Resistência dos Materiais 2003/2004
Curso de Engenharia Mecânica

19ª Aula

Duração - *2 Horas*
Data - *4 de Dezembro de 2003*

Sumário: Torção de Veios de Secção Circular
Objectivos da Aula: Apreensão dos conceitos Fundamentais associados à torção de veios de Secção Circular

Resumo do Conteúdo da Aula

1. Torção de Um Veio de Secção Circular

Um veio cilíndrico sujeito a momentos torsores, sendo x o eixo coincidente com o eixo do cilindro, está em equilíbrio se for

$$\sum M_x = 0$$

como se representa na figura 20.1.

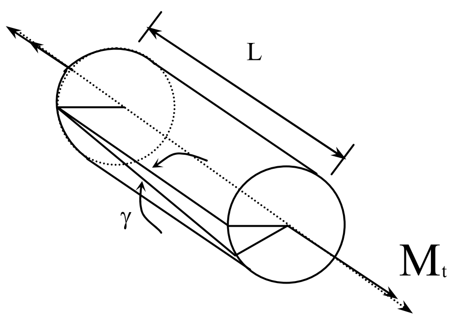


Figura 19.1 Peça Cilíndrica sujeita a Momentos Torsores

Pressupostos Fundamentais:

1- Secções Rectas do Cilindro permanecem Circulares e planas, após deformação, rodando em torno do respectivo centro.
2- Um raio traçado sobre uma secção recta permanece rectilíneo durante a deformação do veio.
3- O ângulo entre dois quaisquer raios no plano duma secção recta permanece constante durante a deformação da barra.
4- Se se considerar um ângulo de torção total pequeno não há variação do raio nem do comprimento do veio.

Considere-se um veio cilíndrico como se representa na figura 19.2 e considere-se um troço de dimensão dx entre as secções AA e BB. Os pontos R e S antes da deformação passam a ocupar as posições R* e S* após a deformação. A variação angular sofrida na direcção circunferencial, θ, é designada por γ e é tal que

$$\gamma = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{S'S^*}}{\overline{R^*S'}} = r\frac{d\phi}{dx} \tag{19.1}$$

A relação deformação – deslocamento para um veio de secção circular é

$$\varepsilon_{\theta x} = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} r \frac{d\phi}{dx}$$

As outras componentes do tensor das deformações em coordenadas cilíndricas são:

$$\varepsilon_{\theta r} = \varepsilon_{rx} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{xx} = 0$$

O vector deslocamento num ponto é

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{u deslocamento segundo x - eixo da barra} \\ \text{v deslocamento na direcçao circunferencial} \\ \text{w deslocamento na direcçao radial} \end{array} \right\}$$

Designando por θ a variação angular por unidade de comprimento, ou seja

$$2\varepsilon_{\theta x} = \gamma = r\frac{d\phi}{dx} = r\theta \tag{19.2}$$

Os deslocamentos são

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r\theta x \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{19.3}$$

Note-se que em coordenadas cilíndricas as deformações $\varepsilon_{\theta x}$ são

$$2\varepsilon_{\theta x} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{dv}{dx} = r\theta \tag{19.4}$$

O tensor das deformações tem a forma

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{x\theta} & \varepsilon_{xr} \\ \varepsilon_{\theta x} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta r} \\ \varepsilon_{rx} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r\theta/2 & 0 \\ r\theta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19.5}$$

sendo $\gamma = 2\varepsilon_{\theta x} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{dv}{dx} = r\theta$

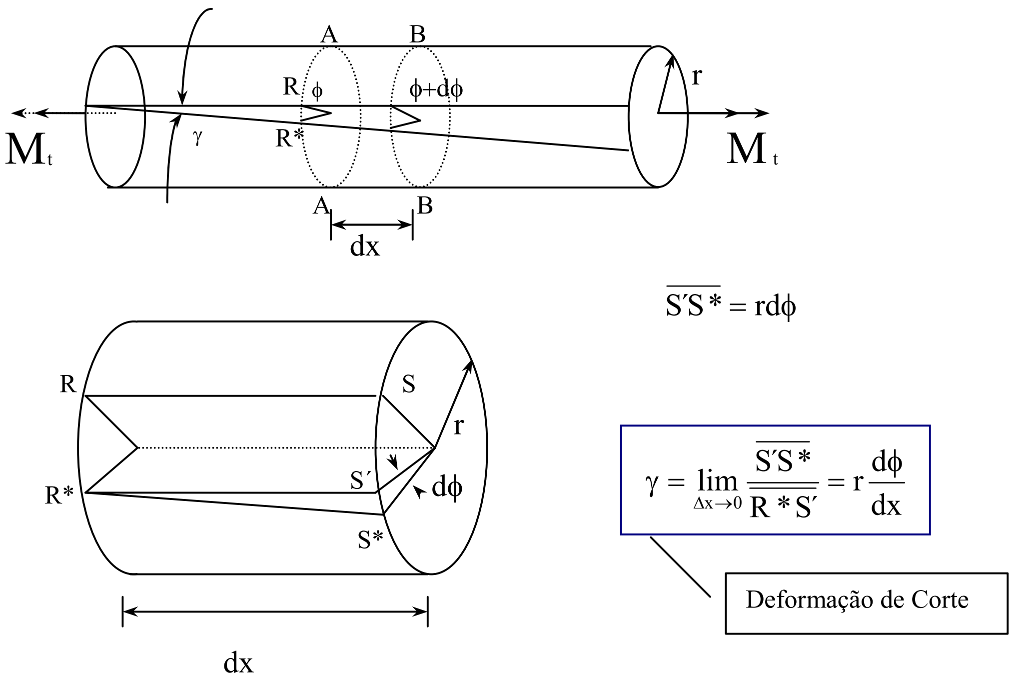


Figura 19.2: Deformação de Torção

A distribuição de deformações na secção é tal que o valor máximo ocorre para r igual ao valor máximo de r, designado por R e é zero para r = 0 como se representa na figura 19.3. As tensões são obtidas por aplicação da Lei de Hooke Generalizada admitindo que o comportamento do material é linear elástico. O tensor das tensões toma a forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{x\theta} & \tau_{xr} \\ \tau_{\theta x} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta r} \\ \tau_{rx} & \tau_{r\theta} & \sigma_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Gr\theta & 0 \\ Gr\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19.6}$$

No caso de se tratar de um veio oco a distribuição de deformações também se representa na figura 19.3.

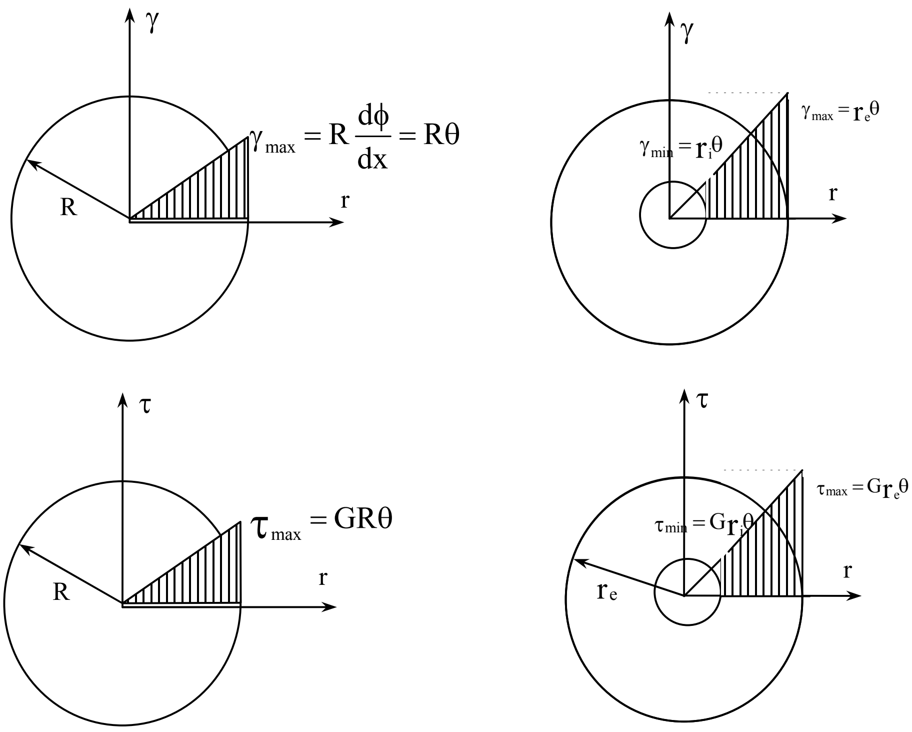


Figura 19.3: Distribuição de Deformações e Tensões ao longo do raio

As tensões distribuídas na secção correspondem a uma força num elemento de área dA que é

$$dF = \tau dA \tag{19.7}$$

O momento resultante da distribuição de tensões na secção é

$$M_t = \int_A r\,dF = \int_A r\tau\,dA$$
$$= \int_A r(Gr\theta)\,dA = G\theta\int_A r^2 dA \qquad (19.8)$$

como se representa na figura 19.4.

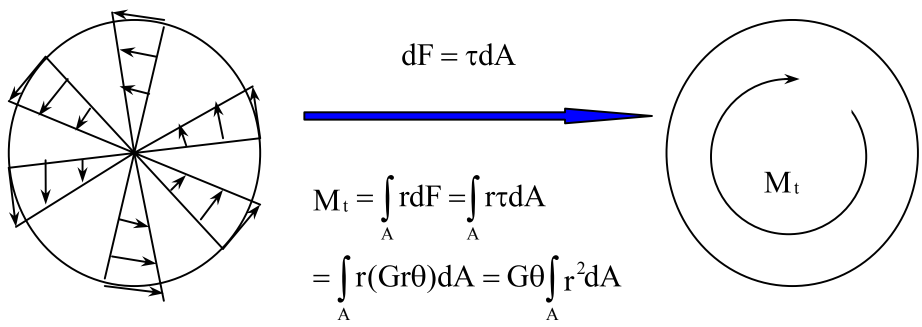


Figura 19.4: Momento Resultante das Tensões Distribuídas na Secção

Tendo em conta que o integral da expressão 19.8 representa o momento de inércia polar da secção, ou seja

$$I_p = J = \int_A r^2 dA = \frac{\pi r^4}{2} \qquad (19.9)$$

consequentemente o momento torsor é

$$\boxed{M_t = G I_p \theta} \qquad \text{ou} \qquad \theta = \frac{M_t}{G I_p} \qquad (19.10)$$

Tendo em conta o tensor das tensões segundo o qual, $\tau = Gr\theta$ e substituindo θ da equação (19.10), obtém-se

$$\boxed{\tau = \frac{M_t r}{I_p}} \qquad (19.11)$$

Tendo em conta que $\theta = d\phi/dx$, a equação 19.19 pode ser escrita com a forma

$$\frac{d\phi}{dx}=\frac{M_t}{GI_p} \qquad \text{ou} \qquad \phi(x)=\phi(0)+\int_0^x \frac{M_t(x)dx}{G(x)I_p(x)}$$

2. Torção de Um Veio de Secção Oca

No caso do veio ter a secção oca, a distribuição de tensões é linear como se representou na figura 19.3, sendo o momento obtido pela fórmula

$$M_t=\int_A r dF=\int_A r\tau dA$$
$$=\int_A r(Gr\theta)dA=G\theta\int_A r^2 dA$$

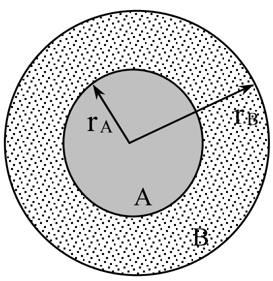
sendo dA = r dφ dr. Substituindo este valor na fórmula anterior obtém-se

$$M_t=G\frac{d\phi}{dx}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{r_i}^{r_e}r^3dr=G\theta\frac{\pi}{2}\left(r_e^4-r_i^4\right) \tag{19.12}$$

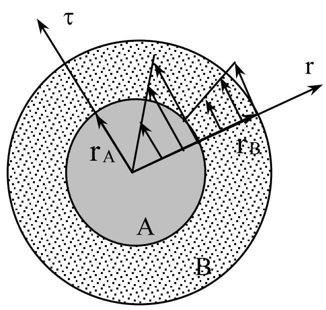
sendo $\frac{\pi}{2}\left(r_e^4-r_i^4\right)$ o momento de inércia polar.

3. Torção de Um Veio de Secção Composta

No caso de se considerar um veio constituído por dois materiais, o material **A** e o material **B**, como se representa na figura 19.5 com módulos de elasticidade transversal G_A e G_B respectivamente, as tensões são $\tau_A=G_A r_A\theta$ e $\tau_B=G_B r_B\theta$, sendo a 1ª a tensão no material A e a 2ª a tensão no material B.



$$\theta=\frac{\tau_A}{G_A r_A}=\frac{\tau_B}{G_B r_B}$$



+

Figura 19.5: Secção Composta

O momento torsor é composto pelo momento torsor no material A e pelo momento torsor no material B, ou seja

$$M_t = M_{tA} + M_{tB} = G_A J_A \theta + G_B J_B \theta \tag{19.13}$$

sendo J_A e J_B os momentos de inércia polares das regiões A e B.
Os momentos de inércia polares são obtidos a partir das dimensões e são

$$J_A = \frac{\pi r_A^4}{2} \text{ e } J_B = \frac{\pi (r_B^4 - r_A^4)}{2} \tag{19.14}$$

O ângulo de torção por unidade de comprimento, de acordo com 19.13, é

$$\theta = \frac{M_t}{G_A J_A + G_B J_B}$$

Consequentemente as tensões nos materiais A e B são

$$\tau_A = \frac{M_t G_A r_A}{G_A J_A + G_B J_B} \text{ e } \tau_B = \frac{M_t G_B r_B}{G_A J_A + G_B J_B} \tag{19.15}$$

As parcelas do momento torsor suportadas por cada um dos materiais são

$$M_{tA} = M_t \frac{G_A J_A}{G_A J_A + G_B J_B} \text{ e } M_{tB} = M_t \frac{G_B J_B}{G_A J_A + G_B J_B} \tag{19.16}$$

Exemplo 19.1

Considere um veio de Secção Circular com 5cm de diâmetro e admita que o pretende substituir por um veio de secção circular oca. No caso do diâmetro exterior da secção oca ser de 7.5 cm, qual deve ser o diâmetro interior de modo que a tensão máxima no tubo não se alterar. Determine o peso dos dois tubos e compare-os e diga o que conclui dessa comparação. Considere o mesmo material para os dois tubos.

Resolução

A tensão tangencial num veio de secção circular relaciona-se com o momento torsor através da fórmula

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p}$$

No caso do veio de secção circular, r = 2.5cm, o momento de inércia polar é

$$I_p = J = \int_A r^2 dA = \frac{\pi r^4}{2} = 61.3592\text{cm4}$$

e consequentemente a tensão é

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} = \frac{M_t \times 2.5}{61.3592} = 0.0407 M_t$$

No caso do veio de secção oca é

$$I_p = \frac{\pi}{2}\left(r_e^4 - r_i^4\right) = \frac{\pi}{2}(3.25^4 - r_i^4)$$

e a tensão é

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} = \frac{M_t \times 7.5}{\pi \times \left(3.25^4 - r_i^4\right)} = \frac{2.3873 \times M_t}{\left(111.5664 - r_i^4\right)}$$

Comparando as tensões nos dois veios obtém-se

$$\frac{2.3873}{\left(111.5664 - r_i^4\right)} = 0.0407 \quad \text{ou} \quad r_i^4 = 52.9104 \Rightarrow r_i = 2.697\text{cm}$$

O peso é proporcional às áreas das secções, e as áreas são:

$A_{solido} = 19.635\text{cm2}$ e $A_{oco} = 10.3317\text{cm2}$

O cociente das áreas é $A_{oco}/A_{solido} = 0.5262$.
Consequentemente o peso do veio oco é cerca de metade do peso do veio sólido.

Exemplo 19.2

Considere um veio de secção circular composta, como se representa na figura 19.6, cujo diâmetro exterior é ***140mm*** *e cujo diâmetro interior é desconhecido. A tensão máxima instalada é de* ***150MPa****.O material* ***A*** *tem um módulo de rigidez transversal* $\mathbf{G_A}$ ***=110GPa*** *e o material* ***B*** *tem um módulo de rigidez transversal* $\mathbf{G_B}$ ***=80GPa****. O* <u>*momento torsor*</u> $\underline{M_T}$ *a que a peça está sujeita é* ***78.5KN.m****.* <u>*Determine o raio interior do veio*</u>*.*

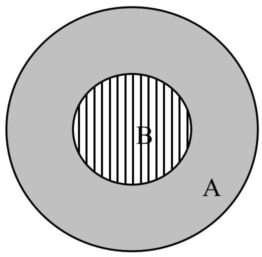


Figura 19.6: Veio Composto

Resolução

4. Teoria de Saint Vennant

Considere o veio representado na figura 19.6 sendo a secção de forma arbitrária e associado ao veio considere o sistema de eixos Oxyz sendo o eixo dos zz coincidente com o eixo do veio, o veio está sujeito a um momento torsor M_t .

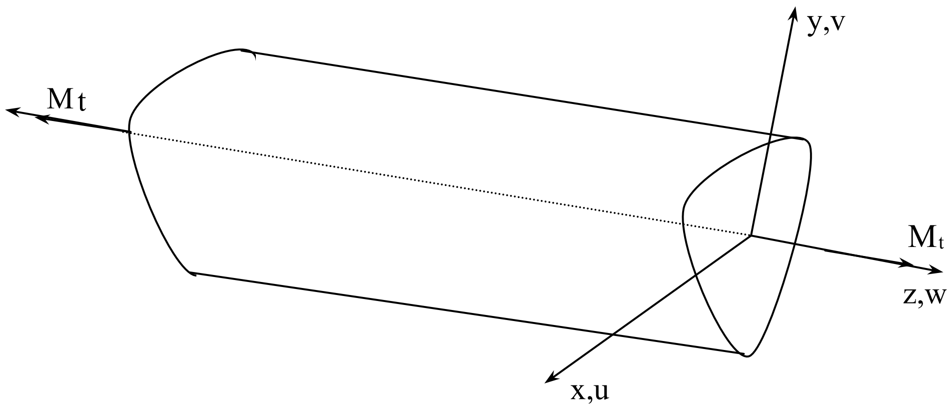


Figura 19.6: Veio sujeito a Torção

O deslocamento segundo o eixo é designado por,w e é uma função das coordenadas x,y, ou seja

w= w (x,y)

As secções rodam sem distorção em torno do centro de gravidade sendo o ângulo ϕ, definido em função de θ do seguinte modo

$\phi = \theta\, z$

Na figura 19.7 estão representados os deslocamentos sofridos pelo ponto P da secção no plano Ox,y , sendo as coordenadas do ponto no sistema de eixos Oxyz designadas por x,y,z, as quais se podem relacionar com as coordenadas polares do ponto através das relações seguintes

x = r cos α
y = r sen α

O deslocamento PP* é rϕ = r θ z cujas componentes segundo x e y são u,v. O vector deslocamento referido aos eixos dos xx e dos yy é de acordo com a figura

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r\theta z \operatorname{sen}\alpha \\ r\theta z \cos\alpha \\ w(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta z y \\ \theta z x \\ w(x,y) \end{Bmatrix} \tag{19.17}$$

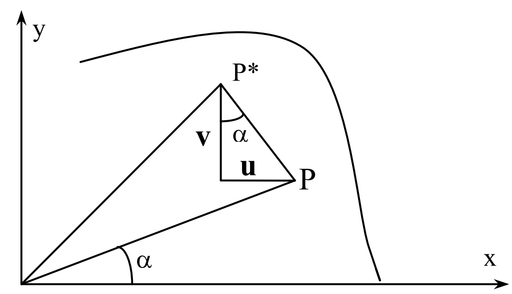


Figura 19.7: Deslocamentos segundo x e y

As deformações são obtidas a partir dos deslocamentos, tendo em conta as relações deformações deslocamentos, sendo o tensor das deformações

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\theta\right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\theta\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\theta\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\theta\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{19.18}$$

As tensões são obtidas por aplicação da lei de Hooke, sendo o tensor das tensões

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\theta\right) \\ 0 & 0 & G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\theta\right) \\ G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\theta\right) & G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\theta\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{19.19}$$

As equações de equilíbrio tomam neste caso a forma seguinte

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \tag{19.20}$$

Tendo em conta que as tensões são

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\theta\right) \quad \text{e} \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\theta\right) \tag{19.21}$$

As derivadas dos deslocamentos w são tais que

$$G\frac{\partial w}{\partial x} = \tau_{xz} - Gy\theta \quad \text{e} \quad G\frac{\partial w}{\partial y} = \tau_{yz} + Gx\theta \tag{19.22}$$

Para assegurar a compatibilidade dos deslocamentos, pode derivar-se em ordem a y a 1ª equação e em ordem a x a 2ª equação, os resultados obtidos têm de ser iguais, donde se infere a equação de compatibilidade seguinte

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = -2G\theta \tag{19.23}$$

A solução do problema passa pela solução do sistema de equações

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = -2G\theta \tag{19.24}$$

considerando as condições de fronteira seguintes

$\tau_{zx}\nu_x + \tau_{zy}\nu_y = 0$ na superfície lateral do sólido e $\iint_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})dxdy$ para z=0 e z=L.

A resolução do sistema de equações é possível para alguns problemas simples recorrendo à função de tensão.

5. Problemas Propostos para Solução na Aula

1. Um **veio** de secção circular sólida de diâmetro d e um veio de secção circular oca de diâmetro interior d/2 têm o mesmo comprimento e estão sujeitos a momentos torsores iguais de valor M_t. Determine a **tensão de corte máxima** em cada veio e o ângulo de torção entre os extremos de cada veio. O comprimento do veio é **L** e o raio exterior do veio oco é d .

2. Considere um veio composto de alumínio e aço com as dimensões representadas na figura e sujeito a um momento torsor de 2kN.m. Determine as tensões de corte máximas instaladas e determine o ângulo de corte. O módulo de rigidez transversal do Alumínio é 27 GPa e o módulo de rigidez transversal do Aço é 80GPa.

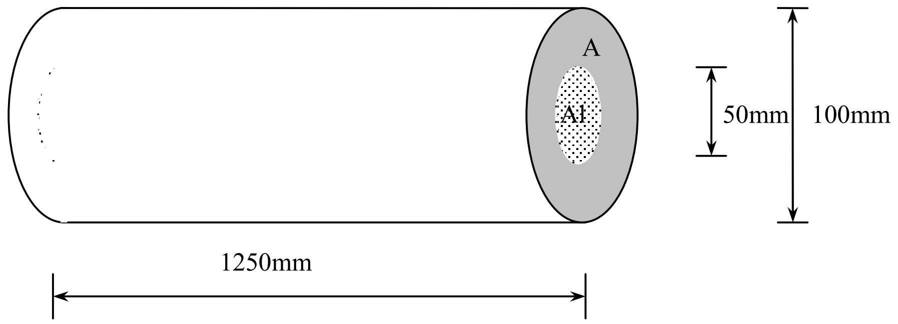


Figura 19.8: Veio Composto

3. *Considere um veio de secção circular composta, como se representa na figura 19.9, cujo diâmetro exterior é* ***140mm*** *e cujo diâmetro interior é desconhecido. A tensão máxima instalada é de* ***150MPa****.O material* ***A*** *tem um módulo de rigidez transversal* G_A***=110GPa*** *e o material* ***B*** *tem um módulo de rigidez transversal* G_B***=80GPa****. O momento torsor* M_T *a que a peça está sujeita é* ***78.5KN.m****. Determine o raio interior do veio.*

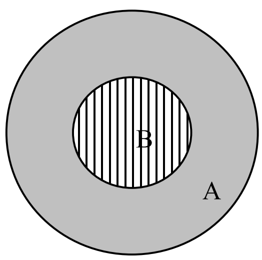


Figura 19.9: Veio Composto

6- Leituras a Efectuar nas Horas de Estudo

- V. Dias da Silva, *Mecânica e Resistência dos Materiais*, Ediliber Editora, 1995,
- Carlos Moura Branco, *Mecânica dos Materiais, Teoria e Aplicação*, McGraw-Hill, 1989.
- J. F. Silva Gomes, *Apontamentos de Mecânica dos Sólidos*, Editorial de Engenharia.

Resistência dos Materiais 2003/2004
Curso de Gestão e Engenharia Industrial

20ª Aula

Duração - ***2 Horas***
Data - ***4 de Dezembro de 2003***

Sumário: Função de Prandtl. Torção de Veios de Secção Elíptica e Rectangular e de Secções Abertas de paredes delgadas.
Objectivos da Aula: Apreensão dos conceitos Fundamentais associados à torção de veios de forma arbitrária

Resumo do Conteúdo da Aula

1. Função de Tensão de Prandtl

A solução do problema de torção de um veio de secção arbitrária, na ausência de forças de massa, passa pela solução do sistema de equações

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x}=-2G\theta \qquad (20.1)$$

considerando as condições de fronteira seguintes

$\tau_{zx}\nu_x + \tau_{zy}\nu_y = 0$ na superfície lateral do sólido e $M_t = \iint_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})dxdy$ para z=0 e z=L.

Para resolver este problema um dos métodos disponíveis recorre à chamada **função de tensão de Prandtl** que é uma função tal que

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{e} \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{20.2}$$

verificando automaticamente as equações de equilíbrio.

Substituindo as expressões 20.2 na equação de compatibilidade obtém-se

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -2G\theta \tag{20.3}$$

Esta equação é muitas vezes referida como **Equação de Poisson**.
A solução do problema passa agora pela solução da equação de compatibilidade 20.3 sujeita às condições de fronteira

$$\tau_{zx}\nu_x + \tau_{zy}\nu_y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}\nu_x - \frac{\partial\phi}{\partial x}\nu_y = 0 \tag{20.4}$$

A determinação da função ϕ adequada depende da geometria da secção.

2. Veio de Secção Elíptica

Considere-se um veio de secção elíptica como se representa na figura 20.1

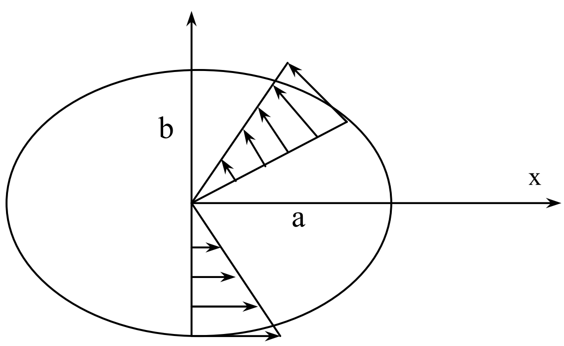


Figura 20.1: Veio de Secção Elíptica

A função ϕ a considerar é

$$\phi = k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \quad \text{sendo k uma constante.} \tag{20.5}$$

Substituindo a função f na equação de compatibilidade, obtém-se

$$\frac{2k}{a^2}+\frac{2k}{b^2} = -2G\theta = H\,,$$

resolvendo em ordem a k obtém-se

$$k = \frac{a^2b^2}{2(b^2+a^2)}H \tag{20.6}$$

A função de Prandtl para o veio de secção elíptica toma a forma

$$\phi = \frac{a^2b^2}{2\left(a^2+b^2\right)}H\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \tag{20.7}$$

A1ª condição de fronteira refere-se ao contorno do veio e é

$\tau_{zx}\nu_x + \tau_{zy}\nu_y = 0$ ou $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}+\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}=\dfrac{\partial\phi}{\partial s}=0$ ou seja ϕ é constante no contorno exterior do veio.

A outra condição de fronteira diz respeito aos extremos do veio e é

$$M_t = \iint_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})dxdy = -\iint_A (x\frac{\partial\phi}{\partial x}+y\frac{\partial\phi}{\partial y})dxdy \tag{20.8}$$

por aplicação do teorema de Gauss obtém-se

$$\begin{aligned} M_t &= -\iint_A (\frac{\partial(\phi x)}{\partial x}+y\frac{\partial(\phi y)}{\partial y}-2\phi)dxdy = \\ &= -\int_C (x\phi\cos(\nu,x)+y\phi\cos(\nu,y))ds + \iint_A 2\phi dxdy \end{aligned} \tag{20.9}$$

O integral estendido ao contorno é nulo pela 1ª condição de Fronteira e o Momento torsor é

$$M_t = \iint_A 2\phi dxdy \tag{20.10}$$

ou seja no caso do veio elíptico

$$M_t = \frac{\pi a^3 b^3}{\left(a^2 + b^2\right)} G\theta \tag{20.11}$$

No caso do veio elíptico a função de Prandtl pode ser escrita em termos do Momento torsor, com a seguinte forma

$$\phi = -\frac{M_t}{\pi ab}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \tag{20.12}$$

As tensões são

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2M_t y}{\pi a b^3} = -\frac{M_t y}{2I_x}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2M_t x}{\pi b a^3} = \frac{M_t x}{2I_y} \tag{20.13}$$

A tensão de corte resultante é

$$\tau_{z\alpha} = \left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2\right)^{1/2} = \frac{2M_t}{\pi ab}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{1/2} \tag{20.14}$$

No caso particular de ser a=b obtém-se os resultados correspondentes ao veio de secção circular.

3. Veio de Secção Rectangular

No caso do veio ter secção rectangular, como se representa na figura 20.2 ainda é possível obter solução para a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \qquad \text{sujeita à condição de contorno } \phi = 0 \tag{20.15}$$

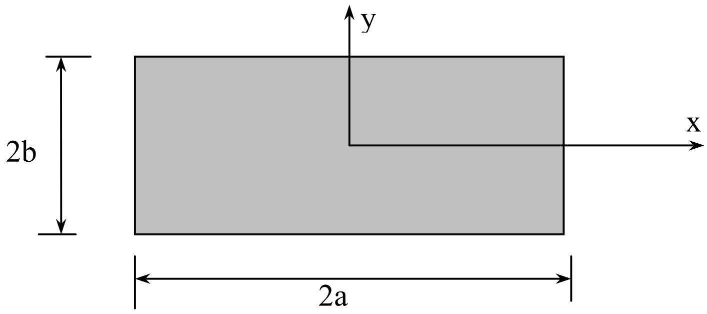


Figura 20.2: Secção Rectangular

A solução da equação de Poisson pode considerada com a forma

$$\phi = G\theta(x^2 - a^2) + V(x,y) \qquad (20.16)$$

onde V(x,y) é uma função par de (x,y). Substituindo esta função ϕ nas equações 20.15 obtém-se

$$\begin{aligned} &\nabla^2 V = 0 && \text{na área da Secção} \\ &V=0 && \text{para } x=\pm a \\ &V = G\theta(a^2 - x^2) && \text{para } y=\pm b \end{aligned} \qquad (20.17)$$

A solução destas equações pode ser procurada considerando o método da separação de variáveis, ou seja

$$V(x,y)= f(x)g(y) \qquad (20.18)$$

Onde f(x) é uma função de x e g(y) é uma função de y. Considerando esta forma para a função V(x,y) a 1ª equação 20.17 toma a forma

$$\nabla^2 V = g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = gf'' + fg'' = 0 \qquad (20.19)$$

sendo f´´ e g´´ as segundas derivadas de f e g em ordem a x e y respectivamente.
Para que a equação 20.19 seja verificada é necessário que seja

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = -\lambda^2 \qquad (20.20)$$

onde λ^2 representa uma constante positiva. As equações 20.20 podem ser escritas com a forma

$$f'' + \lambda^2 f = 0 \quad e \quad g'' - \lambda^2 g = 0 \tag{20.21}$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} f &= A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\lambda x \\ g &= A\cosh\lambda y + D\,\mathrm{senh}\lambda y \end{aligned} \tag{20.22}$$

Tendo em conta que V(x,y) tem de ser uma função par em x e y, as constantes B e D devem ser nulas, B=D=0, a função V toma então a forma

$$V = A \cos\lambda x \cosh\lambda y \tag{20.23}$$

Onde A representa uma constante arbitrária.

Para que a 2ª condição de 20.17, V=0 para x=±a, se verifique é necessário que seja

$$\lambda = \frac{n\pi}{2a} \tag{20.24}$$

Para verificar a 3ª condição de 20.17, considera-se

$$V = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{2a} \cosh\frac{n\pi y}{2a} \tag{20.25}$$

Considerando este desenvolvimento em série a equação harmónica, $\nabla^2 V = 0$, é verificada, assim como a 2ª condição de 20.17, a verificação da 3ª condição implica que seja

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi x}{2a} = G\theta(x^2 - a^2) = f(x) \tag{20.26}$$

onde

$$C_n = A_n \cosh\frac{n\pi b}{2a} \tag{20.27}$$

Para obter o coeficiente C_n, de acordo com a Teoria das Séries de Fourier, multiplica-se ambos os membros da equação 20.26 por cos(nπx/2a) e integra-se entre –a e +a, obtendo-se

$$C_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2a}dx \tag{20.28}$$

Tendo em conta que f(x)cos (nπx/2a)= $G\theta(a^2 - x^2)$ cos (nπx/2a) é simétrica em relação a x=0, pode escrever-se

$$C_n = \frac{2G\theta}{a}\int_0^a (x^2 - a^2)\cos\frac{n\pi x}{2a}dx \tag{20.29}$$

ou

$$C_n = \frac{2G\theta}{a}\int_0^a x^2\cos\frac{n\pi x}{2a}dx - 2G\theta a\int_0^a \cos\frac{n\pi x}{2a}dx \tag{20.30}$$

Este integral pode ser facilmente por uso de tabelas de integrais, obtendo-se

$$C_n = \frac{-32G\theta(-1)^{(n-1)/2}}{n^3\pi^3} \tag{20.31}$$

Tendo em conta as relações 20.27 e 20.31, obtém-se a constante

$$A_n = \frac{-32G\theta(-1)^{(n-1)/2}}{n^3\pi^3\cosh\frac{n\pi b}{2a}} \tag{20.32}$$

consequentemente a função de Prandtl ϕ toma a forma

$$\phi = G\theta(a^2 - x^2) - \frac{32G\theta a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}\cos\frac{n\pi x}{2a}\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{n^3\cosh\frac{n\pi b}{2a}} \tag{20.33}$$

A função ϕ, para b/a → ∞, toma o valor aproximado de

$$\phi \cong G\theta(a^2 - x^2) \tag{20.34}$$

Tendo em conta que $\cosh(y) = 1 + y^2/2! + y^4/4! + \ldots$.

As tensões obtém-se considerando as equações 20.2 e 20.33 e são

$$\tau_{xz} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{16G\theta a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}\cos\frac{n\pi x}{2a}\,\mathrm{sen\,h}\frac{n\pi y}{2a}}{n^2\cosh\frac{n\pi b}{2a}}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2G\theta x - \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2a} \cosh \frac{n\pi y}{2a}}{n^2 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \tag{20.35}$$

O momento é de acordo com 20.10

$$M_t = \iint_A 2\phi dxdy = GJ\theta \tag{20.36}$$

sendo $J = \frac{(2a)^3(2b)}{3}\left\{1 - \frac{192}{\pi^5}\left[\frac{a}{b}\right] \sum_{n=1,3,5,...}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tan gh \frac{n\pi b}{2a}\right\}$.

No caso particular de ser b/a → ∞ o termo dentro de parêntesis na expressão de J toma o valor unitário e J tende para o valor fora de parêntesis.

4. Tensões Máximas numa Secção Rectangular. Fórmulas Aproximadas.

Considerando uma secção rectangular de dimensões b×a sendo b o lado maior e a o lado menor como se representa na figura 20.3. A tensão máxima ocorre nos pontos A, A e é dada pela fórmula

$$\tau_{max} = \frac{1}{\alpha} \frac{M_t}{ba^2} \tag{20.37}$$

sendo α um coeficiente dependente do cociente b/a, cujos valores são dados pelos valores indicados na tabela 20.1.

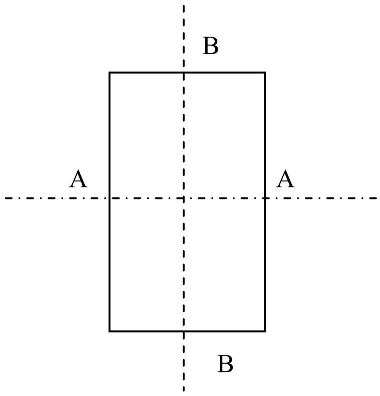


Figura 20.3: Secção Rectangular

O ângulo de torção por unidade de comprimento θ é dado pela equação

$$\theta = \frac{M_t}{c_1 b a^3 G} \quad \text{ou seja } C=GI_p = c_1 b a^3 G \qquad (20.38)$$

sendo o valor numérico de c_1 indicado na tabela 20.1

N=b/a	1.00	1.50	2.00	3.00	4.00	∞
$\alpha = c_1/c_2$	0.208	0.231	0.246	0.267	0.282	0.333
c_1	0.141	0.196	0.229	0.263	0.281	0.333
c_2	0.675	0.852	0.928	0.977	0.990	1.000
β	0.208	0.270	0.309	0.354	0.379	0.448
$\mu = c_1/c_2^2$	0.310	0.270	0.266	0.276	0.288	0.334

Tabela 20.1

Para n>4, c_1 e $c_2 = c_1/\alpha$ são dados pelas fórmulas aproximadas:

$$c_1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{0.630}{n}\right) \to \frac{1}{3}; \quad c_1 = 1 - \frac{0.650}{1+n^3} \to 1 \qquad (20.39)$$

A tensão τ nos pontos B, B no meio dos lados de menor dimensão é dada pela fórmula

$$\tau = \frac{1}{\beta} \frac{M_t}{ba^2} \qquad (20.40)$$

os valores de b estão indicados na tabela 20.1.

No caso particular da secção quadrada as tensões e o ângulo de torção por unidade de comprimento são dadas pelas fórmulas

$$\tau_{max} = \frac{1}{0.208} \frac{M_t}{b^3}; \qquad \theta = \frac{1}{0.141} \frac{M_t}{b^4 G}; \qquad C=GI_p = 0.141 b^4 G \qquad (20.41)$$

No caso de ser b>>a, rectângulo muito delgado, b/a→ ∞ e α→1/3 e as equações de t e q tomam a forma

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{ba^2} = G\theta a; \qquad \theta = \frac{3M_t}{ba^3 G}; \qquad C=GI_p = \frac{1}{3} ba^3 G \qquad (20.42)$$

5. Secções Abertas de parede delgada

Para as secções de paredes delgadas representadas na figura 20.4, a teoria da elasticidade e a experiência mostram que se podem utilizar as fórmulas 20.42, considerando a igual à espessura média e b igual ao comprimento total.

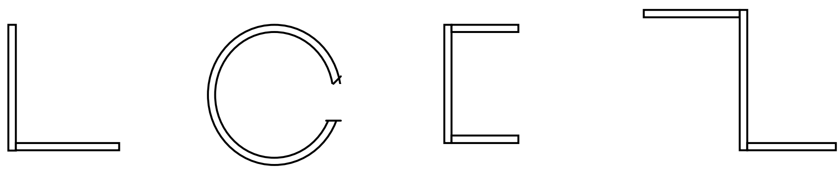


Figura 20.4: Secções Abertas de Paredes Delgadas

No caso das secções representadas na figura 20.5 que também são secções abertas de paredes delgadas, pode admitir-se sem grande erro que os diferentes rectângulos de dimensões $a_i \times b_i$ que compõem a secção resistem à torção independentemente uns dos outros. Podendo escrever-se

$$C = GI_p = k\frac{G}{3}\sum_{i=1}^{n} b_i a_i^3$$

sendo n o número de rectângulos do perfil. O coeficiente k é em geral ligeiramente superior a 1 para ter em conta o facto de os ângulos estarem amaciados como se representa na figura 20.5

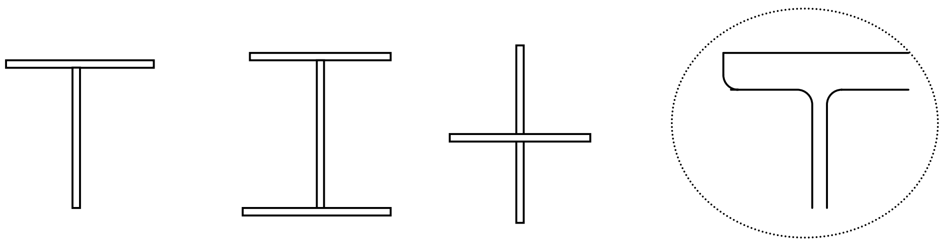


Figura 20.5: Secções Abertas

Estes resultados são confirmados pelos ensaios de Föppl assim como pelos trabalhos teóricos baseados na teoria da elasticidade. Föppl aconselha a usar-se k=1 para as cantoneiras, k=1.1 para os perfis em U e T e K=1.25 para os perfis em duplo T.
A tensão tangencial máxima para a secção é sempre dada pela fórmula

$\tau = G\theta a_i$ sendo $\theta = M_t / C$

Estes resultados não são válidos quando a torção é não uniforme.

6. Analogia de Membrana de Prandtl

O método da analogia de Membrana de Prandtl foi originariamente proposto em 1903 e e tira partido da semelhança existente entre a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-2G\theta \qquad (20.36)$$

e a equação de equilíbrio de forças, na direcção do eixo dos zz, da membrana sujeita a uma pressão lateral p, é

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{p}{S} \qquad (20.37)$$

onde z representa o deslocamento lateral da membrana em termos de uma pressão lateral de intensidade p (força por unidade de área) e uma força inicial por unidade de comprimento S, tracção inicial, como se representa na figura 20.6

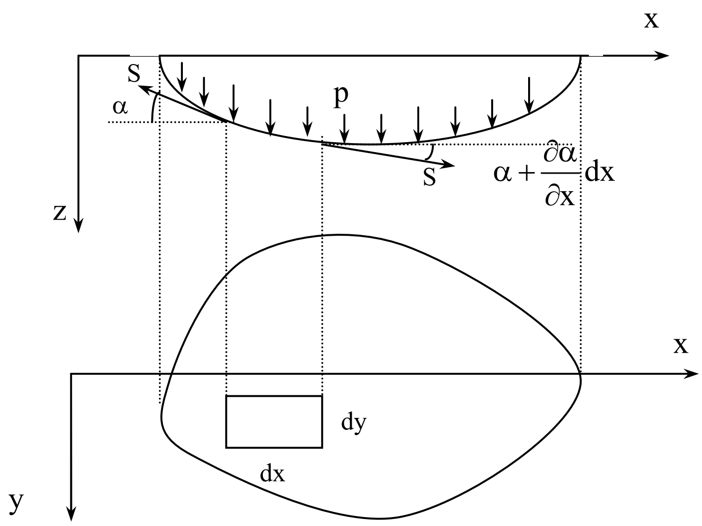


Figura 20.6 Membrana sujeita a pressão lateral

Prandtl mostrou que as deformações de corte numa barra elástica rectilínea sujeita a um momento torsor estão relacionadas com as inclinações da membrana estendida num orifício de uma placa plana e sujeita a uma pressão p, considerando o orifício com a forma da secção recta da barra e a membrana ligada à fronteira do orifício.
Comparando as equações 20.36 e 20.37 pode afirmar-se que

$$z = C\phi \quad \text{e} \quad p/S = C\,2G\theta \qquad (20.38)$$

sendo C uma constante de proporcionalidade.
Nestas condições é

$$\frac{z}{p/S}=\frac{\phi}{2G\theta} \quad e \quad \phi=\frac{2G\theta S}{p}z \tag{20.39}$$

De acordo com isto a função de Prandtl é proporcional ao deslocamento de membrana z e como as tensões de corte são consideradas iguais às derivadas da função ϕ , estas tensões são proporcionais às derivadas do deslocamento, z, da membrana em ordem a x e y na placa à qual a membrana está ligada. Sendo assim a imagem da distribuição de tensões é facilmente visualizada através da imagem da forma da inclinação da membrana correspondente. O momento torsor por sua vez é proporcional ao volume limitado pela membrana e pelo plano Oxy, tendo em conta a equação 20.10. Nestas condições é

$$\frac{p}{S} \propto 2G\theta; \quad \tau \propto \frac{dz}{dn}; \quad M_t \propto 2\times \mathrm{Vol} \qquad 20.40$$

O método da analogia de membrana, não é hoje muito utilizado na prática e tem um valor meramente histórico, para mais detalhes sobre o método da analogia de membrana podem consultar os apontamentos de Mecânica dos Sólidos de J. F. Silva Gomes.

7- Problemas Propostos para Resolução nas Aulas

1. Calcule o cociente entre as tensões máxima e o cociente entre os ângulos de torção produzidos para um mesmo momento torsor numa barra de secção rectangular tendo b/a=3 e numa barra de secção circular com área equivalente à secção rectângular. Considere as barras com o mesmo comprimento e construídas do mesmo material.~
2. Determine a tensão máxima instalada e o ângulo de torção por unidade de comprimento numa cantoneira 100×100×10mm, submetida a um momento torsor de 1kN.m.
3. Mostre que a função de tensão

$$\phi=\frac{G\theta}{2a}\left[x-\sqrt{3}y-\frac{2a}{3}\right]\left[x+\sqrt{3}y-\frac{2a}{3}\right]\left[x+\frac{a}{3}\right]$$

é adequada para efeitos de cálculo das tensões num triângulo equilátero com a forma representada na figura 20.7. Determine as tensões tangenciais.

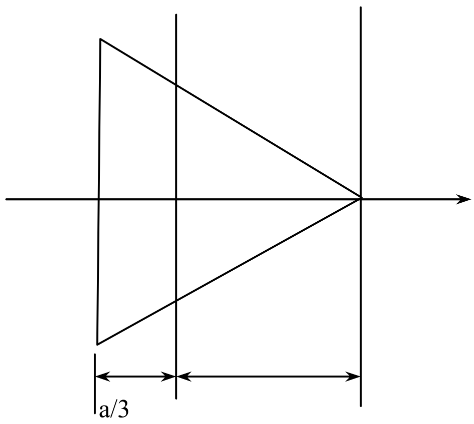


Figura 20.7: Triângulo Equlilátero

8- Leituras a Efectuar nas Horas de Estudo

- V. Dias da Silva, *Mecânica e Resistência dos Materiais*, Ediliber Editora, 1995,
- Carlos Moura Branco, *Mecânica dos Materiais, Teoria e Aplicação*, McGraw-Hill, 1989.
- J. F. Silva Gomes, *Apontamentos de Mecânica dos Sólidos*, Editorial de Engenharia.