se-iam a quinta e a sexta equações de compatibilidade.

Apresentam-se em seguida as seis equações de compatibilidade

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} \quad (3.219)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_2^2} \quad (3.220)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_3^2} \quad (3.221)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (3.222)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} \right) \quad (3.223)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} \right) \quad (3.224)$$

Nos problemas planos, só a primeira (3.219) é que apresenta utilidade prática, porque as restantes seriam equações do tipo $0 = 0$.

As funções $u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3)$ e $u_3(x_1, x_2, x_3)$ têm de ser funções contínuas e têm de possuir primeiras, segundas e terceiras derivadas também contínuas. Nestas circunstâncias, da aplicação do campo de deslocamentos a um corpo resulta uma nova configuração em que não se verifica o aparecimento de novos espaços vazios, nem se verifica uma sobreposição de matéria. Dois pontos infinitamente próximos permanecem infinitamente próximos.

Nas seis equações de compatibilidade (3.219)-(3.224) todas as derivadas são de segunda ordem. Por este motivo, quando as expressões das extensões (ε_i) e das distorções (γ_{ij}) forem funções lineares ou constantes, as equações de compatibilidade são automaticamente verificadas.

3.10 - Estado plano de deformação

Considere-se um corpo com as seguintes características (ver Fig. 3.16):

- corpo prismático gerado por translação de uma figura plana ao longo de um eixo. A figura plana é paralela ao plano (x_1, x_2) e o eixo atrás referido é x_3 ;
- a dimensão do corpo segundo x_3 é muito superior às restantes dimensões;
- todas as acções apresentam componente segundo x_3 nula, i.e., actuam paralelamente ao plano (x_1, x_2) ;
- as acções não variam com x_3 .

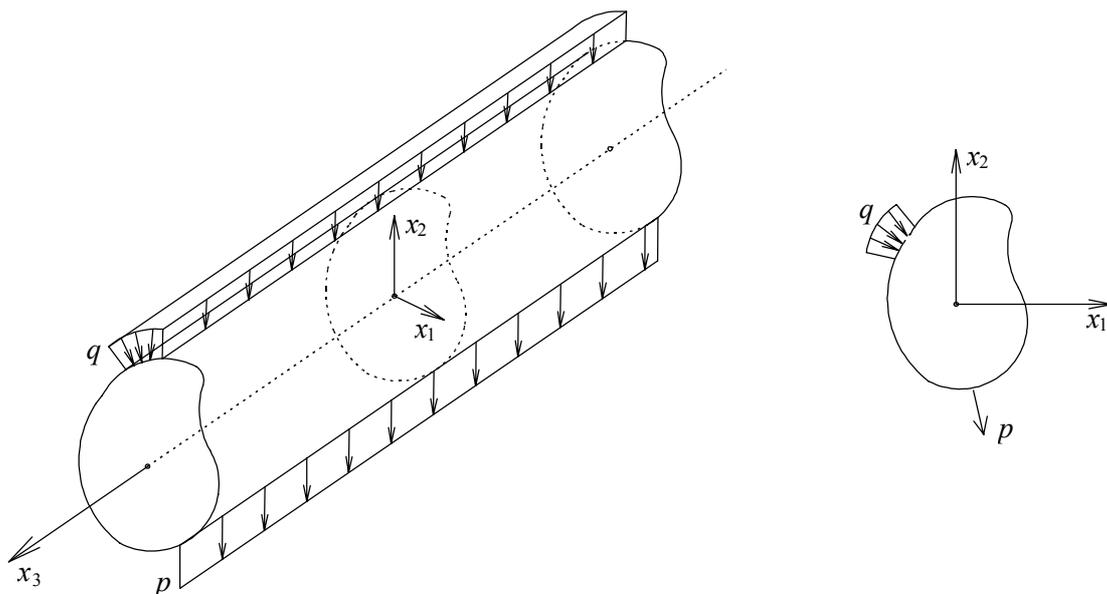


Figura 3.16 - Corpo sujeito a um estado plano de deformação.

Nestas circunstâncias admite-se o seguinte:

- os deslocamentos de qualquer ponto segundo x_3 são nulos;
- os deslocamentos segundo x_1 e x_2 não variam com x_3 .

Estas hipóteses podem ser expressas do seguinte modo

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2) \quad (3.225)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = u_2(x_1, x_2) \quad (3.226)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (3.227)$$

Quando um corpo apresenta este conjunto de características diz-se que está sujeito a um estado plano de deformação. Referem-se como exemplos os muros de suporte de terras e as barragens gravidade (ver Fig. 3.17).

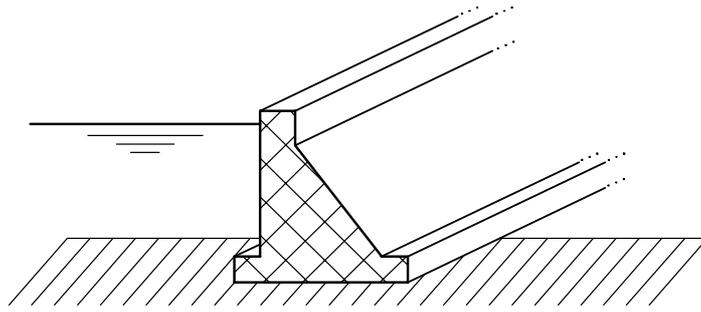


Figura 3.17 - Barragem gravidade.

Atendendo a (3.225), (3.226) e (3.227), os elementos do tensor das deformações são os seguintes

$$d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (3.228)$$

$$d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (3.229)$$

$$d_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.230)$$

$$d_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.231)$$

$$d_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (3.232)$$

$$d_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (3.233)$$

Atendendo aos elementos que se admitem nulos, o tensor das deformações é o seguinte

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.234)$$

Os elementos de \tilde{d} apresentam as seguintes expressões

$$\varepsilon_1 = d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (3.235)$$

$$\varepsilon_2 = d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (3.236)$$

$$\varepsilon_3 = 0 \quad (3.237)$$

$$\gamma_{12} = 2d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (3.238)$$

$$\gamma_{13} = 2d_{13} = 0 \quad (3.239)$$

$$\gamma_{23} = 2d_{23} = 0 \quad (3.240)$$

Considerem-se duas direcções a e b no plano (x_1, x_2) . A direcção a é definida pelo ângulo α e a direcção b pelo ângulo $\alpha+90^\circ$ (ver Fig. 3.18). Os versores destas direcções são \hat{n}_a e \hat{n}_b , sendo ortogonais entre si. As componentes dos versores \hat{n}_a e \hat{n}_b são as seguintes

$$\hat{n}_a = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \quad (3.241)$$

$$\hat{n}_b = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \quad (3.242)$$

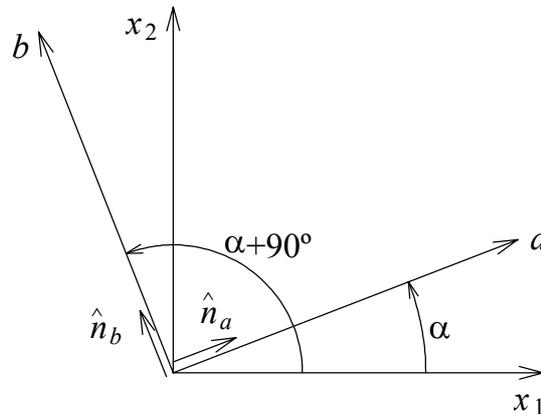


Figura 3.18 - Estado plano de deformação - direcções a e b .

Atendendo à expressão (3.132), a extensão segundo a direcção a é a seguinte

$$\varepsilon_a = \hat{n}_a^T \underline{d} \hat{n}_a \quad (3.243)$$

Substituindo (3.234) e (3.241) em (3.243), resulta

$$\varepsilon_a = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.244)$$

que é equivalente a

$$\varepsilon_a = d_{11} \cos^2 \alpha + d_{22} \sin^2 \alpha + d_{12} \sin(2\alpha) \quad (3.245)$$

De um modo semelhante, atendendo à expressão (3.134) tem-se

$$\frac{\gamma_{ab}}{2} = \hat{n}_a^T \underset{\sim}{d} \hat{n}_b \quad (3.246)$$

Substituindo (3.234), (3.241) e (3.242) em (3.246), resulta

$$\frac{\gamma_{ab}}{2} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.247)$$

que é equivalente a

$$\frac{\gamma_{ab}}{2} = \frac{d_{22} - d_{11}}{2} \sin(2\alpha) + d_{12} \cos(2\alpha) \quad (3.248)$$

Apresenta-se agora uma definição que apenas é válida em estados planos:

- a distorção associada a uma direcção α é a distorção entre essa direcção e a direcção $\alpha+90^\circ$.

Nestas circunstâncias considera-se que a extensão numa direcção α é ε ($= \varepsilon_a$) e que a distorção numa direcção α é γ ($= \gamma_{ab}$).

Atendendo a estas considerações e a (3.235), (3.236) e (3.238), as equações (3.245) e (3.248) podem ser rescritas do seguinte modo

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha + \frac{\gamma_{12}}{2} \sin(2\alpha) \quad (3.249)$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \sin(2\alpha) + \frac{\gamma_{12}}{2} \cos(2\alpha) \quad (3.250)$$

Tal como no caso do estado plano de tensão, no estado plano de deformação é mais frequente designar os eixos coordenados por (x,y) em vez de (x_1,x_2) .

Assim, as expressões (3.249) e (3.250) passam a

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\alpha) \quad (3.251)$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2} \sin(2\alpha) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos(2\alpha) \quad (3.252)$$

Estas expressões coincidem com as que foram obtidas no caso do estado plano de tensão (ver Capítulo 2), desde que se considere a seguinte analogia

$$\sigma_x \leftrightarrow \varepsilon_x \quad (3.253)$$

$$\sigma_y \leftrightarrow \varepsilon_y \quad (3.254)$$

$$\tau_{xy} \leftrightarrow \gamma_{xy} / 2 \quad (3.255)$$

$$\sigma \leftrightarrow \varepsilon \quad (3.256)$$

$$\tau \leftrightarrow \gamma / 2 \quad (3.257)$$

Assim, todas as conclusões obtidas no Capítulo 2 podem ser imediatamente adaptadas ao caso do estado plano de deformação. Por exemplo

$$\alpha_I = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right) \quad (3.258)$$

$$\alpha_{II} = \alpha_I + 90^\circ \quad (3.259)$$

Os valores de ε_I e ε_{II} obtêm-se substituindo respectivamente α_I e α_{II} em (3.251).

3.11 - Circunferência de Mohr

No caso do estado plano de deformação, a circunferência de Mohr pode ser obtida por analogia com o estado plano de tensão, resultando a representação gráfica que se encontra na Fig. 3.19.

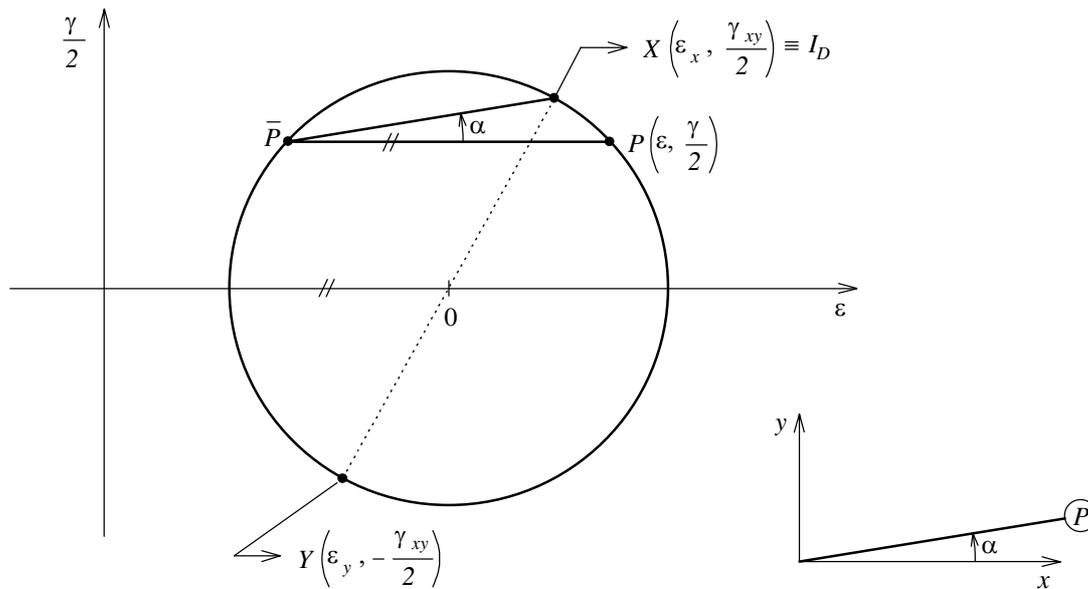


Figura 3.19 - Circunferência de Mohr.

Observações relativas à Fig. 3.19:

I_D - polo irradiante das direcções

ε positivo \Rightarrow aumento de comprimento por unidade de comprimento

γ positivo \Rightarrow diminuição do ângulo entre as direcções α e $\alpha+90^\circ$

Devido ao facto de em vez de facetas se considerarem agora direcções, a construção gráfica que permite obter o ponto correspondente a uma direcção α é a seguinte:

- passar por $X \equiv I_D$ uma linha paralela à direcção α ;
- intersectar esta linha com a circunferência, obtendo-se assim o ponto \bar{P} ;
- passar por \bar{P} uma linha paralela ao eixo ε ;
- intersectar esta linha com a circunferência, obtendo-se assim o ponto P cujas coordenadas $(\varepsilon, \gamma/2)$ correspondem à extensão e a metade da distorção associadas à direcção α .

Pode-se verificar facilmente na circunferência que

$$\alpha = 0 \Rightarrow P \equiv X \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_x \\ \gamma = \gamma_{xy} \end{cases}$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow P \equiv Y \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_y \\ \gamma = -\gamma_{xy} \end{cases}$$

Na Fig. 3.20 encontra-se representada uma distorção γ_{xy} positiva. Pode assim constatar-se que para $\alpha = 0$ (i.e., entre as direcções 0° e 90°) a distorção é γ_{xy} , enquanto que para $\alpha = 90^\circ$ (i.e., entre as direcções 90° e 180°) a distorção é $-\gamma_{xy}$.

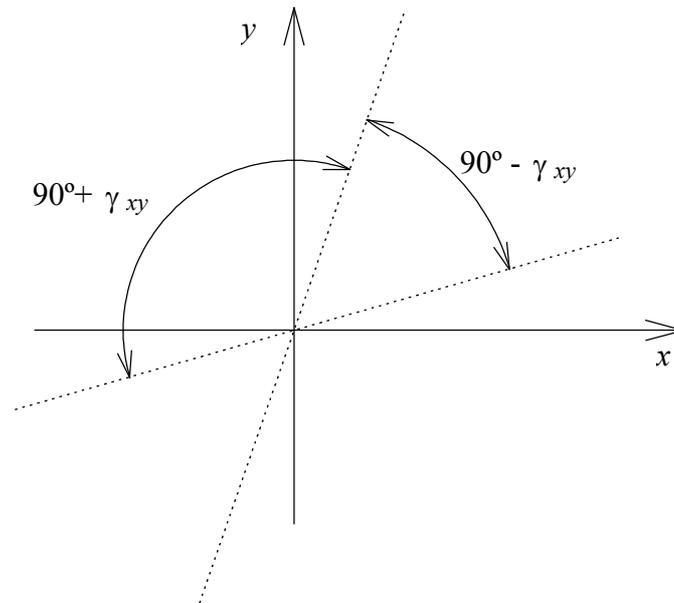


Figura 3.20 - Distorção γ_{xy} , positiva.

Na Fig. 3.21 encontram-se assinalados os pontos correspondentes às extensões principais máxima e mínima (ε_I e ε_{II}). As respectivas direcções são as rectas que passam pelo polo irradiante das direcções (I_D) e pelos pontos $\bar{\varepsilon}_I$ e $\bar{\varepsilon}_{II}$.

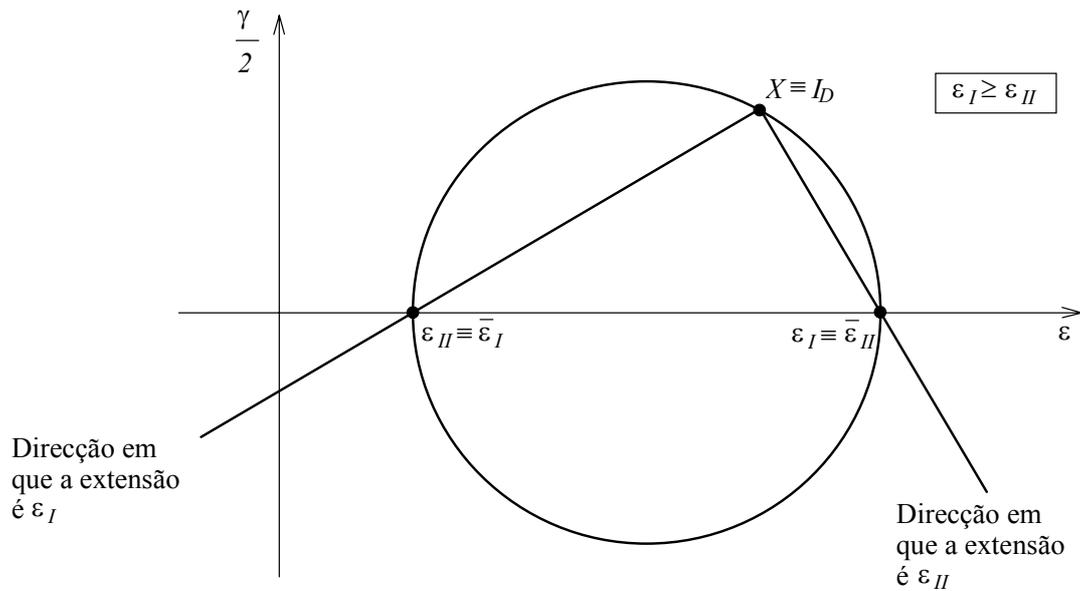


Figura 3.21 - Extensões principais e direcções principais de deformação.

Os pontos correspondentes à maior e menor distorção encontram-se indicados na Fig. 3.22. Neste caso os pontos P e \bar{P} coincidem, bem como os pontos Q e \bar{Q} . As direcções associadas à maior e menor distorção são as rectas que passam pelo polo irradiante das direcções (I_D) e pelos pontos P e Q .

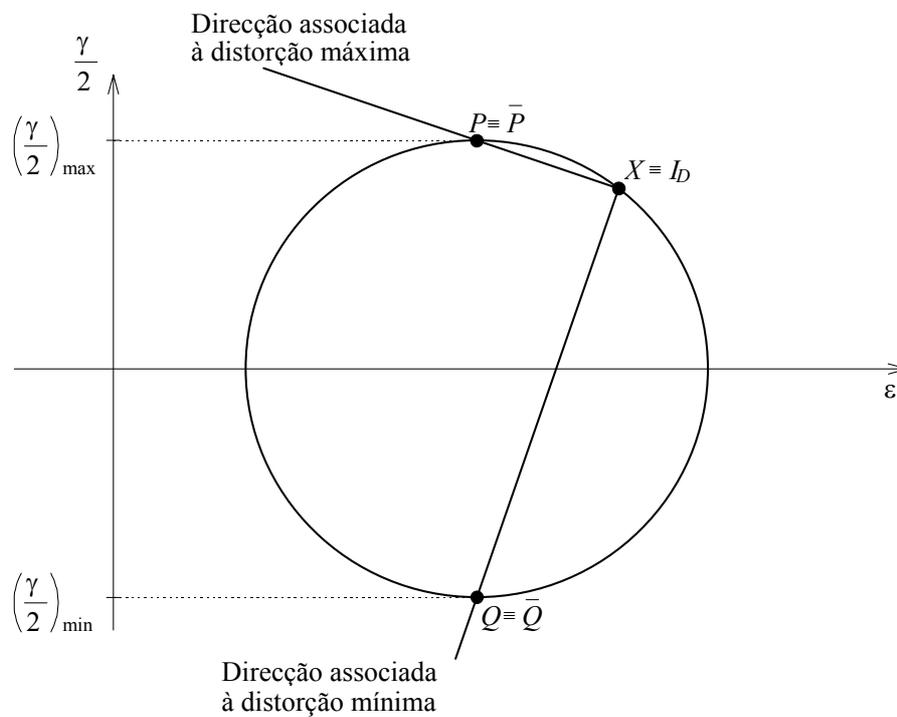


Figura 3.22 - Distorção máxima, distorção mínima e respectivas direcções.

4 - RELAÇÕES ENTRE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Nos Capítulos 2 e 3 foram apresentadas as características do estado de tensão e do estado de deformação. O estado de tensão num ponto é caracterizado pelo tensor das tensões (τ_{ij}) , cujos elementos são tensões normais e tensões tangenciais. Admitindo que o corpo está sujeito a pequenas deformações e considerando a vizinhança infinitesimal de um ponto, supõe-se que o estado de tensão apenas depende das componentes do tensor das deformações (d_{ij}) , cujos elementos são extensões (ε_i) e meias distorções $(\gamma_{ij}/2)$. A translação e a rotação de corpo rígido não modificam o estado de tensão num ponto.

Atendendo a estas hipóteses, admite-se que os elementos do tensor das tensões (τ_{ij}) dependem dos elementos do tensor das deformações (d_{kl}) , de acordo com a seguinte relação

$$\tau_{ij} = f_{ij}(d_{kl}) \quad (4.1)$$

4.1 - Lei de Hooke generalizada

Cada uma das funções f_{ij} indicadas em (4.1) pode ser desenvolvida em série de Taylor, desde que f_{ij} seja uma função contínua e de derivadas também contínuas. Efectuando o desenvolvimento em série de Taylor na origem, i.e., para $d_{kl} = 0$, tem-se

$$\tau_{ij} = f_{ij}(0) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial d_{kl}} d_{kl} + \dots \quad (4.2)$$

Nota: o facto de os índices k e l se encontrarem repetidos no monómio implica um somatório de 1 a 3.

O termo $f_{ij}(0)$ corresponde ao estado de tensão quando as deformações d_{kl} são nulas, sendo portanto nulo. Uma vez que apenas se admitem pequenas deformações, os termos de ordem superior à primeira podem ser desprezados, resultando

$$\tau_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial d_{kl}} d_{kl} \quad (4.3)$$

Uma vez que τ_{ij} e d_{kl} são tensores de segunda ordem, $\partial f_{ij} / \partial d_{kl}$ é um tensor de quarta ordem, que passa a ser designado por c_{ijkl} , resultando

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} d_{kl} \quad (4.4)$$

Esta relação é designada lei de Hooke generalizada. Em (4.4), i e j são índices livres, enquanto k e l são índices mudos, que implicam a existência de somatórios de 1 a 3. O tensor de quarta ordem c_{ijkl} possui $3^4 = 81$ elementos. Estes 81 parâmetros não são independentes, pelos motivos que serão em seguida referidos.

Uma vez que o tensor das tensões é simétrico, só seis dos seus elementos são independentes. Estes seis elementos podem ser colocados num vector τ_i ($i = 1, \dots, 6$) ordenados da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Procedendo de um modo semelhante com o tensor das deformações, que também é simétrico, tem-se o vector d_i ($i = 1, \dots, 6$)

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ d_{23} \\ d_{31} \\ d_{12} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A relação (4.4), convertida numa relação entre os elementos independentes do tensor das tensões e os elementos independentes do tensor das deformações, passa a ser a seguinte

$$\tau_i = \sum_{j=1}^6 c_{ij} d_j \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (4.7)$$

$$\underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{d} \quad (4.8)$$

Assim se conclui que não são necessários 81 parâmetros para relacionar o estado de tensão com o de deformação, mas apenas $6 \times 6 = 36$, que é o número de elementos da

matriz c_{ij} da expressão (4.7). Uma vez que os elementos dos tensores τ_{ij} e d_{ij} foram colocados nos vectores τ_i e d_i , deixam de ser válidas as propriedades das expressões tensoriais na equação (4.7) e nas equações que forem a partir dela deduzidas.

O significado de cada um dos elementos de c_{ij} é exemplificado com o elemento c_{25} . Considere-se um tensor das deformações em que $d_{31} = d_5$ é unitário e os restantes elementos são nulos.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Assim se conclui que c_{25} é a componente τ_2 da tensão que ocorre quando d_5 é unitário e as restantes componentes de \tilde{d} são nulas.

Uma vez que as componentes do vector \tilde{d} são adimensionais, os elementos da matriz \tilde{c} têm as dimensões de uma tensão (e.g., N/m²).

Considerações de carácter energético, que não são aqui apresentadas, permitem concluir que a matriz \tilde{c} é sempre simétrica, i.e., $c_{ij} = c_{ji}$. Por este motivo, a equação (4.8) passa a ser a seguinte

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ \text{SIM.} & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ d_{23} \\ d_{31} \\ d_{12} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Assim se conclui que dos 36 elementos da matriz \tilde{c} apenas 21 são independentes.

4.2 - Casos de simetria elástica

Um material apresenta um determinado tipo de simetria elástica, quando ao ser sujeito a um campo de deformações com determinadas características de simetria, fica sujeito

a um campo de tensões com as mesmas características de simetria. Quando um material não apresenta qualquer simetria, diz-se anisotrópico.

4.2.1 - Simetria elástica relativamente a um plano

Vai-se em seguida proceder à dedução das características particulares que a matriz \tilde{c} apresenta, quando o material possui simetria elástica em relação a um plano. Considere-se que o plano de simetria elástica é paralelo ao plano (x_2, x_3) . Da aplicação de um campo de deformações simétrico em relação a este plano, resulta um campo de tensões também simétrico em relação ao mesmo plano. Considerem-se os pontos P e Q situados simetricamente em relação ao plano (x_2, x_3) (ver Fig. 4.1).

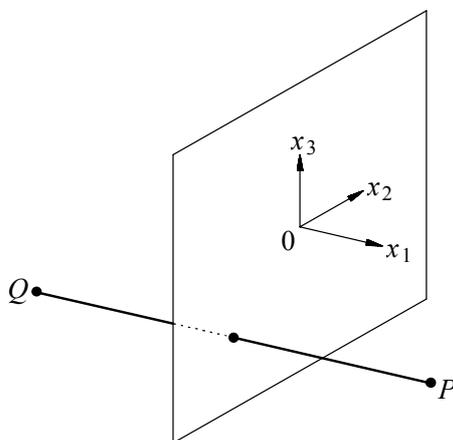


Figura 4.1 - Plano de simetria elástica.

Quando o corpo se encontra sujeito a um campo de deformações simétrico em relação ao plano (x_2, x_3) , verifica-se o seguinte

$$d_{11}^P = d_{11}^Q \quad (4.11)$$

$$d_{22}^P = d_{22}^Q \quad (4.12)$$

$$d_{33}^P = d_{33}^Q \quad (4.13)$$

$$d_{23}^P = d_{23}^Q \quad (4.14)$$

$$d_{31}^P = -d_{31}^Q \quad (4.15)$$

$$d_{12}^P = -d_{12}^Q \quad (4.16)$$

O sinal negativo em (4.15) e (4.16) deve-se ao facto de a uma distorção simétrica em relação ao plano (x_2, x_3) estarem associados valores numéricos de sinal oposto. Exemplifica-se com o caso da equação (4.16) (ver Fig. 4.2).

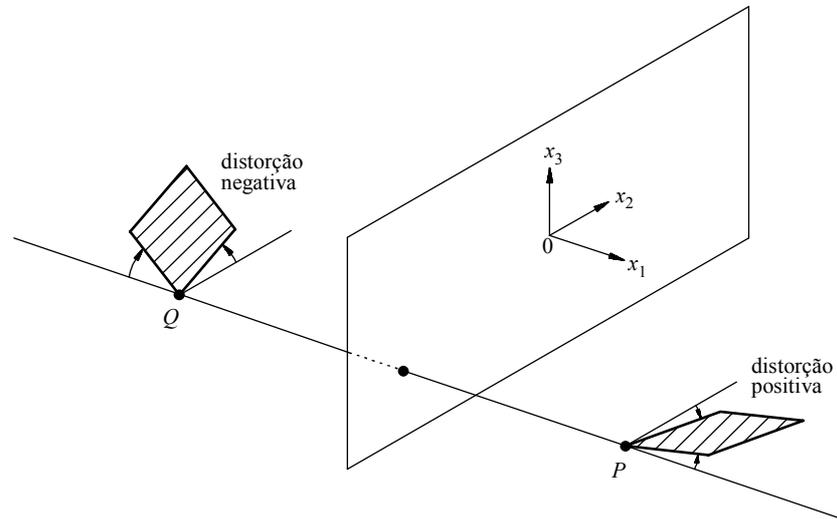


Figura 4.2 - Distorção γ_{12} simétrica em relação ao plano (x_2, x_3) .

As extensões e a distorção γ_{23} apresentam o mesmo valor numérico em P e em Q .

Uma vez que o material possui simetria elástica em relação ao plano (x_2, x_3) , da aplicação de um campo de deformações simétrico em relação a (x_2, x_3) resulta um campo de tensões também simétrico em relação ao mesmo plano. As componentes da tensão nos pontos P e Q podem-se relacionar do seguinte modo

$$\tau_{11}^P = \tau_{11}^Q \quad (4.17)$$

$$\tau_{22}^P = \tau_{22}^Q \quad (4.18)$$

$$\tau_{33}^P = \tau_{33}^Q \quad (4.19)$$

$$\tau_{23}^P = \tau_{23}^Q \quad (4.20)$$

$$\tau_{31}^P = -\tau_{31}^Q \quad (4.21)$$

$$\tau_{12}^P = -\tau_{12}^Q \quad (4.22)$$

Na Fig. 4.3 encontra-se a justificação do sinal negativo que está presente em (4.21) e (4.22).

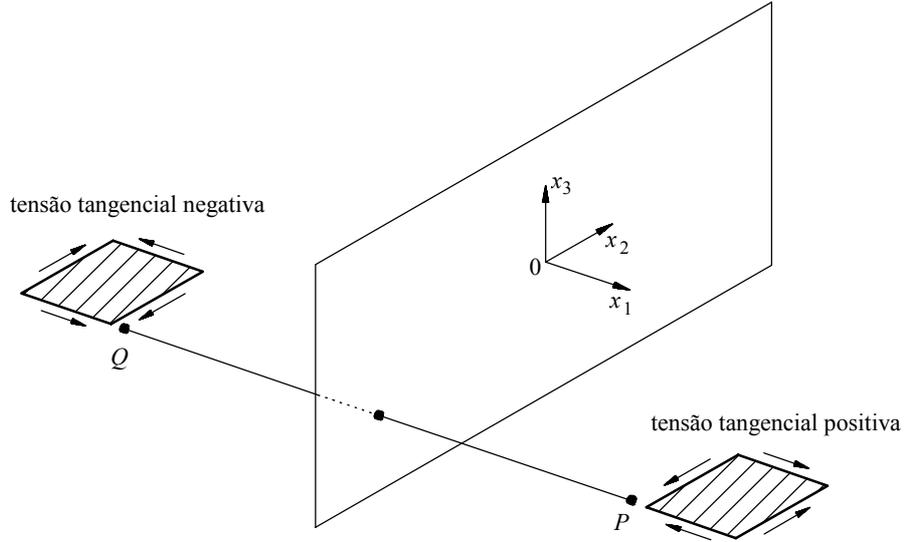


Figura 4.3 - Tensão tangencial τ_{12} simétrica em relação ao plano (x_2, x_3) .

A uma tensão tangencial τ_{12} simétrica em relação ao plano (x_2, x_3) estão associados valores de sinal oposto. As tensões normais e a tensão tangencial τ_{23} apresentam o mesmo valor numérico em P e em Q .

Atendendo a (4.10), nos pontos P e Q a tensão tangencial τ_{12} é fornecida pelas seguintes expressões

$$\tau_{12}^P = c_{16} d_{11}^P + c_{26} d_{22}^P + c_{36} d_{33}^P + c_{46} d_{23}^P + c_{56} d_{31}^P + c_{66} d_{12}^P \quad (4.23)$$

$$\tau_{12}^Q = c_{16} d_{11}^Q + c_{26} d_{22}^Q + c_{36} d_{33}^Q + c_{46} d_{23}^Q + c_{56} d_{31}^Q + c_{66} d_{12}^Q \quad (4.24)$$

Substituindo (4.11)-(4.22) em (4.24), resulta

$$-\tau_{12}^P = c_{16} d_{11}^P + c_{26} d_{22}^P + c_{36} d_{33}^P + c_{46} d_{23}^P - c_{56} d_{31}^P - c_{66} d_{12}^P \quad (4.25)$$

Adicionando (4.23) e (4.25) resulta

$$2c_{16} d_{11}^P + 2c_{26} d_{22}^P + 2c_{36} d_{33}^P + 2c_{46} d_{23}^P = 0 \quad (4.26)$$

Uma vez que a deformação é arbitrária, a equação (4.26) só se verifica se

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = 0 \quad (4.27)$$

Efectuando para τ_{31} um conjunto de considerações semelhantes às que foram efectuadas para τ_{12} , concluir-se-ia que

$$c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{45} = 0 \quad (4.28)$$

Quando um material apresenta simetria elástica em relação ao plano (x_2, x_3) , a sua matriz \tilde{c} é a seguinte

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ & & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & \text{SIM.} & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Na matriz \tilde{c} (4.29) só 13 elementos são independentes.

De um modo semelhante se poderia concluir que quando um material apresenta simetria elástica em relação ao plano (x_1, x_2) , a correspondente matriz \tilde{c} é a seguinte

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ & \text{SIM.} & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Quando um material apresenta simetria elástica relativamente ao plano (x_1, x_3) , a correspondente matriz \tilde{c} é a seguinte

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & 0 \\ & & c_{33} & 0 & c_{35} & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & c_{46} \\ & \text{SIM.} & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

4.2.2 - Simetria elástica relativamente a dois planos ortogonais

Considere-se agora um material que apresenta simetria elástica em relação aos planos (x_1, x_2) e (x_1, x_3) . A respectiva matriz \tilde{c} apresenta elementos nulos nas posições correspondentes a uma sobreposição dos elementos nulos de (4.30) com os elementos nulos de (4.31), resultando

$$\underset{\sim}{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

A matriz (4.32) possui elementos nulos nas posições correspondentes à simetria relativamente ao plano (x_2, x_3) , indicados em (4.29). Assim se conclui que, quando um material apresenta simetria elástica relativamente aos planos (x_1, x_2) e (x_1, x_3) , está implícita uma simetria elástica em relação ao plano (x_2, x_3) .

Recorrendo a uma circulação de índices e ao facto de o referencial ser arbitrário pode-se afirmar que, quando um material apresenta simetria elástica relativamente a dois planos ortogonais entre si, está implícita uma simetria elástica em relação a um terceiro plano ortogonal aos outros dois. Nestas circunstâncias, em que um material apresenta simetria elástica relativamente a três planos ortogonais entre si, diz-se que o material é ortótropo.

Na matriz $\underset{\sim}{c}$ (4.32) pode-se observar que, no caso dos materiais ortótropos, apenas nove elementos são independentes. Verifica-se também que, no referencial da simetria elástica, as tensões normais (τ_{11} , τ_{22} e τ_{33}) apenas dependem das extensões (d_{11} , d_{22} e d_{33}) e que cada uma das tensões tangenciais (τ_{23} , τ_{31} e τ_{12}) apenas depende da correspondente meia distorção (d_{23} , d_{31} e d_{12}), sendo

$$\tau_{23} = c_{44} d_{23} \quad (4.33)$$

$$\tau_{31} = c_{55} d_{31} \quad (4.34)$$

$$\tau_{12} = c_{66} d_{12} \quad (4.35)$$

Nas mesmas circunstâncias, verifica-se ainda que num estado de deformação em que apenas existam extensões as tensões tangenciais são nulas e num estado de deformação em que apenas existam distorções as tensões normais são nulas.

4.3 - Isotropia

Diz-se que um material é isótropo quando as suas propriedades são independentes da direcção. Neste caso a matriz $\underset{\sim}{c}$ é independente do referencial utilizado. Os materiais

isótopos apresentam simetria elástica em relação a três quaisquer planos mutuamente ortogonais, sendo válida a matriz (4.32) relativa aos materiais ortótopos. Para além das características indicadas em (4.32), no caso da isotropia a matriz \tilde{c} deve manter-se inalterada quando os eixos do referencial são trocados entre si. Para deduzir as características da matriz \tilde{c} no caso da isotropia, considere-se um cubo sujeito a três extensões d_{11} , d_{22} e d_{33} (ver Fig. 4.4a).

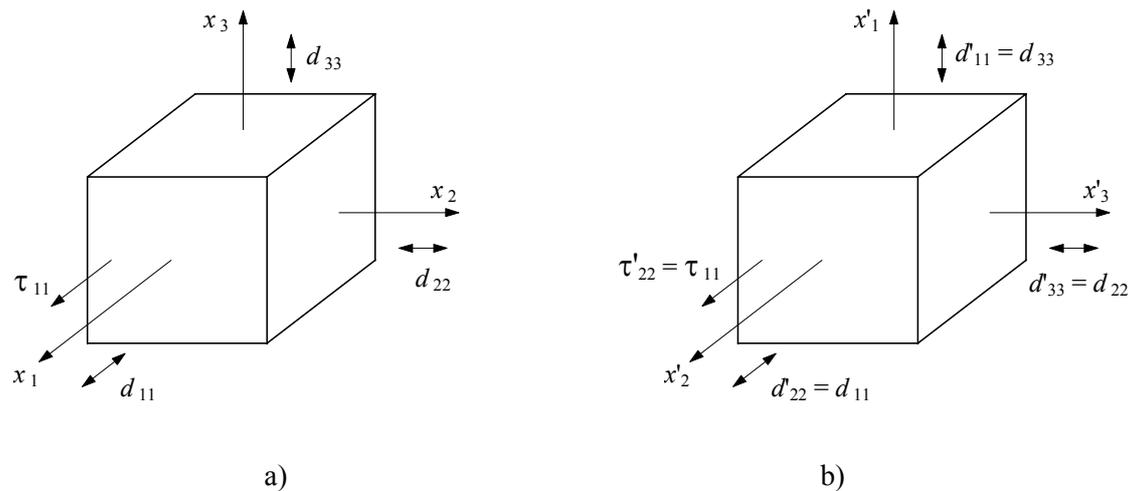


Figura 4.4 - Estado de deformação nos referenciais S e S' .

Atendendo a (4.10) e a (4.32) tem-se

$$\tau_{11} = c_{11} d_{11} + c_{12} d_{22} + c_{13} d_{33} \quad (4.36)$$

Considerando o mesmo estado de deformação referido a S' (ver Fig. 4.4b) e atendendo ao facto de a matriz \tilde{c} permanecer inalterada com a mudança de referencial, tem-se

$$\tau'_{22} = c_{12} d'_{11} + c_{22} d'_{22} + c_{23} d'_{33} \quad (4.37)$$

Atendendo às igualdades indicadas na Fig. 4.4b, de (4.37) resulta

$$\tau_{11} = c_{12} d_{33} + c_{22} d_{11} + c_{23} d_{22} \quad (4.38)$$

Igualando (4.36) a (4.38), obtém-se

$$c_{11} d_{11} + c_{12} d_{22} + c_{13} d_{33} = c_{22} d_{11} + c_{23} d_{22} + c_{12} d_{33} \quad (4.39)$$

Para um estado de deformação arbitrário, (4.39) só se verifica se

$$c_{11} = c_{22} \quad (4.40)$$

$$c_{12} = c_{23} \quad (4.41)$$

$$c_{13} = c_{12} \quad (4.42)$$

Considerações semelhantes envolvendo outras componentes do tensor das tensões permitiram concluir que na matriz \tilde{c} de um material isotrópico tem de se verificar as seguintes igualdades

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} \quad (4.43)$$

$$c_{12} = c_{13} = c_{23} \quad (4.44)$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} \quad (4.45)$$

Designando por A os elementos c_{11} , c_{22} e c_{33} , por B os elementos c_{12} , c_{13} e c_{23} e por C os elementos c_{44} , c_{55} e c_{66} , resulta a seguinte matriz \tilde{c}

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ & A & B & 0 & 0 & 0 \\ & & A & 0 & 0 & 0 \\ & & & C & 0 & 0 \\ & \text{SIM.} & & & C & 0 \\ & & & & & C \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Os três parâmetros (A , B e C) que definem, a matriz \tilde{c} (4.46) não são independentes.

Tendo em vista a obtenção de uma relação entre eles, considerem-se os referenciais $S(x_1, x_2, x_3)$ e $S'(x'_1, x'_2, x'_3)$, sendo os seguintes os versores de S' referidos a S

$$\hat{e}'_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)_S \quad (4.47)$$

$$\hat{e}'_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)_S \quad (4.48)$$

$$\hat{e}'_3 = (0, 0, 1)_S \quad (4.49)$$

A matriz de transformação de S para S' é a seguinte (ver Capítulo 1)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

O tensor das deformações \tilde{d} no referencial S é

$$\underset{\sim}{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Para obter o tensor das deformações no referencial S' recorre-se à lei de transformação tensorial (ver Capítulo 1)

$$\underset{\sim}{d}' = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{d} \underset{\sim}{A}^T \quad (4.52)$$

Substituindo (4.50) e (4.51) em (4.52) obtêm-se as seguintes componentes de $\underset{\sim}{d}'$

$$d'_{11} = \frac{1}{2}d_{11} + \frac{1}{2}d_{22} + d_{12} \quad (4.53)$$

$$d'_{22} = \frac{1}{2}d_{11} + \frac{1}{2}d_{22} - d_{12} \quad (4.54)$$

sendo

$$d'_{11} - d'_{22} = 2d_{12} \quad (4.55)$$

Procedendo de igual modo com o tensor das tensões $\underset{\sim}{\tau}$ no lugar do tensor $\underset{\sim}{d}$ obtêm-se uma relação semelhante a (4.55)

$$\tau'_{11} - \tau'_{22} = 2\tau_{12} \quad (4.56)$$

Uma vez que para os materiais isótopos a matriz $\underset{\sim}{c}$ é independente do referencial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ & A & B & 0 & 0 & 0 \\ & & A & 0 & 0 & 0 \\ & & & C & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & & C & 0 \\ & & & & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ d_{23} \\ d_{31} \\ d_{12} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\begin{bmatrix} \tau'_{11} \\ \tau'_{22} \\ \tau'_{33} \\ \tau'_{23} \\ \tau'_{31} \\ \tau'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ & A & B & 0 & 0 & 0 \\ & & A & 0 & 0 & 0 \\ & & & C & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & & C & 0 \\ & & & & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{11} \\ d'_{22} \\ d'_{33} \\ d'_{23} \\ d'_{31} \\ d'_{12} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Desenvolvendo o produto matriz-vector em (4.58) tem-se

$$\tau'_{11} = A d'_{11} + B d'_{22} + B d'_{33} \quad (4.59)$$

$$\tau'_{22} = B d'_{11} + A d'_{22} + B d'_{33} \quad (4.60)$$

Subtraindo (4.60) de (4.59) resulta

$$\tau'_{11} - \tau'_{22} = (A - B)(d'_{11} - d'_{22}) \quad (4.61)$$

Substituindo (4.55) e (4.56) em (4.61) resulta

$$\tau_{12} = (A - B)d_{12} \quad (4.62)$$

Em (4.57) está presente a seguinte relação

$$\tau_{12} = C d_{12} \quad (4.63)$$

De (4.62) e (4.63) conclui-se que

$$C = A - B \quad (4.64)$$

Quando o material é isótropo, a matriz \underline{c} (4.57) que relaciona $\underline{\tau}$ com \underline{d} apenas depende de dois parâmetros independentes, designados A e B .

4.3.1 - Relação inversa

No caso dos materiais isótropos é possível obter directamente a relação inversa de (4.57). Considere-se a seguinte mudança de nomenclatura nas componentes do tensor das tensões e no tensor das deformações

$$\sigma_1 = \tau_{11} \quad (4.65)$$

$$\sigma_2 = \tau_{22} \quad (4.66)$$

$$\sigma_3 = \tau_{33} \quad (4.67)$$

$$\varepsilon_1 = d_{11} \quad (4.68)$$

$$\varepsilon_2 = d_{22} \quad (4.69)$$

$$\varepsilon_3 = d_{33} \quad (4.70)$$

$$\gamma_{23} = 2d_{23} \quad (4.71)$$

$$\gamma_{31} = 2d_{31} \quad (4.72)$$

$$\gamma_{12} = 2d_{12} \quad (4.73)$$

Considere-se um cubo sujeito apenas a uma tensão normal σ_1 (ver Fig. 4.5).

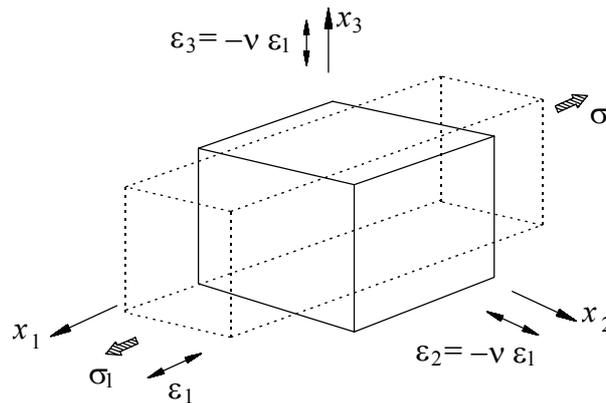


Figura 4.5 - Cubo sujeito apenas a uma tensão normal σ_1 .

Considere-se agora a seguinte definição:

Módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young (E) é a tensão normal que se tem de aplicar numa dada direcção para se obter uma extensão unitária nessa direcção. O módulo de Young tem as dimensões de uma tensão (e.g., N/m²).

Atendendo a esta definição tem-se para o caso representado na Fig. 4.5

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (4.74)$$

Uma vez que a uma tensão normal de tracção (positiva) está sempre associado um alongamento (extensão positiva), o módulo de Young E é sempre positivo.

Considere-se ainda a seguinte definição:

Coefficiente de Poisson (ν) é o quociente entre o simétrico da extensão transversal e a extensão longitudinal (ver Fig. 4.5). O coeficiente de Poisson é adimensional.

$$\nu = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \quad (4.75)$$

sendo

$$\varepsilon_2 = -\nu \varepsilon_1 \quad (4.76)$$

$$\varepsilon_3 = -\nu \varepsilon_1 \quad (4.77)$$

Uma vez que a um alongamento segundo x_1 estão sempre associados encurtamentos segundo x_2 e x_3 , o coeficiente de Poisson ν é sempre positivo.

Se no cubo representado na Fig. 4.5 actuarem simultaneamente tensões normais σ_1 , σ_2 e σ_3 , resultam as seguintes extensões

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} \quad (4.78)$$

$$\varepsilon_2 = -\nu \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} \quad (4.79)$$

$$\varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \quad (4.80)$$

Matricialmente tem-se

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ & 1/E & -\nu/E \\ \text{SIM.} & & 1/E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Invertendo esta relação resulta

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B \\ & A & B \\ \text{SIM.} & & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

sendo

$$A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.83)$$

$$B = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.84)$$

Considere-se agora um cubo sujeito apenas a uma tensão tangencial τ_{12} (ver Fig. 4.6).

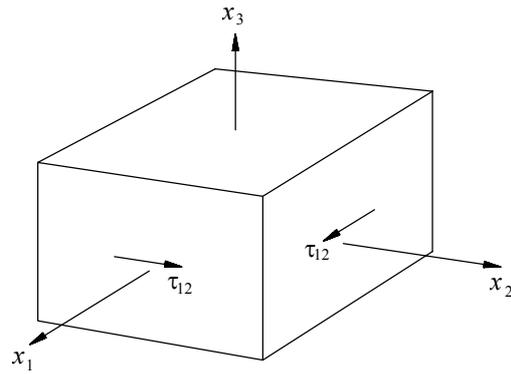


Figura 4.6 - Cubo sujeito apenas a uma tensão tangencial τ_{12} .

Na Fig. 4.7 encontra-se representada a distorção γ_{12} que ocorre como consequência da acção τ_{12} .

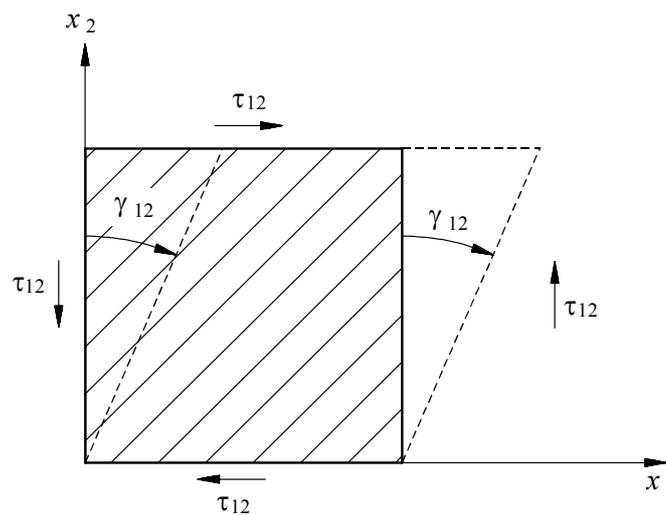


Figura 4.7 - Distorção γ_{12} provocada por τ_{12} .

Considere-se a seguinte definição:

Módulo de elasticidade transversal ou módulo de distorção (G) é a tensão tangencial que se tem de aplicar para se obter uma distorção unitária. O módulo de distorção tem as dimensões de uma tensão (e.g., N/m^2).

Atendendo a esta definição tem-se para o caso representado na Fig. 4.7

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G} \quad (4.85)$$

ou

$$\tau_{12} = G \gamma_{12} \quad (4.86)$$

Uma vez que uma tensão tangencial positiva provoca uma distorção positiva, o módulo de distorção G é sempre positivo.

Em (4.57) verifica-se que

$$\tau_{12} = C d_{12} \quad (4.87)$$

Atendendo a (4.73) tem-se

$$\tau_{12} = C \frac{\gamma_{12}}{2} \quad (4.88)$$

De (4.86) e (4.88) conclui-se que

$$C = 2 G \quad (4.89)$$

Substituindo (4.83), (4.84) e (4.89) em (4.64), obtém-se a seguinte relação entre E , ν e G

$$2G = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.90)$$

que é equivalente a

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.91)$$

Atendendo às conclusões entretanto obtidas, a lei de Hooke válida para materiais isotrópicos (4.57) passa a ser expressa do seguinte modo

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ & A & B & 0 & 0 & 0 \\ & & A & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

sendo A , B e G calculados com as expressões (4.83), (4.84) e (4.91) respectivamente.

No caso dos materiais isótopos, a matriz que relaciona tensões com extensões e distorções (4.92) apenas depende do módulo de Young (E) e do coeficiente de Poisson (ν), porque A , B e G apenas dependem desses dois parâmetros.

É frequente encontrar na bibliografia uma relação equivalente a (4.92) em que os elementos da matriz dependem de λ e de G , sendo estes dois parâmetros designados constantes de Lamé.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.94)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.95)$$

Recorrendo a (4.81) pode-se estabelecer a relação inversa de (4.92), que é a seguinte

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & & 1/G & 0 \\ & & & & & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

4.3.2 - Valor máximo do coeficiente de Poisson

Adicionando as equações (4.78), (4.79) e (4.80) obtém-se a seguinte equação

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \left(\frac{1}{E} - \frac{\nu}{E} - \frac{\nu}{E} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.97)$$

No Capítulo 2 a tensão média $\bar{\sigma}$ foi definida do seguinte modo

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.98)$$

No Capítulo 3 foi demonstrado que a deformação volumétrica $\Delta dV/dV$ pode ser calculada com a seguinte expressão

$$\frac{\Delta dV}{dV} = d_{11} + d_{22} + d_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (4.99)$$

Substituindo (4.98) e (4.99) em (4.97) resulta

$$\frac{\Delta dV}{dV} = \frac{1-2\nu}{E}(3\bar{\sigma}) \quad (4.100)$$

Uma vez que uma tensão média positiva (tracção média) provoca uma deformação volumétrica positiva (aumento de volume), tem de se verificar sempre o seguinte

$$\frac{1-2\nu}{E} > 0 \quad (4.101)$$

Uma vez que o módulo de Young é sempre positivo (ver Secção 4.3.1), conclui-se que

$$1-2\nu > 0 \quad (4.102)$$

$$\nu < 0.5 \quad (4.103)$$

Atendendo à definição do coeficiente de Poisson (ver Secção 4.3.1), conclui-se que

$$0 < \nu < 0.5 \quad (4.104)$$

A valores pequenos de ν correspondem materiais que apresentam pequenas deformações laterais quando são sujeitos a deformações longitudinais. A valores de ν próximos de 0.5 correspondem materiais quase incompressíveis.

4.3.3 - Casos particulares

No Capítulo 2 foram apresentadas as características do estado plano de tensão e no Capítulo 3 as do estado plano de deformação. Nestes casos particulares as relações entre o estado de tensão e o de deformação simplificam-se. Apresentam-se em seguida as características destas relações em estados planos de tensão e de deformação, em materiais isótropos.

4.3.3.1 - Estado plano de tensão

Nos estados planos de tensão considera-se que o tensor das tensões apresenta alguns elementos nulos (ver Capítulo 2)

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Uma vez que σ_3 , τ_{23} e τ_{31} são nulos, as relações (4.96) passam a ser as seguintes

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 \quad (4.106)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 + \frac{1}{E}\sigma_2 \quad (4.107)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G}\tau_{12} \quad (4.108)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 \quad (4.109)$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{31} = 0 \quad (4.110)$$

As equações (4.106), (4.107) e (4.108) podem ser agrupadas do seguinte modo

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ & 1/E & 0 \\ \text{SIM.} & & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Com a expressão (4.109) é possível calcular a extensão na direcção normal ao plano médio ($x_1 x_2$)

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.112)$$

A relação inversa de (4.111) é a seguinte

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & E\nu/(1-\nu^2) & 0 \\ & E/(1-\nu^2) & 0 \\ \text{SIM.} & & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

O módulo de distorção G depende de E e de ν de acordo com a equação (4.91).

4.3.3.2 - Estado plano de deformação

Nos estados planos de deformação considera-se que o tensor das deformações apresenta alguns elementos nulos (ver Capítulo 3)

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

Uma vez que em (4.114) d_{33} , d_{13} e d_{23} são nulos, e sabendo que $\varepsilon_3 = d_{33}$ e $\gamma_{ij} = 2d_{ij}$, em (4.92) ε_3 , γ_{23} e γ_{31} são igualmente nulos, resultando

$$\sigma_1 = A \varepsilon_1 + B \varepsilon_2 \quad (4.115)$$

$$\sigma_2 = B \varepsilon_1 + A \varepsilon_2 \quad (4.116)$$

$$\tau_{12} = G \gamma_{12} \quad (4.117)$$

$$\sigma_3 = B \varepsilon_1 + B \varepsilon_2 \quad (4.118)$$

$$\tau_{23} = \tau_{31} = 0 \quad (4.119)$$

Os parâmetros A , B e G são calculados com as expressões (4.83), (4.84) e (4.91) respectivamente.

As equações (4.115), (4.116) e (4.117) podem ser agrupadas do seguinte modo

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ & A & 0 \\ \text{SIM.} & & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

sendo

$$A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.121)$$

$$B = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.122)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.123)$$

A relação inversa de (4.120) é a seguinte

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\nu)(1-\nu)/E & -\nu(1+\nu)/E & 0 \\ & (1+\nu)(1-\nu)/E & 0 \\ \text{SIM.} & & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

Adicionando as equações (4.115) e (4.116) resulta

$$\sigma_1 + \sigma_2 = (A+B)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (4.125)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{A+B}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.126)$$

Substituindo (4.126) em (4.118) obtém-se

$$\sigma_3 = \frac{B}{A+B}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.127)$$

Substituindo A e B por (4.121) e (4.122) resulta

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.128)$$

Este resultado também poderia ser obtido considerando ε_3 nulo em (4.96)

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 + \frac{1}{E}\sigma_3 = 0 \quad (4.129)$$

resultando

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.130)$$

que coincide com (4.128).

BIBLIOGRAFIA

Correia de Araújo, F. - *Elasticidade e Plasticidade*, Imprensa Portuguesa, Porto, 1961.

Dias da Silva, V. - *Mecânica e Resistência dos Materiais*, Ediliber Editora, Coimbra, 1995.

Fung, Y.C. - *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, 1965.

Love, A.E.H. - *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth Edition, Dover Publications, 1944.

Mase, G.E. - *Theory and Problems of Continuum Mechanics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1970.

Sokolnikoff, I.S. - *Mathematical Theory of Elasticity*, Second Edition, McGraw-Hill, 1956.

Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N. - *Theory of Elasticity*, Third Edition, McGraw-Hill, 1988.

