

# MECÂNICA DOS SÓLIDOS

2015/16

Notas das aulas e problemas

Prof. Luis Faria

Prof. Luís Sousa

Versão 0.1

3.3	Problem 23.....	39
3.4	Problem 24.....	41
3.5	Problem 25.....	41
3.6	Problem ___.....	43
4	Leis Constitutivas .....	44
4.1	Sólidos de Hooke.....	45
4.2	Isotropia.....	45
4.2.1	Corte puro .....	46
4.2.2	Tração uniaxial.....	46
4.2.3	Exemplo 4.1 – Relação entre módulos para materiais isotrópicos.....	47
4.3	Sólidos de Hooke anisotrópicos .....	47
4.3.1	Anisotropia triclinica .....	48
4.3.2	Anisotropia ortotrópica.....	49
4.4	Isotropia transversal.....	50
4.5	Simetria cúbica.....	51
4.6	Isotropia.....	51
4.7	Problemas Resolvidos.....	53
4.7.1	Exemplo 4.2 - Problema tensões/deformações e direções principais.....	53
4.7.2	Exemplo 4.3 – Equação de equilíbrio de uma barra.....	55
4.7.3	Exemplo 4.4 – Relação tensão/deformação.....	56
4.7.4	Exemplo 4.5 - Barra anisotrópica à tração .....	58
5	Torção.....	60
5.1	Secção Circular .....	60
5.1.1	Exemplo 5.1 – Secção Circular.....	62
5.2	Secções não-circulares.....	62
5.2.1	Exemplo 5.2 - Secção Elítica .....	66
5.2.2	Exemplo 5.3 - Secção Triangular.....	68
5.2.3	Exemplo 5.4 - Veio Circular com escatel .....	69
5.2.4	Exemplo 5.5 - Problema Proposto .....	72
5.3	Secção Retangular Fina.....	72
5.4	Secção Retangular .....	73
5.4.1	Exemplo 5.6 - Secção Retangular .....	74
5.5	Secção Fina Composta de Vários Segmentos.....	75
5.5.1	Exemplo 5.7 - Secção em “C” .....	76
5.5.2	Exemplo 5.8 - Secção em “Z”.....	77

5.6	Torção de perfis finos fechados .....	77
5.6.1	Exemplo 5.9 – Problema torção perfil fechado fino .....	79
5.7	Torção de Perfis Finos Multicelulares.....	80
5.7.1	Exemplo 5.10 - Secção com 2 células.....	81
5.7.2	Exemplo 5.11 - Secção com 3 células.....	83
5.8	Problemas sugeridos .....	84
5.8.1	Problema 1 .....	84
5.8.2	Problema 2 .....	84
5.8.3	Problema 3 .....	84
5.8.4	Problema 4 .....	84
5.8.5	Problema 5 .....	85
5.8.6	Problema 6 .....	86
5.8.7	Problema 7 .....	86
6	Cilindros espessos .....	87
6.1	Problemas Resolvidos.....	89
6.1.1	Exemplo 6.1 - Cilindro longo sob pressão interna e externa .....	89
6.1.2	Exemplo 6.2 - Montagem de cilindros com aperto .....	90
6.1.3	Exemplo 6.3 – Cilindro espesso com pressão interna e plasticidade. ....	92
7	Placa com Furo em Elasticidade Plana .....	94
7.1.1	Exemplo 7.1 - Placa com furo circular.....	94
7.1.2	Exemplo 7.2 – Placa com furo elítico.....	95
8	Referências .....	96
9	Índice Remissivo .....	96

## Lista de Figuras

Figura 4-1- Deformação de corte puro. ....	46
Figura 4-2 – Estado de Tensão numa viga.....	56
Figura 5-1 – Secções à torção. ....	60
Figura 5-2 – Diagrama de corpo livre.....	60
Figura 5-3 – Equilíbrio na secção .....	60
Figura 5-4 – Deformação da secção transversal num veio circular. ....	61
Figura 5-5 - Empeno de secções não circulares.....	63
Figura 5-6 – Deformações na secção transversal .....	63
Figura 5-7 – Deslocamento e tensões de um ponto da secção transversal .....	64
Figura 5-8 – Tensões de corte na secção. ....	66
Figura 5-9 - Secção Elítica.....	66
Figura 5-10 - Isolinhas do empeno .....	68
Figura 5-11- Secção Elítica: simulação numérica.....	68
Figura 5-12 - Veio circular com escatel .....	69
Figura 5-13 - Secção retangular fina à torção. ....	73
Figura 5-14 - Secção retangular à torção .....	74
Figura 5-15- Viga retangular à torção .....	74
Figura 5-16 - Troço 60 x 40 mm .....	75
Figura 5-17 - Troço 40 x 30mm.....	75
Figura 5-18 - Secção fina composta .....	76
Figura 5-19 - Secção em "C" .....	76
Figura 5-20 - secção em "z" .....	77
Figura 5-21 - Perfil fechado oco à torção.....	77
Figura 5-22 - Equilíbrio de forças numa parede elementar. ....	78
Figura 5-23 - Fluxo de corte.....	78
Figura 5-24 - Momento torsor em perfis finos fechados. ....	78
Figura 5-25 – Figura do Exemplo 5.9 .....	79
Figura 5-26 – Cálculo da área fechada. ....	79
Figura 5-27 - Perfil fino multicelular. ....	80
Figura 5-28 – Fluxo de corte em perfis multicelulares.....	81
Figura 5-29 – Secção do Exemplo 5.10 .....	81
Figura 5-30 - Fluxos de corte do Exemplo 5.10 .....	82
Figura 5-31 – Secção de 3 células. ....	83
Figura 5-32 – Secção feita de chapas coladas entre si.....	86
Figura 5-33 - Placa estrutural. ....	86
Figura 5-34 - Secções em anel. ....	86
Figura 6-1 – Cilindro com pressão interne e externa.....	87

Figura 6-2 – Cilindros com aperto..... 90

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1 - Parâmetros de torção para secções retangulares ..... 74

## Lista de Exemplos

4.2.3 Exemplo 4.1 – Relação entre módulos para materiais isotrópicos. .... 47

4.7.1 Exemplo 4.2 - Problema tensões/deformações e direções principais ..... 53

4.7.2 Exemplo 4.3 – Equação de equilíbrio de uma barra..... 55

4.7.3 Exemplo 4.4 – Relação tensão/deformação ..... 56

4.7.4 Exemplo 4.5 - Barra anisotrópica à tração ..... 58

5.1.1 Exemplo 5.1 – Secção Circular ..... 62

5.2.1 Exemplo 5.2 - Secção Elítica ..... 66

5.2.2 Exemplo 5.3 - Secção Triangular ..... 68

5.2.3 Exemplo 5.4 - Veio Circular com escatel..... 69

5.2.4 Exemplo 5.5 - Problema Proposto..... 72

5.4.1 Exemplo 5.6 - Secção Retangular ..... 74

5.5.1 Exemplo 5.7 - Secção em “C” ..... 76

5.5.2 Exemplo 5.8 - Secção em “Z” ..... 77

5.6.1 Exemplo 5.9 – Problema torção perfil fechado fino..... 79

5.7.1 Exemplo 5.10 - Secção com 2 células ..... 81

5.7.2 Exemplo 5.11 - Secção com 3 células ..... 83

6.1.1 Exemplo 6.1 - Cilindro longo sob pressão interna e externa ..... 89

6.1.2 Exemplo 6.2 - Montagem de cilindros com aperto ..... 90

6.1.3 Exemplo 6.3 – Cilindro espesso com pressão interna e plasticidade..... 92

7.1.1 Exemplo 7.1 - Placa com furo circular ..... 94

7.1.2 Exemplo 7.2 – Placa com furo elítico..... 95

## 4 Leis Constitutivas

As propriedades dos materiais são especificadas por equações constitutivas, também chamadas leis constitutivas. Uma equação que relaciona as tensões com as deformações descreve as propriedades mecânicas de um material e é, portanto, uma equação constitutiva. Existem outras equações constitutivas como as que descrevem as características dos materiais de transmissão de calor, de resistência elétrica, etc. (Bower 2010).

### Nomenclatura:

$[\sigma_{ij}]$ - Tensor das tensões	$E_{ijkl}$ - tensor de rigidez
$[e_{ij}]$ - Tensor das pequenas deformações	$S_{ijkl}$ tensor de flexibilidade
$\beta_{ij}$ - Cossenos diretores	$\lambda, \mu$ - constantes de Lamé
$\mu_{ij,kl}$ – coeficientes de Chencov	$\eta_{i,jk}$ – coeficientes de Rabinovich

O tensor das tensões pode ser representado em notação indicial  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  ou matricial, Eq.(4.1)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

em que  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  indicam as coordenadas cartesianas relativamente às quais as componentes do tensor das tensões são definidas.

O tensor das deformações pode igualmente ser representado em notação indicial  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  ou matricial

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & e_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

As componentes do tensor das tensões ou do tensor das deformações mudam quando o referencial muda.

No referencial  $x'_1, x'_2, x'_3$  com a mesma origem mas diferente orientação, as coordenadas estão relacionadas por:

$$x'_i = \beta_{ij} x_j \quad (4.3)$$

em que  $\beta_{ij}$  são os cossenos diretores do eixo  $x'_i$  relativamente ao eixo  $x_j$ . As componentes do tensor das tensões e do tensor das deformações estão relacionadas pela Eq. (4.4):

$$\sigma'_{ij} = \beta_{ik}\beta_{jl}\sigma_{kl} \quad e'_{ij} = \beta_{ik}\beta_{jl}e_{kl} \quad (4.4)$$

# MECÂNICA DOS SÓLIDOS

2015/16

Notas das aulas e problemas

Prof. Luis Faria

Prof. Luís Sousa

Versão 0.1

3.3	Problem 23.....	39
3.4	Problem 24.....	41
3.5	Problem 25.....	41
3.6	Problem ___.....	43
4	Leis Constitutivas .....	44
4.1	Sólidos de Hooke .....	45
4.2	Isotropia.....	45
4.2.1	Corte puro .....	46
4.2.2	Tração uniaxial.....	46
4.2.3	Exemplo 4.1 – Relação entre módulos para materiais isotrópicos.....	47
4.3	Sólidos de Hooke anisotrópicos .....	47
4.3.1	Anisotropia triclinica .....	48
4.3.2	Anisotropia ortotrópica.....	49
4.4	Isotropia transversal.....	50
4.5	Simetria cúbica.....	51
4.6	Isotropia.....	51
4.7	Problemas Resolvidos.....	53
4.7.1	Exemplo 4.2 - Problema tensões/deformações e direções principais.....	53
4.7.2	Exemplo 4.3 – Equação de equilíbrio de uma barra.....	55
4.7.3	Exemplo 4.4 – Relação tensão/deformação.....	56
4.7.4	Exemplo 4.5 - Barra anisotrópica à tração .....	58
5	Torção.....	60
5.1	Secção Circular .....	60
5.1.1	Exemplo 5.1 – Secção Circular.....	62
5.2	Secções não-circulares.....	62
5.2.1	Exemplo 5.2 - Secção Elítica .....	66
5.2.2	Exemplo 5.3 - Secção Triangular.....	68
5.2.3	Exemplo 5.4 - Veio Circular com escatel .....	69
5.2.4	Exemplo 5.5 - Problema Proposto .....	72
5.3	Secção Retangular Fina.....	72
5.4	Secção Retangular .....	73
5.4.1	Exemplo 5.6 - Secção Retangular .....	74
5.5	Secção Fina Composta de Vários Segmentos.....	75
5.5.1	Exemplo 5.7 - Secção em “C” .....	76
5.5.2	Exemplo 5.8 - Secção em “Z”.....	77



5.6	Torção de perfis finos fechados .....	77
5.6.1	Exemplo 5.9 – Problema torção perfil fechado fino .....	79
5.7	Torção de Perfis Finos Multicelulares.....	80
5.7.1	Exemplo 5.10 - Secção com 2 células.....	81
5.7.2	Exemplo 5.11 - Secção com 3 células.....	83
5.8	Problemas sugeridos .....	84
5.8.1	Problema 1 .....	84
5.8.2	Problema 2 .....	84
5.8.3	Problema 3 .....	84
5.8.4	Problema 4 .....	84
5.8.5	Problema 5 .....	85
5.8.6	Problema 6 .....	86
5.8.7	Problema 7 .....	86
6	Cilindros espessos .....	87
6.1	Problemas Resolvidos.....	89
6.1.1	Exemplo 6.1 - Cilindro longo sob pressão interna e externa .....	89
6.1.2	Exemplo 6.2 - Montagem de cilindros com aperto .....	90
6.1.3	Exemplo 6.3 – Cilindro espesso com pressão interna e plasticidade. ....	92
7	Placa com Furo em Elasticidade Plana .....	94
7.1.1	Exemplo 7.1 - Placa com furo circular.....	94
7.1.2	Exemplo 7.2 – Placa com furo elítico.....	95
8	Referências .....	96
9	Índice Remissivo .....	96

## Lista de Figuras

Figura 4-1- Deformação de corte puro. ....	46
Figura 4-2 – Estado de Tensão numa viga.....	56
Figura 5-1 – Secções à torção. ....	60
Figura 5-2 – Diagrama de corpo livre.....	60
Figura 5-3 – Equilíbrio na secção .....	60
Figura 5-4 – Deformação da secção transversal num veio circular. ....	61
Figura 5-5 - Empeno de secções não circulares.....	63
Figura 5-6 – Deformações na secção transversal .....	63
Figura 5-7 – Deslocamento e tensões de um ponto da secção transversal .....	64
Figura 5-8 – Tensões de corte na secção. ....	66
Figura 5-9 - Secção Elítica.....	66
Figura 5-10 - Isolinhas do empeno .....	68
Figura 5-11- Secção Elítica: simulação numérica.....	68
Figura 5-12 - Veio circular com escatel .....	69
Figura 5-13 - Secção retangular fina à torção. ....	73
Figura 5-14 - Secção retangular à torção .....	74
Figura 5-15- Viga retangular à torção .....	74
Figura 5-16 - Troço 60 x 40 mm .....	75
Figura 5-17 - Troço 40 x 30mm.....	75
Figura 5-18 - Secção fina composta .....	76
Figura 5-19 - Secção em "C" .....	76
Figura 5-20 - secção em "z" .....	77
Figura 5-21 - Perfil fechado oco à torção.....	77
Figura 5-22 - Equilíbrio de forças numa parede elementar. ....	78
Figura 5-23 - Fluxo de corte.....	78
Figura 5-24 - Momento torsor em perfis finos fechados. ....	78
Figura 5-25 – Figura do Exemplo 5.9 .....	79
Figura 5-26 – Cálculo da área fechada. ....	79
Figura 5-27 - Perfil fino multicelular. ....	80
Figura 5-28 – Fluxo de corte em perfis multicelulares.....	81
Figura 5-29 – Secção do Exemplo 5.10 .....	81
Figura 5-30 - Fluxos de corte do Exemplo 5.10 .....	82
Figura 5-31 – Secção de 3 células. ....	83
Figura 5-32 – Secção feita de chapas coladas entre si.....	86
Figura 5-33 - Placa estrutural. ....	86
Figura 5-34 - Secções em anel. ....	86
Figura 6-1 – Cilindro com pressão interne e externa.....	87

Figura 6-2 – Cilindros com aperto..... 90

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1 - Parâmetros de torção para secções retangulares ..... 74

## Lista de Exemplos

4.2.3 Exemplo 4.1 – Relação entre módulos para materiais isotrópicos. .... 47

4.7.1 Exemplo 4.2 - Problema tensões/deformações e direções principais ..... 53

4.7.2 Exemplo 4.3 – Equação de equilíbrio de uma barra..... 55

4.7.3 Exemplo 4.4 – Relação tensão/deformação ..... 56

4.7.4 Exemplo 4.5 - Barra anisotrópica à tração ..... 58

5.1.1 Exemplo 5.1 – Secção Circular ..... 62

5.2.1 Exemplo 5.2 - Secção Elítica ..... 66

5.2.2 Exemplo 5.3 - Secção Triangular ..... 68

5.2.3 Exemplo 5.4 - Veio Circular com escatel..... 69

5.2.4 Exemplo 5.5 - Problema Proposto..... 72

5.4.1 Exemplo 5.6 - Secção Retangular ..... 74

5.5.1 Exemplo 5.7 - Secção em “C” ..... 76

5.5.2 Exemplo 5.8 - Secção em “Z” ..... 77

5.6.1 Exemplo 5.9 – Problema torção perfil fechado fino..... 79

5.7.1 Exemplo 5.10 - Secção com 2 células ..... 81

5.7.2 Exemplo 5.11 - Secção com 3 células ..... 83

6.1.1 Exemplo 6.1 - Cilindro longo sob pressão interna e externa ..... 89

6.1.2 Exemplo 6.2 - Montagem de cilindros com aperto ..... 90

6.1.3 Exemplo 6.3 – Cilindro espesso com pressão interna e plasticidade..... 92

7.1.1 Exemplo 7.1 - Placa com furo circular ..... 94

7.1.2 Exemplo 7.2 – Placa com furo elítico..... 95

## 4.1 Sólidos de Hooke

Neste capítulo iremos apresentar as equações que descrevem o comportamento mecânico dos sólidos linear-elásticos, também chamados sólidos de Hooke porque obedecem à Lei de Hooke (Skrzypek and Ganczarski 2015). Essa lei assume que o tensor das tensões é proporcional ao tensor das deformações infinitesimal.

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} e_{kl} \quad e_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (4.5)$$

em que os tensores de quarta ordem  $E_{ijkl}$  e  $S_{ijkl}$  são tensores de constantes ou módulos elásticos (independentes do estado de tensão e deformação) designados respetivamente por tensor de rigidez e tensor de flexibilidade. Esses tensores são definidos por  $3^4 = 81$  constantes pois  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ . A simetria dos tensores da tensão e da deformação,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  e  $e_{ij} = e_{ji}$ , implica

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} \quad S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} \quad (4.6)$$

Devido a estas condições de simetria, das 81 componentes dos tensores de rigidez e flexibilidade apenas 36 são independentes. Além disso, devido a propriedades termodinâmicas, mostra-se que, em geral, dessas 36 constantes apenas 21 são independentes.

## 4.2 Isotropia

Quando as propriedades mecânicas de um material não dependem da direção diz-se que este é isotrópico. Caso contrário é anisotrópico.

Podemos imaginar que rodamos uma amostra de um material e realizamos um ensaio mecânico nessa amostra. Se o resultado for igual ao que obtivemos se a amostra não fosse rodada (sublinhe-se, para qualquer rotação), então o material é isotrópico.

Para dar uma definição precisa de isotropia utilizamos a equação constitutiva: um material é isotrópico se a sua lei constitutiva fica inalterada quando sujeita a transformações de coordenadas ortogonais.

Por exemplo, se a lei constitutiva for  $\sigma_{ij} = E_{ijkl} e_{kl}$ , então no novo referencial, relacionado com o primeiro por uma transformação ortogonal,  $\sigma'_{ij} = E_{ijkl} e'_{kl}$ . Isto implica que

$$E_{ijkl} = \beta_{im} \beta_{jn} \beta_{ko} \beta_{lp} E_{mnop} \quad (4.7)$$

para todas as matrizes ortogonais ( $\beta_{ij}$ ). Pode-se mostrar que a isotropia permite reduzir a especificação de  $E_{ijkl}$  a duas constantes  $\lambda$  e  $\mu$ , tal que

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.8)$$

em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. A lei constitutiva fica com a forma

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (4.9)$$

Esta relação pode ser invertida, dando a deformação ( $e_{ij}$ ) que corresponde a um estado de tensão ( $\sigma_{ij}$ )

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (4.10)$$

Os parâmetros do material  $\lambda$  e  $\mu$  designam-se por constantes de Lamé.

Algumas soluções particulares permitem relacionar as constantes materiais  $G$ ,  $E$  e  $\nu$  usadas em engenharia com as constantes de Lamé.

#### 4.2.1 Corte puro

O campo de deslocamentos é dado por:  $u_1 = \gamma a_2$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ ; conforme a Figura 4-1.

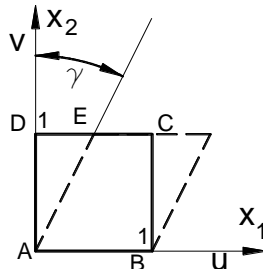


Figura 4-1- Deformação de corte puro.

os tensores das deformações e das tensões são

$$[e_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

com  $\tau = \mu \gamma$ . A resposta ao corte do corpo é determinada por  $\mu$  que se designa em Mecânica dos Materiais por  $G$ , o módulo de corte.

#### 4.2.2 Tração uniaxial

Neste caso é preferível utilizar a lei constitutiva invertida para dar deformações em função das tensões. Para o estado de tensão dado por

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

o tensor das deformações correspondente é dado por

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & -\nu e & 0 \\ 0 & 0 & -\nu e \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

com  $e = \sigma / E$ . O módulo de Young  $E$  é o quociente entre a tensão  $\sigma$  e a deformação longitudinal “ $e$ ” originada pela tensão; o coeficiente de Poisson  $\nu$  é o quociente entre a contração lateral e a deformação longitudinal numa barra em tração uniaxial. Estas duas constantes materiais relacionam-se com as constantes de Lamé por

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4.14)$$

A relação constitutiva para materiais elásticos, lineares e isotrópicos pode agora ser escrita utilizando o módulo de Young e o coeficiente de Poisson

$$e_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (4.15)$$

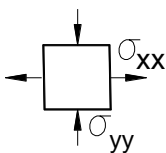
$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left( e_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (4.16)$$

#### 4.2.3 Exemplo 4.1 - Relação entre módulos para materiais isotrópicos.

Considere uma placa fina feita de material que obedece à lei de Hooke isotrópica. O carregamento da placa dá origem ao seguinte estado de tensão  $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} \equiv \sigma$  (constante) e todos os outros componentes nulos. Determine a tensão e a deformação num plano a 45° com os eixos x e y para concluir que  $G = E / (2(1 + \nu))$  num material isotrópico.

##### Resolução

A partir do estado de tensão e aplicando a Lei de Hooke, obtemos as deformações:

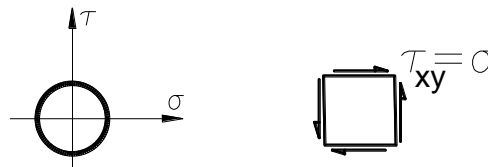


$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \left( -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \right) = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma \quad \epsilon_{yy} = \left( -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \right) - \frac{1}{E} \sigma_{yy} = -\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma$$

Subtraindo uma da outra:

$$\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma$$

Rodando 45° o estado de tensão (90° no plano de Mohr), obtemos um estado de tensão de corte puro:



Com a relação entre a tensão de corte e a distorção:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \sigma$$

A fazendo agora o círculo de Mohr para as deformações, obtemos:

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \Leftrightarrow \gamma_{xy} = \epsilon_{xx} - \epsilon_{yy} \quad \text{e portanto} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

### 4.3 Sólidos de Hooke anisotrópicos

O conceito de isotropia é útil para descrever materiais policristalinos ou materiais compósitos com partículas (não com fibras) já que reduz ao máximo o número de constantes independentes do material. Noutros casos é necessário considerar o material como anisotrópico e as componentes dos tensores de rigidez  $E_{ijkl}$  e de flexibilidade  $S_{ijkl}$  dependem do referencial utilizado. Faremos nesta secção uma classificação de materiais anisotrópicos em relação a simetrias dos tensores elásticos.

Como referido anteriormente, esses tensores têm 81 componentes das quais 21 independentes. Para simplificar a descrição desses tensores utiliza-se uma notação matricial, representando os tensores da tensão e da deformação como vetores coluna com 6 componentes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & e_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

As relações tensão-deformação escrevem-se na forma matricial, utilizando

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

#### 4.3.1 Anisotropia triclinica

Neste caso as matrizes de rigidez e de flexibilidade são cheias e têm a seguinte representação

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{yx}}{E_{yy}} & \frac{-\nu_{zx}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{yz,x}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{xz,x}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{xy,x}}{G_{xy}} \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{yy}} & \frac{-\nu_{zy}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{yz,y}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{xz,y}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{xy,y}}{G_{xy}} \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{yz}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{zz}} & \frac{\eta_{yz,z}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{xz,z}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{xy,z}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{x,yz}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{y,yz}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{z,yz}}{E_{zz}} & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xz,yz}}{G_{xz}} & \frac{\mu_{xy,yz}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{x,xz}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{y,xz}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{z,xz}}{E_{zz}} & \frac{\mu_{yz,xz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{xz}} & \frac{\mu_{xy,xz}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{y,xy}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{z,xy}}{E_{zz}} & \frac{\mu_{yz,xy}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xz,xy}}{G_{xz}} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Podemos identificar 5 tipos de constantes elásticas:

$E_{ii}$  – 3 módulos axiais (generalização do módulo de Young)

$G_{ij}$  – 3 módulos de corte em planos paralelos aos planos do referencial ( $i \neq j$ )

$\nu_{ij}$  – 3 coeficientes de Poisson, caracterizando contração na direção  $j$  quando é aplicada tensão na direção  $i$  ( $i \neq j$ )

$\mu_{ij,kl}$  – 3 coeficientes de Chencov, caracterizando deformações de corte em planos  $kl$  paralelos aos planos do referencial devido a tensões de corte atuando em planos  $ij$  ( $ij \neq kl$ )

$\eta_{i,jk}$  – 9 coeficientes de Rabinovich, caracterizando deformações de corte em planos  $jk$  devido a tensões normais aplicadas na direção  $i$

O número total de constantes referidas é 21. As outras constantes apresentadas na matriz de flexibilidade não são independentes pois obtêm-se pelas condições de simetria:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ji}}{E_{jj}} \quad \frac{\mu_{ij,kl}}{G_{ij}} = \frac{\mu_{kl,ij}}{G_{kl}} \quad \frac{\eta_{i,jk}}{E_{ii}} = \frac{\eta_{jk,i}}{G_{jk}} \quad (4.21)$$

A anisotropia triclinica corresponde ao caso mais geral de anisotropia em que não existe nenhum referencial para o qual se consegue anular qualquer componente das matrizes de constantes elásticas.

### 4.3.2 Anisotropia ortotrópica

A maioria dos materiais de engenharia possui propriedades de simetria que implicam uma redução do número de constantes do material diferentes de zero. Nesse caso, em determinado referencial que reconheça essa simetria, as matrizes de rigidez e flexibilidade deixam de ser cheias e passam a ter muitos elementos nulos.

É o caso de um material fibroso em que as fibras estão alinhadas na direção dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Tal material tem 3 planos ortogonais de simetria e designa-se ortotrópico. Pode-se mostrar que nesse caso tanto os 9 coeficientes de Rabinovich  $\eta_{i,jk}$  como os 3 coeficientes de Chencov  $\mu_{ij,kl}$  são nulos e portanto não existe acoplamento entre



tensões de corte e extensões longitudinais, e as deformações de corte são produzidas exclusivamente por tensões de corte que atuam nesses planos, conduzindo à seguinte matriz de flexibilidade:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{yx}}{E_{yy}} & \frac{-\nu_{zx}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{yy}} & \frac{-\nu_{zy}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{yz}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

com as seguintes condições de simetria:

$$\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}} = \frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} \quad \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} = \frac{\nu_{xz}}{E_{xx}} \quad \frac{\nu_{zy}}{E_{zz}} = \frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} \quad (4.23)$$

No caso de ortotropia o número de constantes independentes é 9: 3 módulos de Young generalizados, 3 módulos de corte generalizados e 3 coeficientes de Poisson generalizados.

#### 4.4 Isotropia transversal

Este modelo de lei constitutiva é mais simples que o anterior e justifica-se em muitas aplicações. Voltando ao exemplo de material fibroso, se não existirem fibras no plano xy, ou se as fibras estiverem distribuídas ao acaso nesse plano, o material é isotrópico no plano xy. Nesse caso

$$E_{xx} = E_{yy} \quad G_{xz} = G_{yz} \quad \nu_{xz} = \nu_{yz} \quad G_{xy} = \frac{E_{xx}}{2(1 + \nu_{xy})} \quad (4.24)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{xy}}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{zx}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{zx}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{xz}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

No caso de isotropia transversal o número de constantes independentes é 5.

#### 4.5 Simetria cúbica

Neste caso é possível uma redução adicional do número de constantes independentes para 3 uma vez que

$$E_{xx} = E_{yy} = E_{zz} \equiv E \quad G_{xz} = G_{yz} = G_{xy} \equiv G \quad \nu_{xz} = \nu_{yz} = \nu_{xy} \equiv \nu \quad (4.26)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{E} & \frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

Contudo não existe relação entre E, G e  $\nu$ .

Um exemplo de materiais com esta simetria são as ligas de níquel monocristal utilizadas para as turbinas dos motores de avião.

#### 4.6 Isotropia

Neste caso duas constantes caracterizam as propriedades mecânicas do material. Entre E, G e  $\nu$  existe a relação  $G = E / (2(1 + \nu))$ . A lei de Hooke isotrópica toma a forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Com as relações adicionais:

$$G = \mu \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.29)$$

em que k é o módulo de compressibilidade volumétrica.

No caso particular de tensão plana no plano xy, a matriz de rigidez e a matriz de flexibilidade podem ser reduzidas às seguintes matrizes de 3X3

$$\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (4.30)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

## 4.7 Problemas Resolvidos

### 4.7.1 Exemplo 4.2 - Problema tensões/deformações e direções principais

O estado de tensão num ponto P é

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

- Obter as tensões principais e as respetivas direções principais de tensão
- Obter a máxima tensão de corte no ponto P
- A direção normal ao plano onde ocorre a máxima tensão de corte
- Escrever o tensor das tensões no referencial de c)
- Calcular o tensor das deformações para um material com  $E=70\text{GPa}$  and  $\nu=0.3$

Resolução:

- a) Resolver  $|\sigma - \lambda I| = 0$  para obter as tensões principais

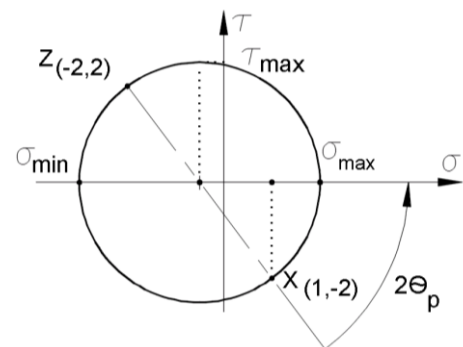
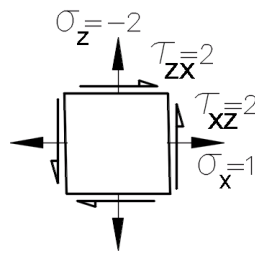
$$|\sigma - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(-2-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)(-2-\lambda) - 4] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)[\lambda^2 + \lambda - 6] = 0$$

$$\sigma_1 = 2 \quad \sigma_2 = 1 \quad \sigma_3 = -3$$

Ou, usando o círculo de Mohr, considerar apenas o plano XZ, pois Y já é direção principal de tensão (não há tensão de corte em  $[\sigma]$  associada à linha e coluna 2). Assim, temos:

$$\sigma_{\varepsilon_1, \varepsilon_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$



$$\text{center} = \left[ \frac{1+(-2)}{2}, 0 \right] = \left[ -\frac{1}{2}, 0 \right]$$

$$\text{Radius} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\sigma_1 = C + R = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

$$\sigma_3 = C - R = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$$

Como se pode ver, ambos os métodos deram os mesmos resultados.

Direções principais de tensão:

Resolver para  $\lambda_1 = 2$ :

$$[\underline{\sigma} - \lambda_1 \underline{I}]\{\underline{n}\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

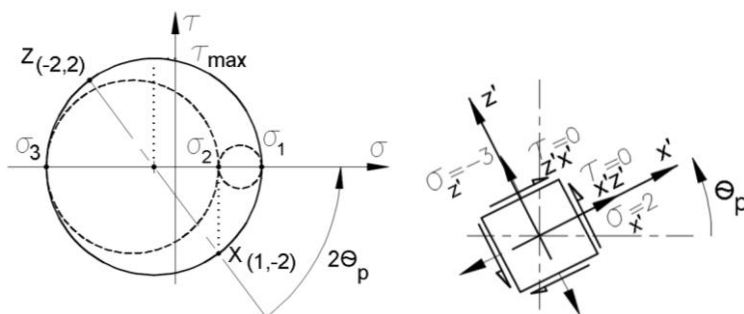
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -n_1 + 2n_3 = 0 \\ -n_2 = 0 \\ 2n_1 - 4n_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} n_1 = 2n_3 \\ n_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 2 \\ n_2 = 0 \\ n_3 = 1 \end{cases} \text{ normalizing } \underline{n}^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \ 0 \ 1)$$

Como já sabíamos que  $\underline{n}^{\circ} = (0 \ 1 \ 0)$

O terceiro vetor próprio pode facilmente ser obtido por  $\underline{n}^{\circ} = \underline{n}^{\circ 1} \times \underline{n}^{\circ 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \{-1 \ 0 \ 2\}$

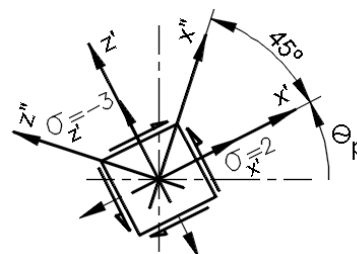
b) A máxima tensão de corte é  $\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right| = \frac{2 - (-3)}{2} = \frac{5}{2}$

Que corresponde ao raio do círculo de Mohr maior. Relembrar de que em 3D, temos 3 círculos de Mohr correspondentes a cada plano:



c) Sabemos antecipadamente que a máxima tensão de corte atua num plano perpendicular ao plano definido por  $\underline{n}^{\circ 1}, \underline{n}^{\circ 2}$  rodado  $45^\circ$  em torno do eixo  $\underline{n}^{\circ 3}$ . A normal  $\underline{n}_s$  pode ser obtida por

$$\underline{n}_s \parallel (\underline{n}^{\circ 1} + \underline{n}^{\circ 2}) \Leftrightarrow \underline{n}_s \parallel (1 \ 0 \ 3) \Leftrightarrow \underline{n}_s = \frac{1}{\sqrt{10}}(1 \ 0 \ 3)$$



d) A partir do círculo de Mohr de b) facilmente se escreve o tensor das tensões::

$$\sigma = \begin{bmatrix} \text{Center} & 0 & -\text{Radius} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Radius} & 0 & \text{Center} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Notar o valor “-Radius” da convenção dos sentidos ao desenhar no plano de Mohr

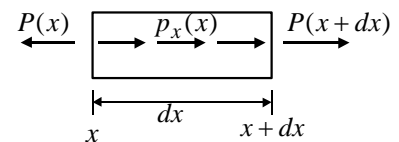
e) A equação constitutiva para materiais elásticos é  $e_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$

Neste exemplo  $\sigma_{kk} = 1 + 1 + (-2) = 0$ , e portanto  $e_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij}]$

$$e_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times 10^6 = \frac{(1+0.3)}{65 \times 10^9} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times 10^6 = 2 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

#### 4.7.2 Exemplo 4.3 – Equação de equilíbrio de uma barra

Obter a equação de equilíbrio da barra com carregamento axial.



#### Resolução

Fazendo o equilíbrio na direção x:  $\sum F_x = 0 \Leftrightarrow P(x+dx) - P(x) + p_x dx = 0$

Dividindo por dx:  $\frac{P(x+dx) - P(x)}{dx} + p_x = 0$

E fazendo o limite quando  $dx \rightarrow 0$ :  $\frac{\partial P}{\partial x} + p_x = 0$

Como se tem  $\sigma_{xx} = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma_{xx} A = (E e_{xx}) A = EA \frac{\partial u_x}{\partial x}$

E substituindo na equação de equilíbrio, obtemos a equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + p_x = 0$$

Note-se que EA pode ser extraído de  $\frac{\partial}{\partial x} ( \quad )$  se, e só se, forem constantes ao longo da barra.

4.7.3 Exemplo 4.4 - Relação tensão/deformação

Para um sólido elástico, linear e isotrópico,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  e o estado de tensão é dado por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

- a) Determine o tensor das deformações no corpo.
- b) Inverta a Eq. (4.15) para obter as componentes do tensor das tensões em função das componentes do tensor das deformações. Apresente o resultado em termos das constantes  $G = \tau/\gamma$  e  $\nu$ , em vez de  $E$  e  $\nu$ .
- c) Considere a viga encastada representada na Figura 4-2, sujeita a uma força  $P$ . Estabeleça as condições de fronteira de tensão nas cinco faces onde existem tensões aplicadas (que podem ser nulas).

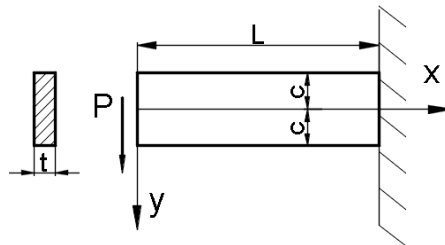


Figura 4-2 – Estado de Tensão numa viga.

- d) Determine as constantes  $A$  e  $B$  para a distribuição de tensões  $\sigma_{xx} = A \times y$ ,  $\tau_{xy} = B + \frac{3P}{4tc^3} y^2$  da alínea c), que verifica todas as equações e condições.

Resolução

A) Tendo  $e_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$  Onde  $\sigma_{kk} = \text{traço } \sigma = 18 \text{ MPa}$  obtém-se

$$e_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \begin{bmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} - 18\nu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$e_{ij} = \frac{1}{E} \left[ \begin{bmatrix} 12 + 12\nu & 0 & 4 + 4\nu \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 + 4\nu & 0 & 6 + 6\nu \end{bmatrix} - 18\nu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 12 - 6\nu & 0 & 4 + 4\nu \\ 0 & -18\nu & 0 \\ 4 + 4\nu & 0 & 6 - 12\nu \end{bmatrix} =$$

$$\frac{10^6}{200 \times 10^9} \begin{bmatrix} 10.2 & 0 & 5.2 \\ 0 & -5.4 & 0 \\ 5.2 & 0 & 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 \times 10^{-5} & 0 & 2.6 \times 10^{-5} \\ 0 & -2.7 \times 10^{-5} & 0 \\ 2.6 \times 10^{-5} & 0 & 1.2 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

B) De  $e_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$  fazendo o termo

$$e_{kk} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{kk} - 3\nu\sigma_{kk}] \Leftrightarrow Ee_{kk} = (1-2\nu)\sigma_{kk} \Leftrightarrow \sigma_{kk} = \frac{E}{1-2\nu} e_{kk}$$

Substituindo  $\sigma_{kk}$  em  $e_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]$  obtém-se

$$e_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij} \frac{E}{1-2\nu} e_{kk} \right] \Leftrightarrow e_{ij} = \left[ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} e_{kk} \right]$$

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} e_{kk} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( e_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} e_{kk} \right)$$

Fazendo  $G = \frac{\tau}{\gamma}$  temos  $\tau_{ij}^{(\text{para } i \neq j)} = \frac{E}{1+\nu} (e_{ij}) = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\gamma_{ij}}{2} \right) = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{ij} = G\gamma_{ij} \Rightarrow \frac{E}{(1+\nu)} = 2G$

E finalmente  $\sigma_{ij} = 2G \left( e_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} e_{kk} \right)$

c) nas quatro faces longitudinais o vetor tensão é nulo. Assim:

faces  $y = \pm c : \sigma_{yy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$   $z = \pm \frac{t}{2} : \sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$

Na face onde está aplicada a força P, temos  $n = (-1 \ 0 \ 0)$ , e da fórmula de Cauchy:

$$T_i = \sigma_{ji} n_j = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \text{ em que } \sigma_{xx} = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \int_{z=-\frac{t}{2}}^{z=+\frac{t}{2}} \int_{y=-c}^{y=+c} \tau_{xy} = P$$

d) As tensões são  $\sigma_{xx} = A x y$   $\tau_{xy} = B + \frac{3P}{4tc^3} y^2$

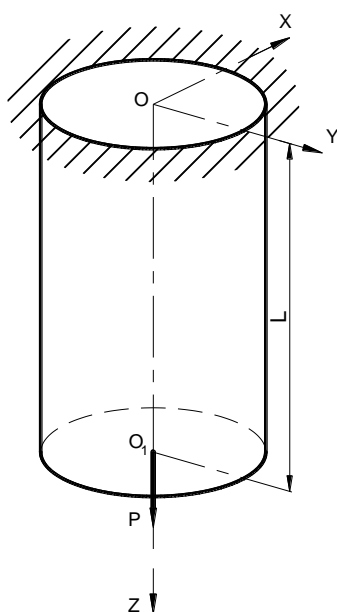
Da equação de equilíbrio  $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0$ , na ausência de forças volúmicas:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow Ay + \frac{3P}{2tc^3} y = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{3P}{2tc^3}$$

Da condição de fronteira  $\tau_{yx} = 0$  em  $y = \pm c$  vem  $B + \frac{3P}{4tc^3} c^2 = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{3P}{4tc}$



4.7.4 Exemplo 4.5 - Barra anisotrópica à tração



Exemplo adaptado de (Lekhnitskii 1981).

Considere a barra prismática (de área da secção transversal A) feita de um material homogéneo e anisotrópico, de acordo com a figura. A barra está fixa na face superior e sujeita à força P na extremidade livre.

O material obedece à Lei de Hooke generalizada sendo  $S_{ij}$  as constantes elásticas.

Admite-se válido o Princípio de Saint-Venant.

Admite-se que a força P e a reação na face superior são uniformemente distribuídas nas respetivas secções, assim:

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A} \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$$

A lei de Hooke generalizada é:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Como a única tensão não nula é  $\sigma_{zz} = P/A$ , obtemos

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{P}{A} \begin{Bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \\ S_{34} \\ S_{35} \\ S_{36} \end{Bmatrix}$$

E como

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Por integração pode-se obter, onde  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, u_0, v_0, w_0$  são constantes provenientes de deslocamentos de corpo rígido, que não contribuem para a deformação:

$$u = \frac{P}{A} (s_{13} x + s_{36} y + s_{35} z) + \omega_2 z - \omega_3 y + u_0$$

$$v = \frac{P}{A} (s_{23} y + s_{34} z) + \omega_3 x - \omega_1 z + v_0$$

$$w = \frac{P}{A} (s_{33} z) + \omega_1 y - \omega_2 x + w_0$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  estão relacionados com rotações em torno dos eixos coordenados e  $u_0, v_0, w_0$  com deslocamentos ao longo desses eixos.

Admitindo que para  $x=y=z=0$  se tem

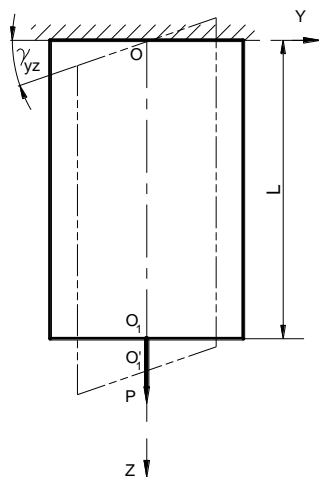
$$u = v = w = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ (sem rotação)}$$

obtemos

$$u = \frac{P}{A} \left( s_{13} x + \frac{1}{2} s_{36} y \right)$$

$$v = \frac{P}{A} \left( \frac{1}{2} s_{36} x + s_{23} y \right)$$

$$w = \frac{P}{A} (s_{35} x + s_{34} y + s_{33} z)$$



As expressões anteriores significam que, no caso de anisotropia, a barra não só aumenta o comprimento, reduz na secção transversal, mas também tem distorção em planos paralelos aos planos coordenados.

A distorção vem dos termos  $S_{34}, S_{35}$  e  $S_{36}$ .

As secções transversais permanecem planas, mas inclinam para linha de ação da força, de forma que um paralelepípedo retangular transforma-se num paralelepípedo oblíquo.

## 5 Torção

O problema da torção tem sido estudado há algumas centenas de anos (Timoshenko 1934). Por uma questão de simplicidade o estudo da torção começa pelas secções cheias, circulares e não circulares, depois as secções finas (fechadas e abertas), incluindo as multicelulares (Figura 5-1). Considera-se em todos os casos que o material é isotrópico.

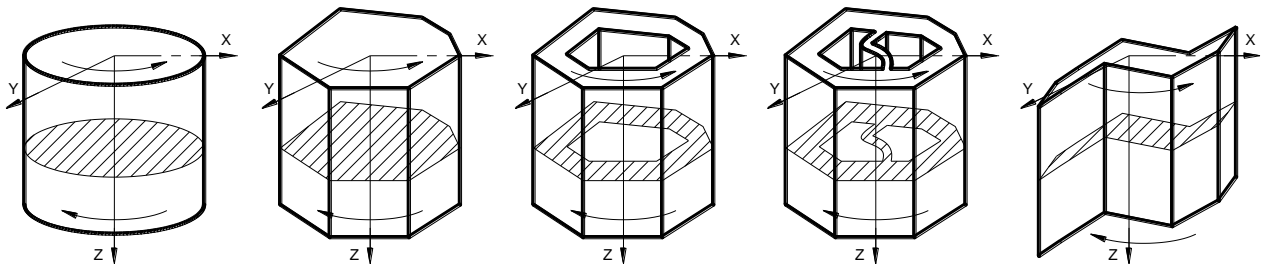


Figura 5-1 – Secções à torção.

### Nomenclatura:

$\theta$  - Ângulo de rotação/unidade de comprimento

$\psi_{(x,y)}$  - Função de empeno (*warping*)

$\phi$  - Função de tensão de Prandtl

$T, M_t$  - Momento torsor (*torque*)

$J$  - Constante de torção (*Torsional Constant*)

$GJ$  - Rigidez à torção (*Torsional stiffness*)

### 5.1 Secção Circular

O problema da determinação das tensões num caso da torção de um veio de secção circular resulta num problema estaticamente indeterminado. Considerando a secção transversal no ponto C (Figura 5-2), o diagrama de corpo livre mostra que em cada ponto dessa secção existe uma força elementar  $dF$  a qual é perpendicular ao raio ( $r$ ) em cada ponto (Figura 5-3), e que resulta de tensões de corte ( $\tau$ ) que atuam no plano da secção.

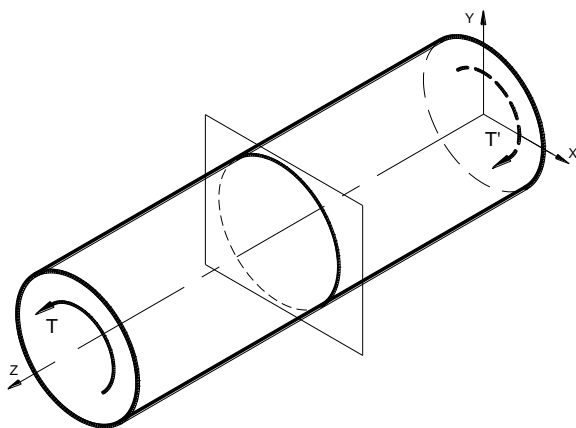


Figura 5-2 – Diagrama de corpo livre

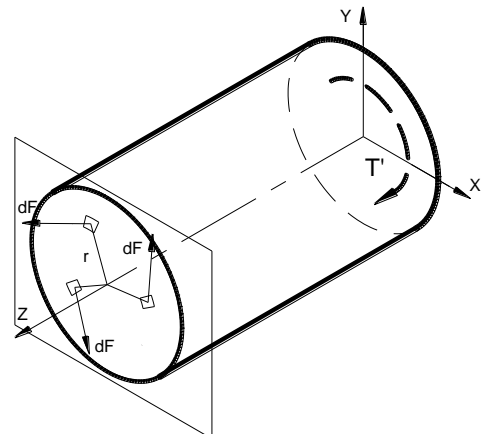


Figura 5-3 – Equilíbrio na secção

Assim, a equação de equilíbrio de momentos é:

$$T \equiv M_t = \int_{Area} r dF = \int_{Area} r(\tau dA) \quad (5.1)$$

Sendo o problema estaticamente indeterminado (como varia a tensão de corte na área?), é possível de determinar o campo de tensões tomando em consideração a deformação associada.

As hipóteses básicas da deformação são simples de compreender uma vez que a simetria e o carregamento são axissimétricos. Considera-se que durante a deformação (Oden and Ripperger 1981):

- Secções transversais perpendiculares ao eixo longitudinal permanecem planas;
- Essas secções não distorcem no seu próprio plano.

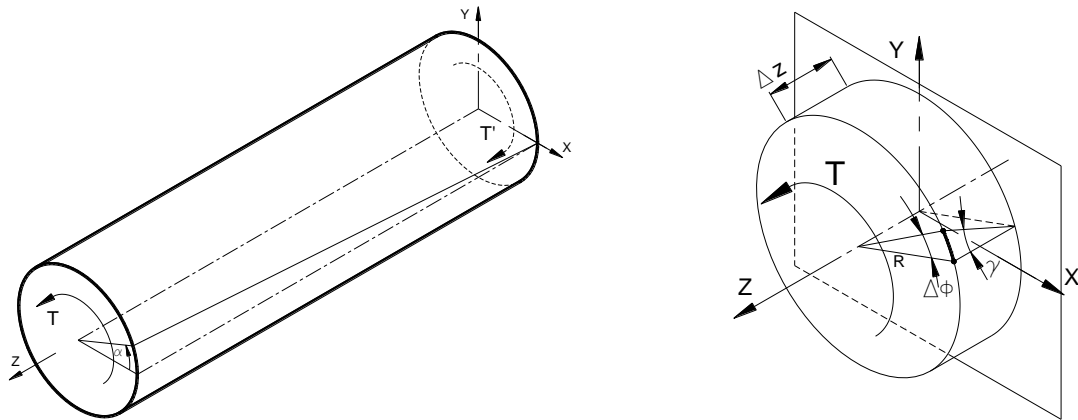


Figura 5-4 – Deformação da secção transversal num veio circular.

A rotação da secção transversal será dada por:

$$\gamma_{z\alpha} \Delta z = r \Delta\phi \Leftrightarrow \gamma_{z\alpha} = r \frac{\Delta\phi}{\Delta z} \quad (5.2)$$

Em que  $\gamma_{z\alpha}$  é a distorção no elemento  $\Delta x$  e  $\Delta\phi$  o incremento de rotação da secção. Designado  $\theta = \frac{\Delta\phi}{\Delta z}$  o ângulo de torção por unidade de comprimento, e aplicando a relação constitutiva tensão de corte-distorção ( $\tau_{z\alpha} = G\gamma_{z\alpha}$ ), tem-se:

$$\tau_{z\alpha} = G\gamma_{z\alpha} = Gr\theta \quad (5.3)$$

Substituindo na Eq. (5.1):

$$M_t = \int_{Area} r(\tau dA) = \int_{Area} r(Gr\theta dA) = G\theta \int_{Area} r^2 dA = GJ\theta \quad (5.4)$$

$$M_t = GJ\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{M_t}{GJ}$$

Note-se que no caso da secção circular J coincide com o momento polar de inércia:

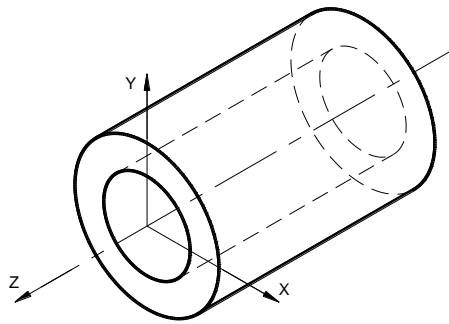
$$J = \int_{Area} r^2 dA = \frac{\pi R^4}{2} \quad (5.5)$$

Em que G é o Módulo de Elasticidade Transversal (*Shear Modulus*) e J é a Constante de Torção (*Torsion constant*). O termo GJ designa-se por Rigidez à Torção (*Torsional stiffness*). As equações (5.6) e (5.7) são essenciais na torção de veios circulares:

$$\tau_{z\alpha} = \frac{M_t r}{J} \quad (5.6)$$

$$\theta = \frac{M_t}{GJ} \quad (5.7)$$

### 5.1.1 Exemplo 5.1 - Secção Circular



Considere o veio oco de aço ( $G=80\text{GPa}$ ) com diâmetro exterior 40mm e espessura de parede 6mm, sujeito a um momento torsor de 600 N.m.

Calcule o ângulo de torção por unidade de comprimento.

Represente graficamente a tensão de corte na secção, e obtenha o valor máximo.

#### Resolução

a) Da expressão  $\theta = \frac{M_t}{GJ}$  precisamos apenas de calcular

$$J = \frac{\pi(R_{\text{ext}}^4 - R_{\text{int}}^4)}{2} = \frac{\pi(20^4 - 14^4)}{2} = 190983\text{mm}^4 = 191 \times 10^{-9}\text{m}^4$$

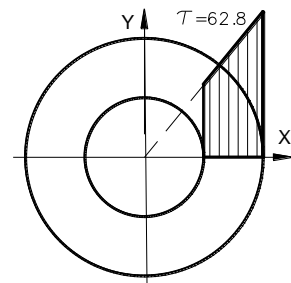
Para obter o resultado

$$\theta = \frac{M_t}{GJ} = \frac{600}{80 \times 10^9 \times 250.9 \times 10^{-9}} = 0.03927\text{rad} / \text{m} = 2.25^\circ / \text{m}$$

b) O valor máximo da tensão de corte é

$$\tau_{x\alpha_{\text{máx}}} = \frac{M_t r_{\text{ext}}}{J} = \frac{600 \times 20 \times 10^{-3}}{191 \times 10^{-9}} = 62.8 \times 10^6 \text{Pa} = 62.8\text{MPa}$$

Note-se que a distribuição de tensões de corte é linear na espessura da parede do tubo.



### 5.2 Secções não-circulares

Para secções não-circulares deixa de existir a simetria axial, e consequentemente algumas das considerações anteriores deixam de ser válidas, particularmente a secção transversal deixa de ser plana, aparecendo o efeito de empeno da secção (*warping*), como no exemplo da Figura 5-5.

Para secções não circulares consideram-se as seguintes aproximações,(Ugural and Fenster 1995) :

- Rotação da Secção transversal, como num movimento de corpo rígido, deslocamentos  $u$  e  $v$ ;
- Empeno da secção, idêntico para todas as secções ao longo do comprimento do veio, deslocamento  $w$ .

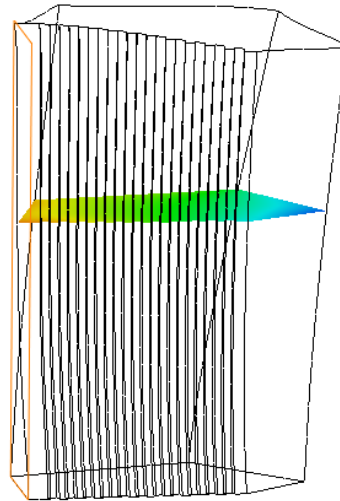


Figura 5-5 - Empeno de secções não circulares.

Assim, o campo de deslocamentos de um ponto P (Figura 5-7) numa secção transversal à cota “z”, é dado genericamente pela Eq. (5.8):

$$u = -\theta z y \quad v = \theta z x \quad w = \theta \psi_{(x,y)} \quad (5.8)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de torção por unidade de comprimento,  $\beta = \theta z$  é o ângulo de rotação da secção. O deslocamento  $w$  (*warping*) é independente de “z”.  $\psi_{(x,y)}$  é a função de empeno. Admitindo pequenas deformações, as componentes do tensor das pequenas deformações, dado por (5.9), resulta na Eq. (5.10). Note-se que:

- Não há extensões normais ( $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0$ );
- Não há distorção no plano da secção ( $e_{xy} = 0$ )

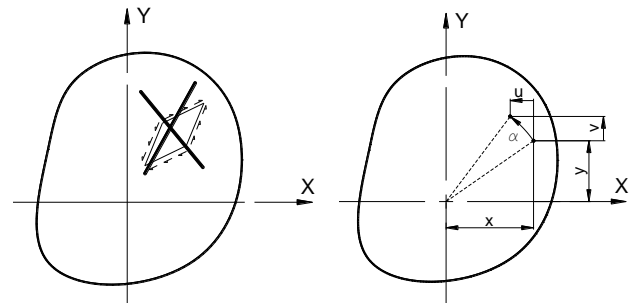


Figura 5-6 – Deformações na secção transversal

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
 e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = e_{xy} = 0 \\
 2e_{zx} = \gamma_{zx} = \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\
 2e_{zy} = \gamma_{zy} = \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)
 \end{aligned}
 \underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{xz} \\ 0 & 0 & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\theta}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ 0 & \frac{\theta}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) & \\ \text{sim.} & 0 & \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

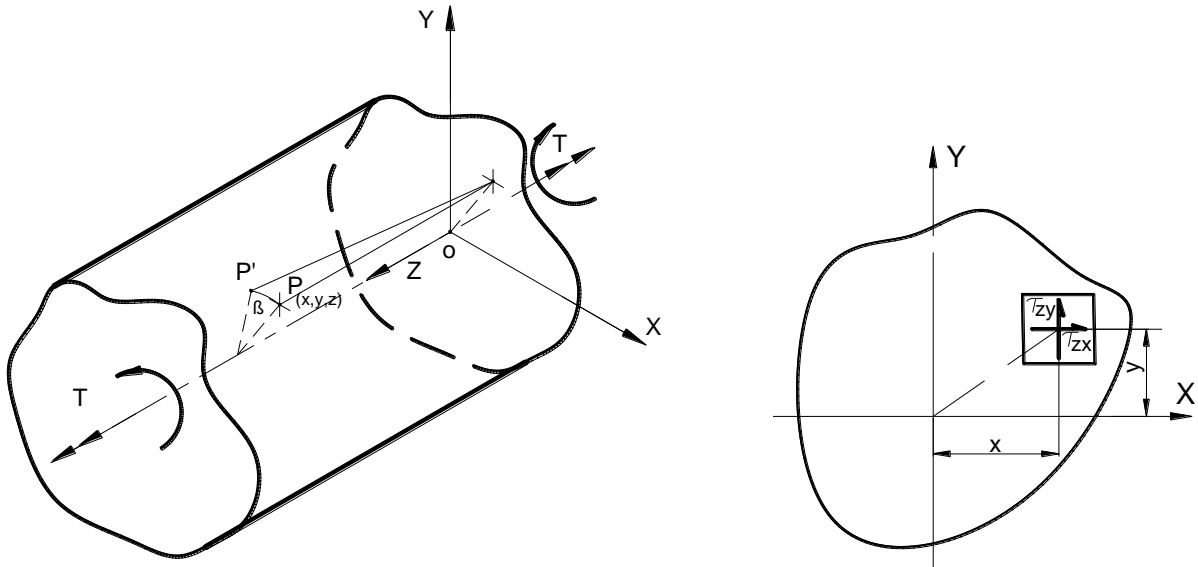


Figura 5-7 – Deslocamento e tensões de um ponto da secção transversal

Considerando materiais isotrópicos, aplicando a relação constitutiva, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ 0 & 0 & G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \\ \text{sim.} & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Substituindo nas equações de equilíbrio ( $\tau_{ji,j} + F_i = 0$ ) e considerando nulas as forças volúmicas ( $F_i = 0$ ), permite obter as Eqs (5.12).

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

As duas primeiras mostram que as tensões de corte são independentes de “z”. Pegando nas Eqs (5.11) e diferenciando  $\tau_{zx}$  em ordem a “x” e  $\tau_{zy}$  em ordem a “y” e colocando na terceira equação de (5.12), obtemos a Eq. (5.13) designada como Equação de Laplace.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.13)$$

Definindo a Função de Tensão de Prandtl ( $\phi$ , Eq. (5.14)) como:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5.14)$$

obtemos a Eq. (5.15):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad -\frac{\partial \phi}{\partial x} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad (5.15)$$

Diferenciando a primeira em ordem a “y” e a segunda em ordem a “x”, eliminando  $\psi$  obtemos a Eq. (5.16):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (5.16)$$

Uma equação do tipo da Eq. (5.16) designa-se por Equação de Poisson.

Desta forma o problema da torção passa a ser a determinação da Função de Tensão de Prandtl,  $\phi$ , com as necessárias condições de fronteira. A dedução das condições de fronteira pode ser consultada em (Boresi, Schmidt et al. 1993) ou (Timoshenko 1934), sendo aqui apresentadas no seu resultado final:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \tau_{xz}(m) - \tau_{yz}(-n) \equiv \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (5.17)$$

O que significa que  $\phi$  é constante ao longo da fronteira da secção. Os termos “m” e “n” são os cossenos diretores do vetor normal à curva em cada ponto.

No caso de domínios simplesmente conexos a constante pode ser qualquer (por exemplo nula), o que significa que o problema da torção consiste na determinação de  $\phi$  que satisfaz as Eqs. (5.18) e (5.19):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (5.18)$$

$$\phi = 0 \quad \text{na fronteira da secção} \quad (5.19)$$

Para que o equilíbrio se mantenha na secção têm de se verificar as Eqs. (5.20)-(5.22):

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow \int \tau_{zx} dx dy = 0 \Leftrightarrow \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = 0 \quad (5.20)$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow \int \tau_{zy} dx dy = 0 \Leftrightarrow -\int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = 0 \quad (5.21)$$

$$\sum M_z = T \Leftrightarrow \int (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dx dy = T \Leftrightarrow -\int \left( x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = T \quad (5.22)$$

Observando a Figura 5-8 (c) e considerando uma tira fina de espessura “dy”, como a tensão não varia com “y”, a Eq. (5.21) fica:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \int dy \int \frac{d\phi}{dx} dx = \int dy \int_{\phi(A)}^{\phi(B)} d\phi = dy [\phi(B) - \phi(A)] = 0 \quad (5.23)$$

uma vez que  $\phi$  é nula na fronteira. De modo análogo se procede com a Eq. (5.20). A Eq. (5.22) é integrada por partes em cada um dos termos, entre A e B para tiras em “dy”, e entre C e D para tiras em “dx”:



$$\begin{aligned}
 T &= -\int \left( x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = -\int \left( x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy - \int \left( y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = \\
 &= -dy \int \left( x \frac{d\phi}{dx} \right) dx - dx \int \left( y \frac{d\phi}{dy} \right) dy = -dy \int_{\phi(A)}^{\phi(B)} x d\phi - dx \int_{\phi(C)}^{\phi(D)} y d\phi = \\
 &= -dy \left( x [\phi(B) - \phi(A)] - \int_{x_A}^{x_B} \phi dx \right) - dx \left( y [\phi(D) - \phi(C)] - \int_{y_C}^{y_D} \phi dy \right) = \\
 &= dy \int_{x_A}^{x_B} \phi dx + dx \int_{y_C}^{y_D} \phi dy
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Somando (integrando) todas as tiras e notando que ambos os termos são idênticos, obtém-se a Eq. (5.25):

$$T = 2 \iint \phi dx dy \tag{5.25}$$

Recuperando a Eq. (5.4), podemos escrever a expressão que nos dá a Constante de Torção (J):

$$T = G J \theta \Leftrightarrow J = \frac{2}{G \theta} \iint \phi dx dy \tag{5.26}$$

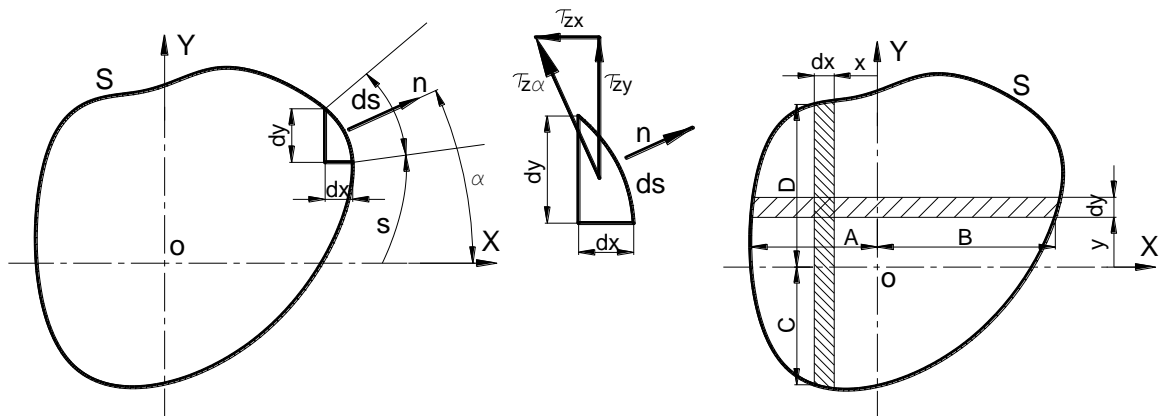


Figura 5-8 – Tensões de corte na secção.

Nas soluções dos problemas seguintes, irá determinar-se a função  $\phi$  que satisfaz as Eqs. (5.18) e (5.19). Começa-se por encontrar a equação que traduz a curva da fronteira na forma  $F(x, y) = 0$  (a qual satisfaz imediatamente a condição de ser nula na fronteira) e sugerir uma função  $\phi$  na forma  $\phi = C \times F(x, y)$  em que C é uma constante a determinar resolvendo a Eq. (5.18).

### 5.2.1 Exemplo 5.2 - Secção Elítica

Considere a secção elítica da Figura 5-9. Determine as expressões para:

- Função de Tensão de Prandtl
- Constante de Torção, J
- Tensões de corte na secção
- Deslocamentos u, v e w na secção transversal
- Apresente de forma gráfica o empeno da secção

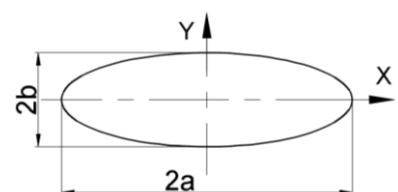


Figura 5-9 - Secção Elítica

Resolução:

- a) Começa-se por escrever a equação que define a fronteira de uma secção elítica:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

A Eq. (5.18) pode ser satisfeita considerando como função de Tensão de Prandtl a expressão:

$\phi = C \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$  em que C é uma constante. Substituindo na Eq. (5.18) e resolvendo em ordem a C,

$$C = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} G\theta$$

obtemos

e finalmente 
$$\phi = -\frac{a^2 b^2 G\theta}{(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

- b) Substituindo em (5.25) e fazendo as integrações, obtemos:

$$M_t = -\frac{a^2 b^2 G\theta}{(a^2 + b^2)} \int_{-a}^{+a} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dy dx = \frac{\pi a^3 b^3 G\theta}{(a^2 + b^2)}$$

onde  $J = \frac{2}{G\theta} \iint \phi dx dy = \frac{\pi a^3 b^3}{(a^2 + b^2)}$  invertendo:  $G\theta = \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} M_t$

E finalmente podemos também escrever a Função de Tensão de Prandtl em função do momento torsor aplicado.

$$\phi = \frac{M_t}{\pi ab} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

- c) As componentes da tensão são calculadas diretamente das expressões da definição:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2M_t y}{\pi ab^3} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b}$$

O ângulo de torção por unidade de comprimento é dado por:  $\theta = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G} M_t$

Caso  $b < a$ , a máxima tensão de corte ocorre nos pontos da fronteira mais próximos do centróide ( $x = 0, y = \pm b$ )

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2}$$

- d) Os deslocamentos podem ser obtidos por integração, apresentando-se aqui o resultado final:

$$u = -\theta z y = -\frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G} M_t z y \quad v = \theta z x = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 G} M_t z x$$

$$w = \theta \psi_{(x,y)} = \frac{b^2 - a^2}{\pi a^3 b^3 G} M_t x y$$

e) Graficamente, o empeno pode ser representado por isolinhas (hipérbolas  $x \cdot y = \text{constante}$ , Figura 5-10)

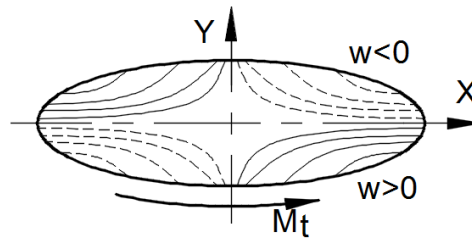


Figura 5-10 - Isolinhas do empeno

Na Figura 5-11 pode-se ver o resultado da simulação numérica (com elementos finitos usando SolidWorks Simulation), da torção de uma secção elítica. Pode-se também observar as isolinhas do deslocamento axial, empeno.

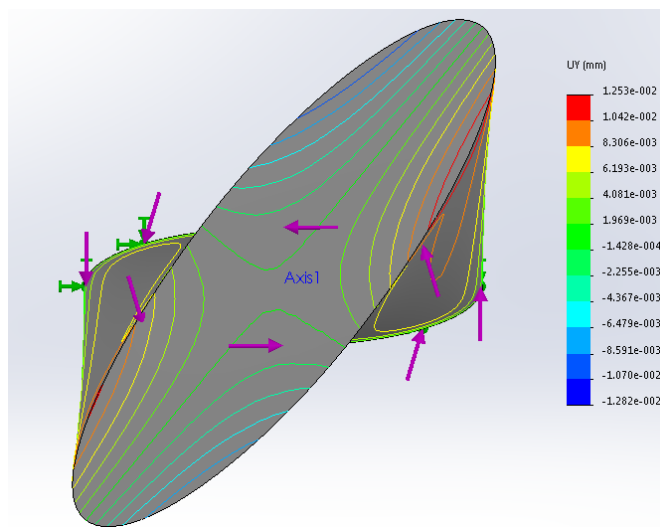


Figura 5-11- Secção Elítica: simulação numérica

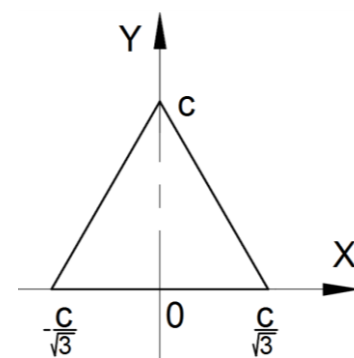
### 5.2.2 Exemplo 5.3 - Secção Triangular

Considere a secção triangular equilátera à torção.

- a) Obtenha a função de tensão deste problema
- b) Calcular as tensões de corte. Represente  $\tau_{xz}$  na linha  $x=0$ .

c) O empeno é dado por  $w = -\frac{1}{2} \frac{\theta}{c} (x^3 - 3xy^2 + 2cxy + c^2x)$ .

Represente as linhas de contorno desta função.



#### Resolução

a) Os lados do triângulo são dados pelas equações das linhas  $y = 0$ ;  $y = \pm\sqrt{3}x + c$ , pelo que a função de tensão pode ser dada por:

$$\phi = A y (y - c - \sqrt{3}x) (y - c + \sqrt{3}x) \quad \text{onde } A = \text{constante}$$

Substituindo a função  $\phi$  na equação  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta$  obtemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -6Ay + 2A(y - c + \sqrt{3}x) + 2A(y - c - \sqrt{3}x) + 2Ay = -4Ac \Leftrightarrow -4Ac = -2G\theta$$

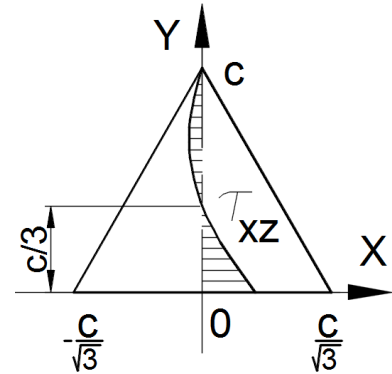
$$A = \frac{G\theta}{2c}$$

b) as tensões são dadas por:

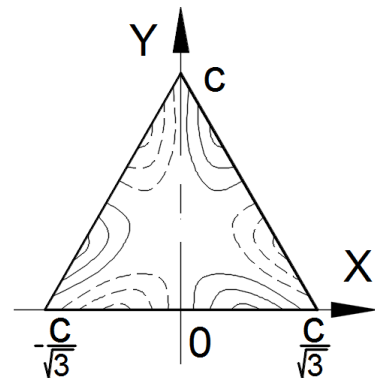
$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{G\theta}{c} (3y^2 - 3x^2 - 4cy + c^2)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{3G\theta}{c} xy$$

Note-se que as tensões são nulas nos vértices e no centróide  $(0, c/3)$ , e são máximas a meio de cada um dos lados, ou seja nos pontos da fronteira mais próximos do centróide.



c) Sendo o empeno  $w = -\frac{1}{2} \frac{\theta}{c} (x^3 - 3xy^2 + 2cxy + c^2x)$ , a representação é a da figura junta.



### 5.2.3 Exemplo 5.4 - Veio Circular com escatel

A função de tensão de Prandtl para a secção circular com escatel (keyway), Figura 5-12, é dada por:

$$\phi = -C \left( x^2 + y^2 - a^2 - 2Rx + \frac{2Ra^2x}{x^2 + y^2} \right)$$

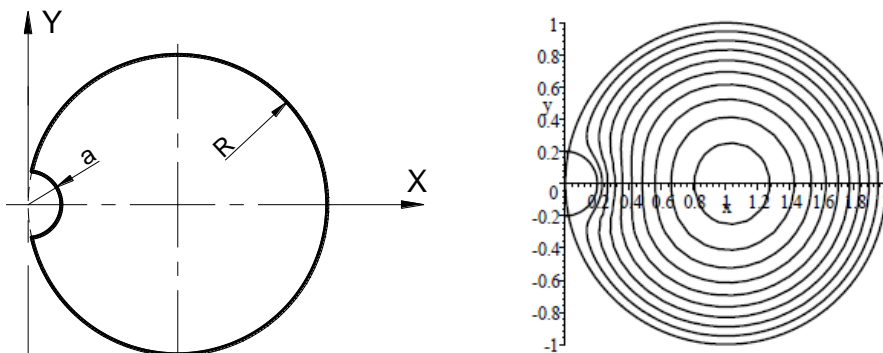


Figura 5-12 - Veio circular com escatel

- a) Mostre que é uma função de tensão e calcule a constante C
- b) Calcule as tensões de corte na secção
- c) A Figura 5-12 (b) representa isolinhas da função de tensão com  $a/R=0.2$ . Indique o ponto onde a tensão de corte é mais elevada. Justifique com a figura.
- d) Obtenha a máxima tensão de corte com  $a/R=0.2$ .
- e) Calcule o fator de concentração de tensões, comparando com uma secção circular de raio R.

Resolução

a) A função de tensão deve satisfazer:  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -C \left( 2x - 2R + 2Ra^2 \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = -C \left( 2x - 2R - 2Ra^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -C \left( 2 + \frac{4Ra^2 x}{(x^2 + y^2)^2} + 2Ra^2 \frac{(x^2 - y^2)2(x^2 + y^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^4} \right) = -C \left( 2 - \frac{4Ra^2 x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{8Ra^2 x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -C \left( 2y - 4Ra^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -C \left( 2 - 4Ra^2 \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} + 4Ra^2 \frac{2xy(x^2 + y^2)(2y)}{(x^2 + y^2)^4} \right) = -C \left( 2 - \frac{4Ra^2 x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{16Ra^2 xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \right)$$

fazendo

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \dots = -4C = -2G\theta \Leftrightarrow C = \frac{G\theta}{2}$$

Na fronteira teremos:  $\phi = \text{Constant}$

Na circunferência maior:  $(x - R)^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2Rx$

Substituindo em  $\phi = -C \left( x^2 + y^2 - a^2 - 2Rx + \frac{2Ra^2 x}{x^2 + y^2} \right)$  obtemos

$$-C \left( x^2 + y^2 - a^2 - 2Rx + \frac{2Ra^2 x}{x^2 + y^2} \right) = -C \left( 2Rx - a^2 - 2Rx + \frac{2Ra^2 x}{2Rx} \right) = 0$$

Na circunferência menor:  $x^2 + y^2 = a^2$

Substituindo em  $\phi = -C \left( x^2 + y^2 - a^2 - 2Rx + \frac{2Ra^2x}{x^2 + y^2} \right)$  obtemos

$$-C \left( x^2 + y^2 - a^2 - 2Rx + \frac{2Ra^2x}{x^2 + y^2} \right) = -C \left( a^2 - a^2 - 2Rx + \frac{2Ra^2x}{a^2} \right) = 0$$

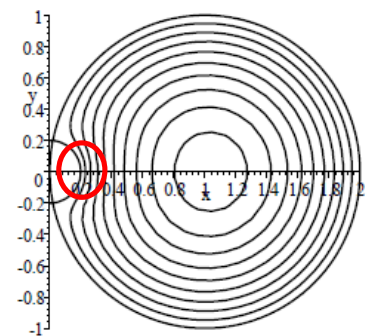
Concluindo-se portanto que a função dada cumpre os requisitos.

b) As tensões são dadas por:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = C \left( 2y - \frac{4Ra^2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) = -G\theta y \left( 1 - \frac{2Ra^2x}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = C \left( 2x - 2R - 2Ra^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = G\theta \left( x - R - Ra^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

c) A tensão de corte máxima ocorre no ponto (a,0). Tal deve-se ao facto de a tensão de corte ser tangente (é a derivada) às curvas de nível e na direção perpendicular a essas curvas, portanto a máxima tensão de corte ocorre onde as curvas estão mais próximas umas das outras.



(b) Função de tensão.

d) as tensões no ponto (a,0) são:

$$\tau_{xz(a,0)} = -G\theta y \left( 1 - \frac{2Ra^2x}{(x^2 + y^2)^2} \right)_{(a,0)} = 0$$

$$\tau_{yz(a,0)} = G\theta \left( x - R - Ra^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)_{(a,0)} = G\theta \left( a - R - Ra^2 \frac{a^2}{(a^2)^2} \right) = G\theta(a - 2R)$$

para  $a/R=0.2$ , obtemos

$$\tau_{yz(a,0)} = G\theta(a - 2R) = G\theta R \left( \frac{a}{R} - 2 \right) = G\theta R(0.2 - 2) = -1.8G\theta R$$

e) Para uma secção circular, a máxima tensão de corte (ver Eq. (5.6)) é dada pela expressão:

$$\tau_{\text{circular}_{\max}} = \frac{TR}{J} = \frac{JG\theta R}{J} = G\theta R$$

Assim o fator de concentração de tensões é (aqui o sinal negativo é irrelevante)

$$k = \frac{\tau_{y^2(a,0)}}{\tau_{\text{circular}_{\max}}} = \frac{1.8G\theta R}{G\theta R} = 1.8$$

### 5.2.4 Exemplo 5.5 - Problema Proposto

Verificar que  $\phi = C(x^2 + y^2 - a^2)$  satisfaz  $\theta = \frac{M_t}{GI_p}$  e  $\tau_{z_{\max}} = \frac{M_t a}{I_p}$  onde  $I_p$  é o momento polar de inércia da secção transversal, onde “a” é o raio do círculo.

#### Resolução

A equação tem de satisfazer  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 4C = -2G\theta \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{G\theta}{2}$$

assim 
$$\phi = -\frac{G\theta}{2}(x^2 + y^2 - a^2)$$

$$M_t = 2 \iint \phi \, dx \, dy = 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} -\frac{G\theta}{2}(x^2 + y^2 - a^2) \, dy \, dx = -G\theta \int_{-a}^{+a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2 - a^2) \, dy \, dx$$

$$M_t = \frac{1}{2} \pi a^4 G\theta \equiv JG\theta$$

onde  $J = \frac{1}{2} \pi a^4 \equiv I_p$  e assim  $\theta = \frac{M_t}{GI_p}$

e portanto 
$$\phi = -\frac{G\theta}{2}(x^2 + y^2 - a^2) = -\frac{M_t}{2I_p}(x^2 + y^2 - a^2)$$

As tensões são calculadas por  $\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{M_t}{I_p} y$  e o valor máximo é  $\tau_{z_{\max}} = \frac{M_t a}{I_p}$

### 5.3 Secção Retangular Fina

Embora os perfis retangulares sejam usados sobretudo em tração/compressão uniaxial e em flexão, é também frequente que tenham de suportar esforço de torção. Frequentemente estes perfis têm parede fina o que justifica o seu estudo. Os detalhes desta matéria podem ser vistos nas referências já mencionadas.

Considere-se a secção retangular  $2c \times 2b$ , em que  $c \ll b$  (Figura 5-13). Usando a analogia da membrana (ver (Boresi, Schmidt et al. 1993) ou (Ugural and Fenster 1995)), a Função de Tensão de Prandtl sugerida na forma da Eq. (5.27). Esta função é aproximada, respeitando a condição de fronteira em  $y = \pm c$  mas não respeita em  $x = \pm b$ .

$$\phi = G\theta h^2 \left[ 1 - \left( \frac{y}{c} \right)^2 \right] \tag{5.27}$$

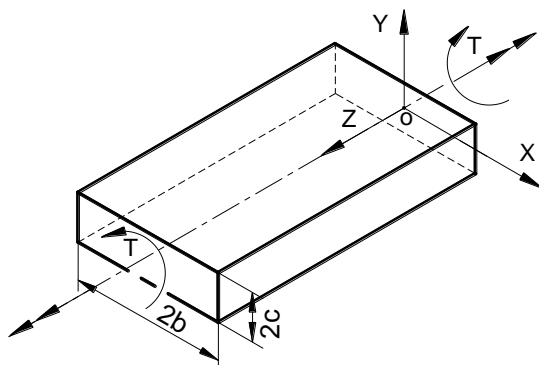


Figura 5-13 - Secção retangular fina à torção.

Pelo que as tensões são:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2G\theta y \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{5.28}$$

O momento torsor é:

$$T = 2 \iint \phi \, dx \, dy = 2 \int_{-b}^{+b} \int_{-c}^{+c} G\theta c^2 \left[ 1 - \left( \frac{y}{c} \right)^2 \right] dx \, dy = \frac{1}{3} G\theta (2b)(2c)^3 \tag{5.29}$$

Como  $T = JG\theta$ , obtém-se  $J = \frac{1}{3} (2b)(2c)^3$  (5.30)

Ou ainda:  $\theta = \frac{3T}{G(2b)(2c)^3}$  (5.31)

A tensão de corte máxima, obtida em  $y = \pm c$  :

$$\tau_{máx} = \frac{3T}{(2b)(2c)^2} = \frac{2Tc}{J} \tag{5.32}$$

### 5.4 Secção Retangular

O caso da secção retangular é aproximado a partir de um desenvolvimento em série. Também aqui os detalhes devem ser consultados em (Boresi, Schmidt et al. 1993) ou (Timoshenko 1934). De forma resumida, para uma secção retangular  $2b \times 2c$  (Figura 5-14), as expressões são semelhantes ao caso anterior.

$$\theta = \frac{T}{k_1 G(2b)(2c)^3} \tag{5.33}$$



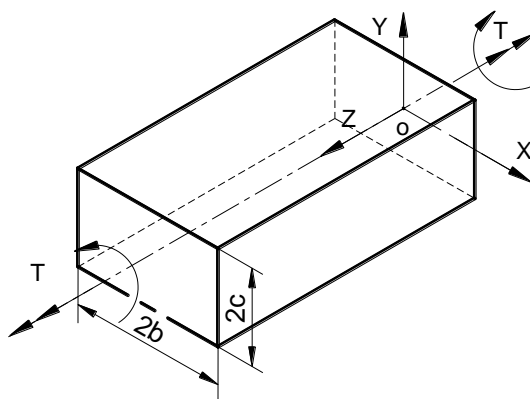


Figura 5-14 - Secção retangular à torção

A tensão de corte máxima, obtida em  $y=\pm c$  :

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T}{K_2(2b)(2c)^2} \tag{5.34}$$

A constante de torção:

$$J = K_1(2b)(2c)^3 \tag{5.35}$$

Os valores dos parâmetros  $K_1$  e  $K_2$  são retirados da Tabela 5.1((Boresi, Schmidt et al. 1993)).

Tabela 5.1 - Parâmetros de torção para secções retangulares

b/c	1	1.5	2	2.5	3	4	6	10	$\infty$
$K_1$	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.312	0.333
$K_2$	0.208	0.231	0.246	0.256	0.267	0.282	0.299	0.312	0.333

### 5.4.1 Exemplo 5.6 - Secção Retangular

Considere a Figura 5-15. A viga é feita de um Aço ( $G=77.5$  GPa) e está sujeita a dois momentos torsores,  $T_1=750$  N.m e  $T_2=400$ N.m. Considere que o suporte impede a rotação da secção transversal mas não evita o empeno. Determine a máxima tensão de corte e o ângulo de torção na extremidade livre.

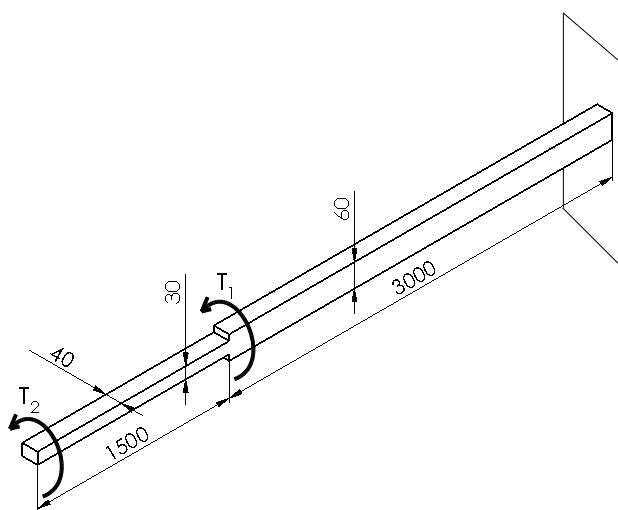


Figura 5-15- Viga retangular à torção

**Resolução**

Para a secção 60 x 40, temos  $\frac{b}{c} = \frac{30}{20} = 1.5$ . Da Tabela 5.1 retiramos  $k_1=0.196$  e  $k_2=0.231$ . Esta secção (Figura 5-16) está sujeita ao momento total  $T = T_1 + T_2 = 1150 N.m$ . A tensão de corte máxima será:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T}{K_2(2b)(2c)^2} = \frac{1150}{0.231(60)(40)^2 \times 10^{-9}} = 51.9 MPa$$

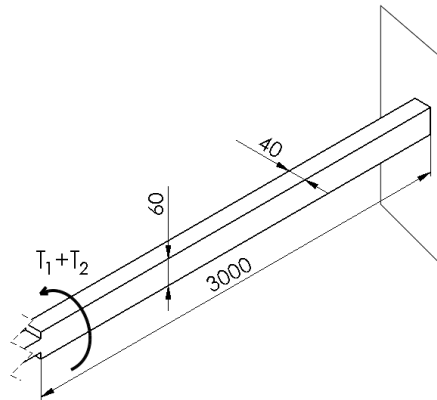


Figura 5-16 - Troço 60 x 40 mm

Para a secção 40 x 30 (Figura 5-17), temos  $\frac{b}{c} = \frac{20}{15} = 1.33$ . Da Tabela 5.1 retiramos, por interpolação linear,  $k_1=0.178$  e  $k_2=0.223$ . Esta secção está sujeita ao momento total  $T_2 = 400 N.m$ . A tensão de corte máxima será:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T_2}{K_2(2b)(2c)^2} = \frac{400}{0.223(40)(30)^2 \times 10^{-9}} = 49.8 MPa$$

O ângulo de torção total será a soma do ângulo de torção de cada um dos troços:

$$\alpha = \sum_i \frac{T_i L_i}{G_i J_i} = \frac{1150 \times 3}{0.196(77.5 \times 10^9)(60)(40)^3 \times 10^{-12}} + \frac{400 \times 1.5}{0.178(77.5 \times 10^9)(40)(30)^3 \times 10^{-12}} = 0.0994 rad$$

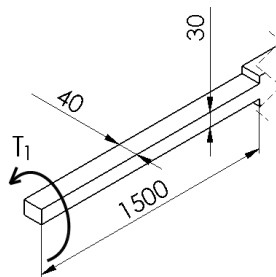


Figura 5-17 - Troço 40 x 30mm.

**5.5 Secção Fina Composta de Vários Segmentos**

No caso de a secção transversal ser composta de vários segmentos (Figura 5-18), a constante de torção pode ser obtida pela expressão:

$$J = C \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (2b_i)(2c_i)^3 \quad (5.36)$$

Onde C é um coeficiente de correlação. Se  $b_i > 10c_i$  para todos os segmentos da secção considera-se  $C \approx 1$ , caso contrário recomenda-se  $C=0.91$ . A tensão de corte máxima é dada a partir da Eq. (5.32) por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Tt_{m\acute{a}x}}{J} \quad (5.37)$$

Em que  $t_{m\acute{a}x}$  é a espessura máxima na secção.

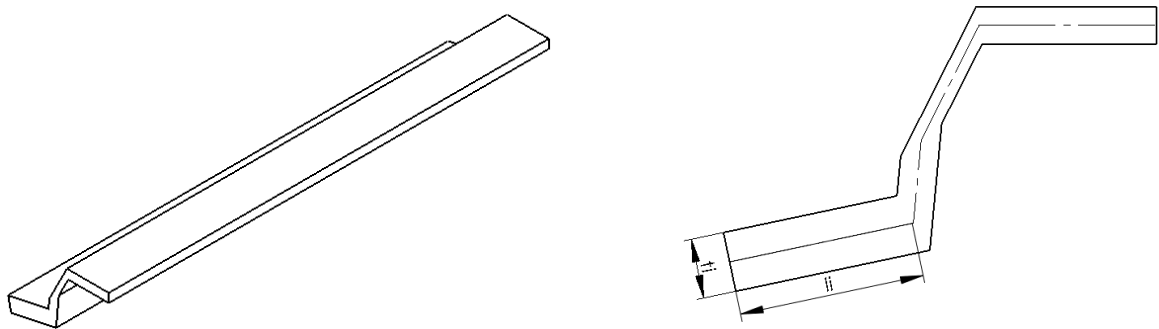


Figura 5-18 - Secção fina composta

### 5.5.1 Exemplo 5.7 - Secção em "C"

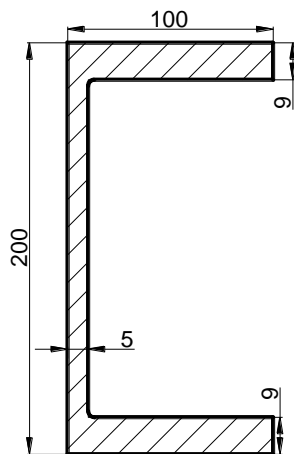


Figura 5-19 - Secção em "C"

Calcular a tensão de corte máxima e o ângulo de torção da viga junta (Figura 5-19), feita de um Aço com  $G=77.5\text{GPa}$ . O momento torsor aplicado é de  $600\text{N.m}$ .

#### Resolução

Para este problema temos: 
$$J = C \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n l_i t_i^3 = \frac{1}{3} [2 \times (100 - 2.5)(9)^3 + (200 - 9)(5)^3] = 55300\text{mm}^4$$

onde C é o coeficiente de correlação. Neste caso  $C \approx 1$  pois  $l_i > 10t_i$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T t_{\text{max}}}{J} = \frac{600 \times 9}{55300} = 97.6\text{MPa} \quad \theta = \frac{T}{GJ} = \frac{600}{(77.5 \times 10^9) \times (55300 \times 10^{-12})} = 0.14\text{rad / m}$$

### 5.5.2 Exemplo 5.8 - Secção em "Z"

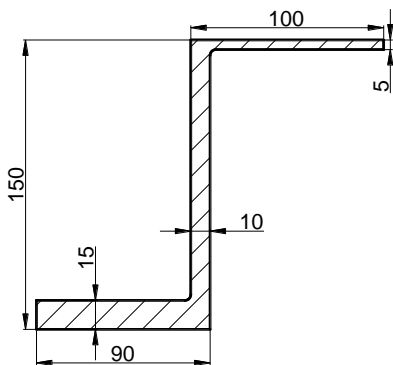


Figura 5-20 - secção em "z"

A secção da Figura 5-20 é extrudada numa liga de Alumínio. Qual o binário máximo que é possível aplicar sabendo que  $\tau_{\max} = 75\text{MPa}$ .

#### Resolução

Usando as expressões anteriores, temos:

$$J = C \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n l_i t_i^3 = 0.91 \frac{1}{3} \left[ (100 - 5)(5)^3 + (150 - 7.5 - 2.5)(10)^3 + (90 - 5)(15)^3 \right] = 133100 \text{mm}^4$$

Note-se que para o segmento inferior se tem  $\frac{l}{t} = \frac{90 - 5}{15} = 5.7 < 10$  e portanto  $C=0.91$

$$T = \frac{J \tau_{\max}}{t_{\max}} = \frac{133100 \times 10^{-12} \times 75 \times 10^9}{15 \times 10^{-3}} = 665.4 \text{N.m}$$

### 5.6 Torção de perfis finos fechados

As secções finas fechadas constituem aquilo que vulgarmente se designa por um tubo.

De uma forma simplificada, a torção de perfis finos fechados pode ser estudada a partir do equilíbrio de forças provenientes das tensões de corte existentes na parede do tubo. Considere-se o tubo ao qual é aplicado um momento torsor T, Figura 5-21.

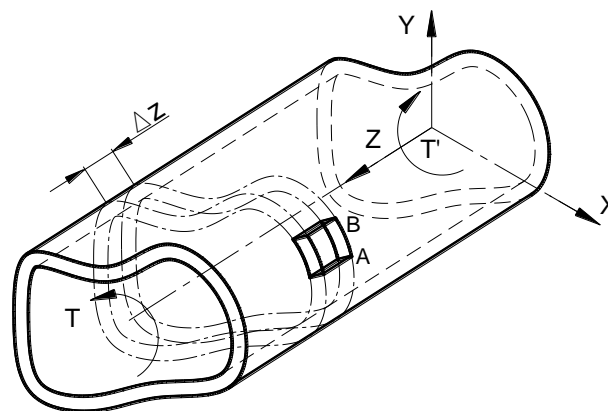


Figura 5-21 - Perfil fechado oco à torção.

Isolando um pedaço da parede desse tubo (Figura 5-22) a uma distância  $\Delta z$ , a soma das forças na direção longitudinal terá de ser nula, Eq. (5.38).

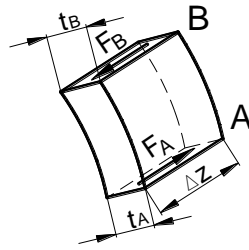


Figura 5-22 - Equilíbrio de forças numa parede elementar.

$$\sum F_z = 0 \Leftrightarrow F_A - F_B = 0 \Leftrightarrow \tau_A t_A \Delta z = \tau_B t_B \Delta z \Leftrightarrow \tau_A t_A = \tau_B t_B \quad (5.38)$$

Definindo a grandeza fluxo de corte (*shear flow*) como  $q = \tau t$  a Eq. (5.38) traduz que na parede do tubo se tem o fluxo de corte constante, Figura 5-23.

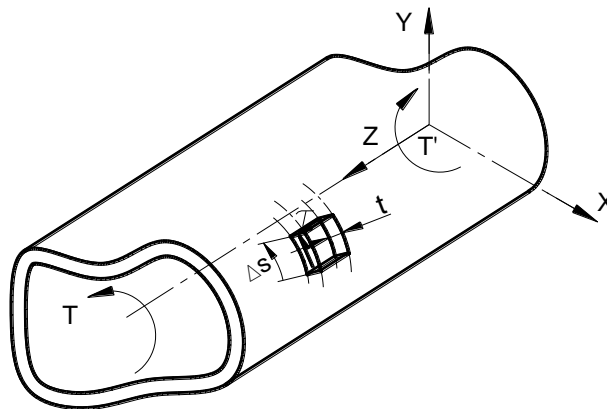


Figura 5-23 - Fluxo de corte.

Como não existem forças a atuar nas superfícies superior e inferior do elemento (parede interna e externa do tubo), significa que a tensão de corte é paralela à superfície da parede.

O momento  $dM_0$  criado em torno do ponto O é:

$$dM_0 = p dF = p \tau dA = p(\tau t) ds = p q ds \quad (5.39)$$

Como a área  $p ds = 2 d\Omega$ , o momento torsor pode ser expresso como (Figura 5-24)

$$T = \oint dM_0 = \oint q(2d\Omega) = 2q\Omega \quad (5.40)$$

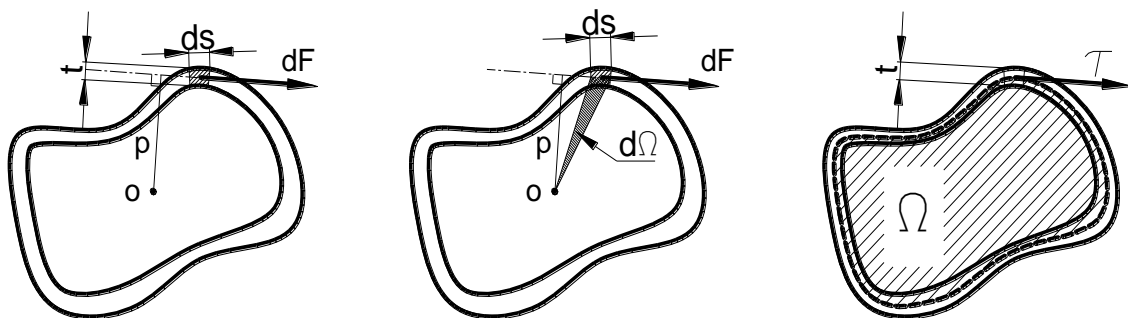


Figura 5-24 - Momento torsor em perfis finos fechados.

A expressão para o ângulo de torção /unidade de comprimento pode ser obtida por métodos energéticos, fora do âmbito deste texto, o seu resultado são as expressões (5.41) e (5.42).

$$\theta = \frac{T}{JG} = \frac{T}{G} \left( \frac{1}{4\Omega^2} \oint_s \frac{ds}{t} \right) \quad (5.41)$$

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint_s \frac{ds}{t}} \quad (5.42)$$

Nestas secções é frequente haverem diversos troços em que a espessura é constante, nesse caso o integral da Eq. (5.42) é calculado como um somatório:

$$\oint_s \frac{ds}{t} = \frac{S_1}{t_1} + \frac{S_2}{t_2} + \dots \quad (5.43)$$

### 5.6.1 Exemplo 5.9 – Problema torção perfil fechado fino

A secção simétrica fechada da Figura 5-25 está sujeita a um binário de 20 N.m. Supondo que o material tem  $G=80\text{GPa}$ , calcular a tensão de corte máxima e o ângulo de torção por unidade de comprimento.

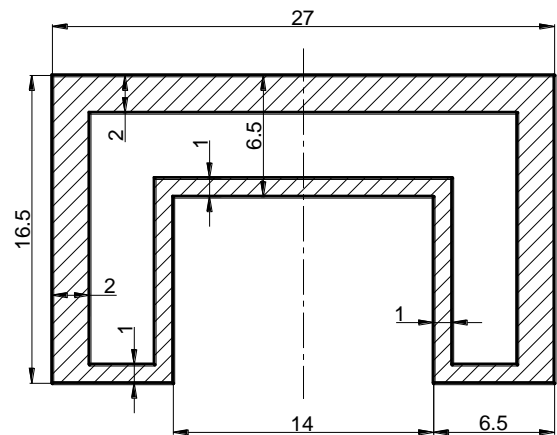


Figura 5-25 – Figura do Exemplo 5.9

#### Resolução

Sabendo que  $T = \oint dM_0 = \oint q(2d\Omega) = 2q\Omega = 2\tau t\Omega$  obtemos  $\tau = \frac{T}{2t\Omega}$

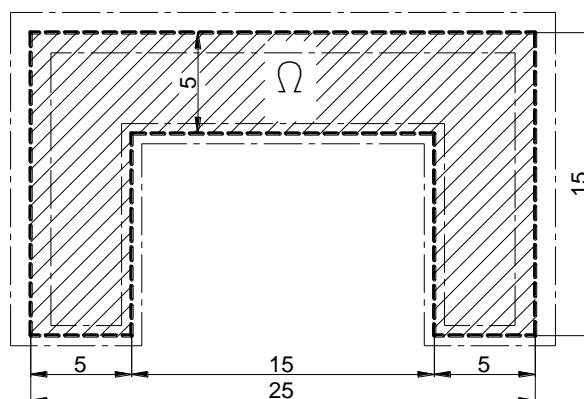


Figura 5-26 – Cálculo da área fechada.

Em primeiro lugar calcula-se a área delimitada pela linha média (a pontado na Figura 5-26) de cada troço da secção ( $\Omega$ ):

$$\Omega = 5 \times 15 + 5 \times 15 + 5 \times 15 = 225 \text{ mm}^2$$

A máxima tensão de corte ocorre onde a espessura é mínima ( $t_{\min}=1\text{mm}$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2t\Omega} = \frac{20}{2 \times 1 \times 10^{-3} \times 225 \times 10^{-6}} = 44.4 \text{ MPa}$$

A secção é constituída por 3 segmentos com  $t=2\text{mm}$ , e por 5 segmentos com  $t=1\text{mm}$ . Para calcular o ângulo de torção por unidade de comprimento usa-se a expressão:

$$\theta = \frac{T}{JG} = \frac{T}{G} \left( \frac{1}{4\Omega^2} \oint_s \frac{ds}{t} \right) \quad \text{onde} \quad J = \frac{4\Omega^2}{\oint_s \frac{ds}{t}}$$

Neste caso o integral pode ser calculado como

$$\oint_s \frac{ds}{t} = \frac{S_1}{t_1} + \frac{S_2}{t_2} + \dots = \frac{15 + 25 + 15}{2} + \frac{5 + 10 + 15 + 10 + 5}{1} = 72.5$$

Obtendo-se a constante de torção  $J = \frac{4\Omega^2}{\oint_s \frac{ds}{t}} = \frac{4 \times 225^2}{72.5} = 2973 \text{ mm}^4$

E finalmente  $\theta = \frac{T}{JG} = \frac{20}{2973 \times 10^{-12} \times 80 \times 10^9} = 0.084 \text{ rad / m}$

### 5.7 Torção de Perfis Finos Multicelulares

Certos perfis usados em Engenharia são fechados e compostos por várias células, sendo por isso designados perfis finos multicelulares (Figura 5-27). Ao contrário dos perfis finos unicelulares, em que o problema era isostático sendo possível determinar o fluxo de corte ao longo da parede do perfil, no caso das secções multicelulares tal não acontece. É assim necessário encontrar o conjunto de equações de compatibilidade de deformação que permita resolver o problema.

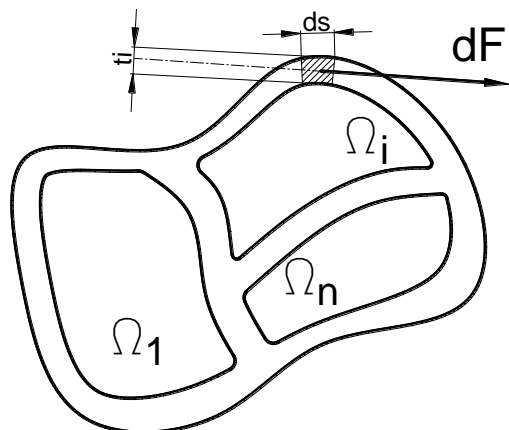


Figura 5-27 - Perfil fino multicelular.

Começa-se por reescrever a Eq. (5.40):

$$T = 2 \sum_{i=1}^n q_i \Omega_i \tag{5.44}$$

E a Eq. (5.41) para a célula i:

$$\theta_i = \frac{q_i}{2G\Omega_i} \oint_{S_i} \frac{ds_i}{t_i} \tag{5.45}$$

Fazendo notar que na parede comum entre duas células (Figura 5-28) o fluxo de corte tem sentidos opostos, então o ângulo de torção/unidade comprimento será dados pela Eq. (5.46).

$$\theta_i = \frac{1}{2G\Omega_i} \left( q_i \oint_{S_i} \frac{ds_i}{t_i} - q_1 \oint_{S_{i1}} \frac{ds_{i1}}{t_{i1}} - q_n \oint_{S_{in}} \frac{ds_{in}}{t_{in}} \right) \tag{5.46}$$

Em que  $S_{i1}$  e  $S_{in}$  são as paredes comuns entre a célula i e as células 1 e n. Note-se que o exemplo da Figura 5-28 pode ser generalizado obtendo-se a Eq. (5.47), em que k é o número de paredes comuns com a célula i. Além disso, uma das hipóteses colocadas desde início é de que não há distorção no próprio plano da secção transversal, o que implica que o ângulo de torção/unidade comprimento de cada célula seja idêntico.

$$\theta_1 = \dots = \theta_i = \dots = \theta_n \equiv \theta$$

$$\theta \equiv \theta_i = \frac{1}{2G\Omega_i} \left( q_i \oint_{S_i} \frac{ds_i}{t_i} - \sum_{j=1}^k q_j \oint_{S_{ij}} \frac{ds_{ij}}{t_{ij}} \right) \tag{5.47}$$

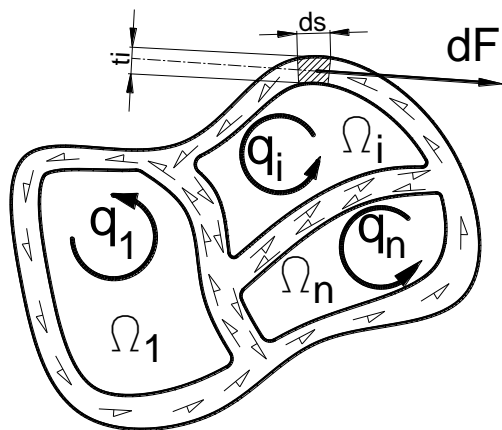


Figura 5-28 – Fluxo de corte em perfis multicelulares.

### 5.7.1 Exemplo 5.10 - Secção com 2 células

Um tubo longo (3m) numa liga de Alumínio ( $G=27.1\text{GPa}$ ), é sujeito a um momento torsor  $T=11\text{KN.m}$ . As dimensões da secção transversal encontram-se na Figura 5-29.

Determinar a máxima tensão de corte e o ângulo de torção.

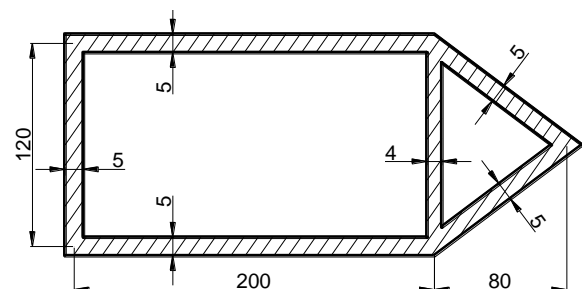


Figura 5-29 – Secção do Exemplo 5.10



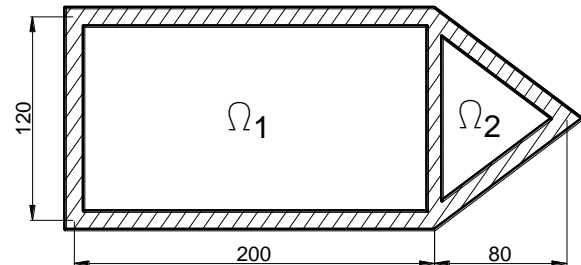
**Resolução**

O momento torsor ( $T$ ) relaciona-se com o fluxo de corte ( $q_i$ ) e com a área interna de cada célula ( $\Omega_i$ ) pela expressão (a).

$$T = 2 \sum_{i=1}^n q_i \Omega_i \quad (a)$$

Enquanto o ângulo de torção/unidade de comprimento em cada célula é dado por:

$$\theta_i = \frac{1}{2G\Omega_i} \oint_{s_i} \frac{q ds}{t} \quad (b)$$



A eq. (a) tem duas incógnitas ( $q_1$  e  $q_2$ ), pelo que teremos de encontrar mais uma equação. Como todas as células terão de torcer o mesmo ângulo/unidade de comprimento, surge a equação de compatibilidade de torção entre elas:

$$\frac{1}{2G\Omega_1} \oint_{s_1} \frac{q ds}{t} = \frac{1}{2G\Omega_2} \oint_{s_2} \frac{q ds}{t} = \dots \quad (c)$$

Que nos permite ter as equações necessárias à obtenção da solução do problema, os fluxos de corte  $q_i$ . Finalmente o ângulo de torção/unidade de comprimento é então

$$\theta = \frac{1}{2G\Omega_i} \left[ q_i \oint_{s_i} \frac{ds}{t} - \sum_{j=1}^m \left( q_j \int_{s_{ij}} \frac{ds}{t} \right) \right] \quad (d)$$

Neste problema em concreto, temos:

$$\Omega_1 = 200 \times 10^{-3} \times 120 \times 10^{-3} = 24000 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} 120 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^{-3} = 4800 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Da Eq. (a)  $T = 2 \times (\Omega_1 q_1 + \Omega_2 q_2) \Leftrightarrow 48000 \times 10^{-6} q_1 + 9600 \times 10^{-6} q_2 = 11000 \quad (e)$

Da Eq. (c) obtemos a expressão (g). Note-se que na parede comum às duas células o fluxo de corte é a diferença entre  $q_1$  e  $q_2$ , o qual será positivo ou negativo dependendo do sentido da circulação.

$$\theta = \frac{1}{2G \times 24 \times 10^{-3}} \left[ \frac{(200 + 120 + 200) q_1}{5} + \frac{120(q_1 - q_2)}{4} \right] = \frac{1}{2G \times 4800 \times 10^{-6}} \left[ \frac{(2 \times \sqrt{80^2 + 60^2}) q_2}{5} + \frac{120(q_2 - q_1)}{4} \right] \quad (g)$$

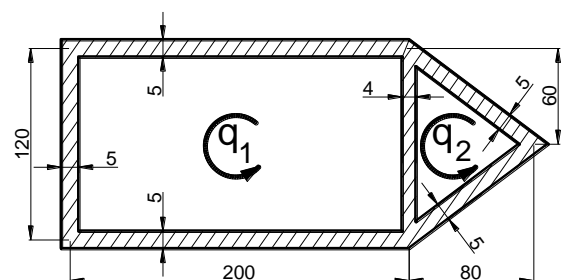


Figura 5-30 - Fluxos de corte do Exemplo 5.10

Simplificando os termos obtemos a equação  $q_1 = 1.338q_2$  (h)

Resolvendo o sistema de equações (e) e (g), 
$$\begin{cases} 48000 \times 10^{-6} q_1 + 9600 \times 10^{-6} q_2 = 11000 \\ q_1 = 1.338q_2 \end{cases}$$

Obtemos  $q_1 = 199.4 \text{ N/mm}$   $q_2 = 149 \text{ N/mm}$

E de seguida a tensão de corte máxima: 
$$\tau_{\max} = \left( \frac{q}{t} \right)_{\max} = \frac{q_1}{5} = 39.9 \text{ MPa}$$

O ângulo de rotação é

$$\alpha = \theta L = \frac{L}{2G\Omega_i} \left[ q_i \oint_{s_i} \frac{ds}{t} - \sum_{j=1}^m \left( q_j \int_{s_{jr}} \frac{ds}{t} \right) \right] =$$

$$\frac{3}{2 \times 27.1 \times 10^9 \times 24000 \times 10^{-6}} \left[ \frac{520 \times 199.4}{5} + \frac{120(199.4 - 149)}{4} \right] = 0.0513 \text{ rad}$$

Onde L é o comprimento do tubo (3m) e  $\theta$  um dos termos da expressão (g), já que o ângulo de torção de cada uma das células é idêntico.

### 5.7.2 Exemplo 5.11 - Secção com 3 células

A secção fechada de parede fina tem espessura uniforme (Figura 5-31). Mostrar que nas paredes BC, CD e CF as tensões de corte devidas à torção são nulas.

#### Resolução

Como a espessura é constante, as áreas fechadas são:

$$\Omega_3 = 2\Omega_1 = 2\Omega_2$$

As duas equações de compatibilidade que se aplicam são:

$$\theta = \frac{1}{2G \times \Omega_1 t} \left[ q_1 \left( \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \right) + (q_1 - q_2) \frac{b}{2} + (q_1 - q_3) \frac{h}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2G \times \Omega_2 t} \left[ q_2 \left( \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \right) + (q_2 - q_1) \frac{b}{2} + (q_2 - q_3) \frac{h}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2G \times \Omega_3 t} \left[ q_3 \left( \frac{b}{2} + h + \frac{b}{2} \right) + (q_3 - q_1) \frac{h}{2} + (q_3 - q_2) \frac{h}{2} \right]$$

Que resultam em:

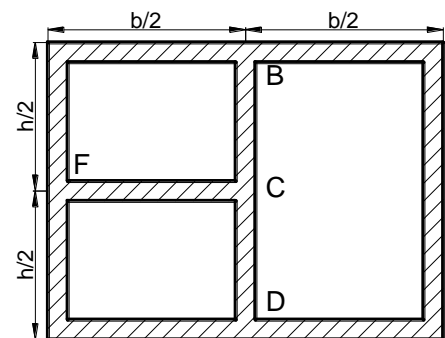
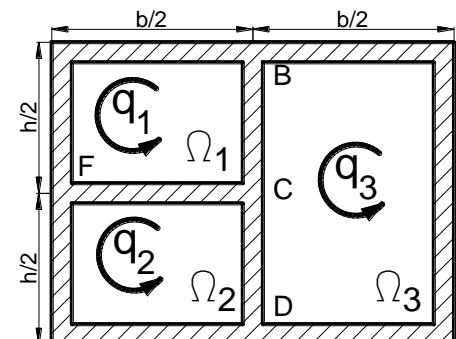


Figura 5-31 – Secção de 3 células.



$$q_1 \left( \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \right) + (q_1 - q_2) \frac{b}{2} + (q_1 - q_3) \frac{h}{2} = q_2 \left( \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \right) + (q_2 - q_1) \frac{b}{2} + (q_2 - q_3) \frac{h}{2} \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = q_2$$

$$q_1 \left( \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \right) + (q_1 - q_2) \frac{b}{2} + (q_1 - q_3) \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \left[ q_3 \left( \frac{b}{2} + h + \frac{b}{2} \right) + (q_3 - q_1) \frac{h}{2} + (q_3 - q_2) \frac{h}{2} \right] \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = q_3$$

Como  $q_1 = q_2 = q_3$ , significa que o fluxo de corte nas paredes comuns circula em oposição e consequentemente as tensões de corte são nulas.

## 5.8 Problemas sugeridos

### 5.8.1 Problema 1

Deduzas as expressões (5.8) para pequenos ângulos de rotação.

### 5.8.2 Problema 2

Considere um veio de parede fina de secção em “U” equilátera sujeito a um momento torsor T, conforme se mostra na figura a). A espessura da parede é  $t = a / 10$ :

- Determine a tensão de corte máxima e a rigidez torsional do veio.
- As abas verticais foram dobradas um pouco mais de forma a que a secção resulte num triângulo equilátero aberto, figura b). Determine a tensão de corte máxima e a rigidez torsional do veio neste caso.
- Realizou-se de seguida uma soldadura para que a secção resulte num triângulo equilátero fechado de parede fina, figura c). Determine a tensão de corte máxima e a rigidez torsional do veio neste caso.
- Para aumentar a rigidez torsional da alínea anterior, soldou-se uma placa de espessura t e altura a no interior do perfil anterior ligando um vértice ao meio do lado oposto, figura d). Qual a variação de rigidez torsional conseguida?

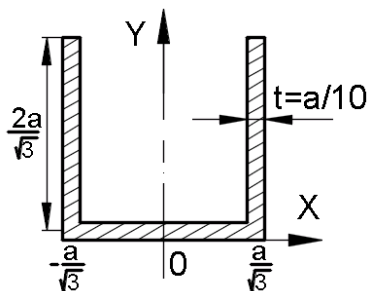


Figura a)

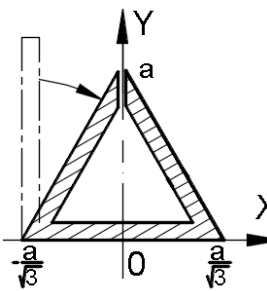


Figura b)

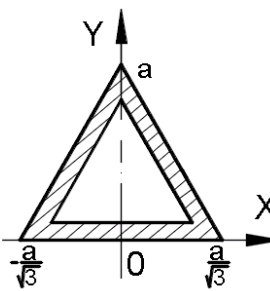


Figura c)

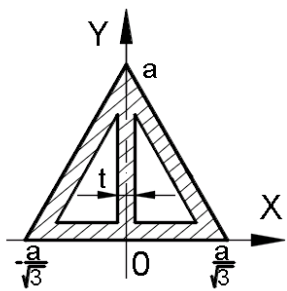


Figura d)

### 5.8.3 Problema 3

Mostre que a Função de Tensão de Prandtl ( $\phi$ , Eq. (5.14)) satisfaz as Equações de equilíbrio

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

### 5.8.4 Problema 4

Considere a torção de uma barra circular de raio R. Mostre que a função  $\phi = \frac{I}{2} (R^2 - x_1^2 - x_2^2)$

é uma função tensão de Prandtl. Calcule a rigidez torsional da barra, e mostre que  $J=I_p$ . Calcule o estado de tensão associado e mostre que a tensão de corte resultante nos topos da barra é radial.

### 5.8.5 Problema 5

Considere dois veios com a mesma área da secção transversal e feitos do mesmo material linear elástico, um de secção circular e outro de secção elítica com relação 2:1 nos semieixos. Determine o cociente entre as tensões de corte máximas nos dois veios para:

- a) Igual momento de torção aplicado nos dois veios
- b) Igual ângulo de torção nos dois veios

### 5.8.6 Problema 6

Considere a célula base cuja secção transversal se mostra na Figura 5-32, obtida a partir de 3 chapas coladas entre si nas superfícies de contacto. Todas as chapas têm 1mm de espessura. A chapa do meio é quinada a 60° em intervalos de 70mm. O processo industrial de produção de placas estruturais consiste na repetição desta célula num padrão como se mostra na Figura 5-33.

O material das chapas é Aço ( $G=70\text{GPa}$ ). O momento torsor aplicado é  $T=10\text{ kN.m}$ . Determine:

- A constante de torção desta célula. Justifique as aproximações que fizer.
- A tensão de corte máxima e indique onde ocorre. Justifique.
- O ângulo de torção/unidade de comprimento.
- Sabendo que a tensão de corte máxima deste Aço é  $\tau_{\text{máx}} = 90\text{MPa}$ , calcule o número mínimo de células para suportar o momento aplicado.

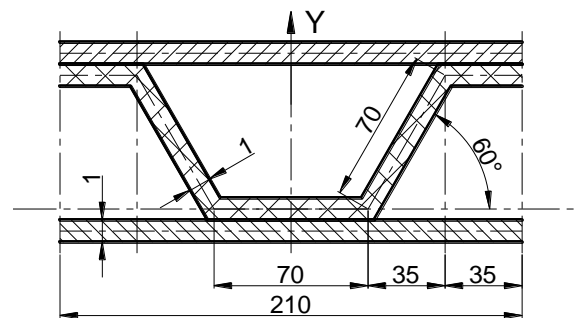


Figura 5-32 – Secção feita de chapas coladas entre si.

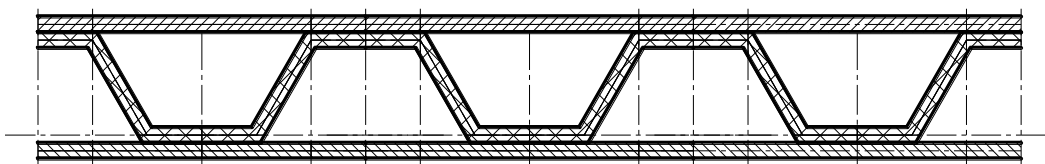


Figura 5-33 - Placa estrutural.

### 5.8.7 Problema 7

Considere as secções transversais da Figura 5-34, com as mesmas dimensões e feitas do mesmo material linear elástico. Considere que  $a \ll t$ .

Dados:  $G=45\text{GPa}$      $R=50\text{mm}$      $t=2\text{mm}$

Calcule:

- O momento torsor máximo que se pode aplicar a cada um dos veios para que a tensão de corte máxima não ultrapasse  $100\text{MPa}$ .
- O ângulo de torção/unidade de comprimento em cada caso da alínea anterior.

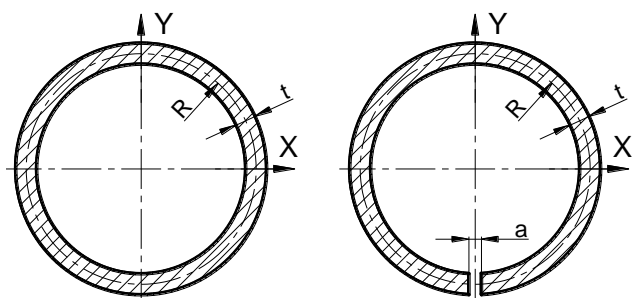


Figura 5-34 - Secções em anel.

## 6 Cilindros espessos

Considere um cilindro cuja secção tem as dimensões indicadas na Figura 6-1: raio interno  $r_i$ , raio externo  $r_e$  e altura  $h \ll r_i$ . O material do cilindro é homogéneo e isotrópico e segue a lei de Hooke. A pressão interna que atua em  $r_i$  é designada por  $p_i$  e em  $r_e$  atua a pressão externa  $p_e$ . Pretende-se determinar os deslocamentos, tensões e deformações causados por estas pressões (Timoshenko 1934).

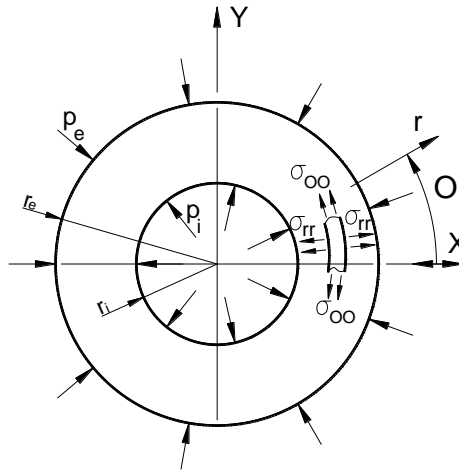


Figura 6-1 – Cilindro com pressão interne e externa.

Para resolver este problema é conveniente utilizar coordenadas cilíndricas. Como o cilindro é fino e não tem solicitações nas bases podemos admitir um estado de tensão plana com  $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{z\theta} = 0$  e todos os outros campos independentes de  $z$ .

A geometria do cilindro, o seu carregamento (as pressões) e o material de que é feito têm simetria axial. Então a solução também tem simetria axial, sendo independente de  $\theta$ .

Analisando as equações de equilíbrio em coordenadas polares verifica-se  $\sigma_{r\theta} = 0$  no cilindro pois nas solicitações na fronteira do cilindro não há tensões de corte aplicadas.

Em conclusão, as únicas componentes do tensor das tensões não nulas são  $\sigma_{rr}$  e  $\sigma_{\theta\theta}$  e dependem apenas da coordenada  $r$ ; as únicas componentes do vetor deslocamento não nulas são  $u_r$  e  $u_z$  e dependem igualmente apenas da coordenada  $r$ , ou seja  $u_r(r)$  (ver-se-á depois que  $u_z$  é constante).

O conjunto de equações (em coordenadas cilíndricas) a resolver é o seguinte:

Equações de equilíbrio

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (6.1)$$

Lei de Hooke (tensão plana)  $\sigma_{rr} = E (e_{rr} - \nu e_{\theta\theta}) / (1 - \nu^2)$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = E (e_{\theta\theta} - \nu e_{rr}) / (1 - \nu^2)$

Relações deformação-deslocamento

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (6.2)$$

Substituindo a última equação na penúltima e depois na primeira obtemos a equação diferencial

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0 \quad (6.3)$$

cuja solução é  $u_r = A_1 r + A_2 / r$   $A_1$  e  $A_2$  são constantes a determinar a partir das condições de fronteira.

Nas superfícies cilíndricas atuam, como se viu pressões  $p_i$  e  $p_e$ . As condições nas fronteiras  $r_i$  e  $r_e$  são, respetivamente,  $\sigma_{rr} = -p_i$  e  $\sigma_{rr} = -p_e$ .

Escrevendo  $\sigma_{rr}$  em função de  $u_r$  obtém-se um sistema de equações para  $A_1$  e  $A_2$  cuja solução é

$$A_1 = (1 + \nu)(1 - 2\nu) C_1 / E, \quad C_1 = (p_i r_i^2 - p_e r_e^2) / (r_e^2 - r_i^2)$$

$$A_2 = (1 + \nu) C_2 / E, \quad C_2 = (p_i - p_e) r_i^2 r_e^2 / (r_e^2 - r_i^2)$$

As tensões são dadas por

$$\sigma_{rr} = C_1 - C_2 / r^2 \quad (6.4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_1 + C_2 / r^2 \quad (6.5)$$

notar que  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$  é constante no cilindro o que implica  $u_z$  constante.

Vários problemas se podem resolver com os resultados anteriores

- Cilindro maciço. Neste caso  $r_i = 0$  o que implica  $A_2 = C_2 = 0$
- Cilindro só com pressão interna
- Cilindro só com pressão externa
- Cilindros montados com aperto
- Cilindro com condições de fronteira de deslocamento por estar fixo na sua fronteira interna ou externa.

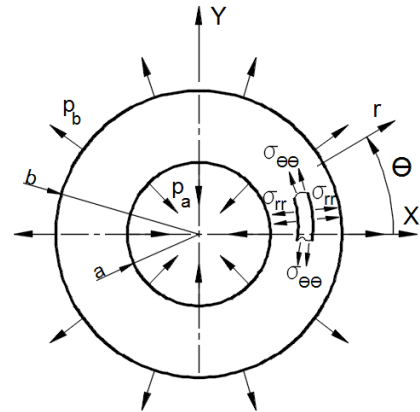
#### **NOTA IMPORTANTE**

Nos exercícios seguintes ter em atenção que a denominação das grandezas está de acordo com as respetivas figuras, não seguindo as expressões acima.

## 6.1 Problemas Resolvidos

### 6.1.1 Exemplo 6.1 - Cilindro longo sob pressão interna e externa

Um cilindro longo está sujeito a pressão interna  $p_a$  e externa  $p_b$ , com as dimensões da figura junta. Obter as equações da solução deste problema em elasticidade.



#### Resolução

Neste problema aplicam-se as seguintes hipóteses:

- A distância entre duas secções transversais permanece constante  $u_z=0$ , deformação plana
- Da simetria do problema, o deslocamento é apenas radial e só depende de  $r$ ,  $u = u_r(r)$   $u_\theta = 0$
- As equações deformação-deslocamento em coordenadas polares (cilíndricas) são:

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{du_r}{dr} & e_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & e_{zz} &= \frac{\partial u_{zz}}{\partial z} \\
 \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_{zz}}{\partial r} + \frac{du_r}{dz} & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_{zz}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}
 \end{aligned}$$

que se simplificam neste caso para

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad \gamma_{rz} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = e_{zz} = 0$$

- A Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos é

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)e_{rr} + \nu e_{\theta\theta} + \nu e_{zz} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)e_{\theta\theta} + \nu e_{rr} + \nu e_{zz} \right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)e_{zz} + \nu e_{\theta\theta} + \nu e_{rr} \right]$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \quad \gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G} \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\tau_{z\theta}}{G} \quad \text{onde } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Pelo que a equação de equilíbrio simplificada em coordenadas polares fica:  $\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$



E após substituição das relações deformação-deslocamento nas relações constitutivas (Lei de Hooke) resulta em

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0$$

Cuja solução tem a forma geral  $u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}$

As condições de fronteira não aparecem em termos dos deslocamentos ( $u_r$ ), mas em termos das pressões interna e externa, as quais podem ser relacionadas com  $\sigma_{rr}$ :  $\sigma_{rr}(r=a) = p_a$   $\sigma_{rr}(r=b) = p_b$

A solução da equação diferencial anterior é

$$u_r = \frac{(p_b b^2 - p_a a^2) r}{2(b^2 - a^2)(\lambda + G)} + \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{2(b^2 - a^2) G r}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(p_b b^2 - p_a a^2)}{(b^2 - a^2)} - \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_b b^2 - p_a a^2)}{(b^2 - a^2)} + \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}$$

$$\sigma_{zz} = \left( \frac{\lambda}{\lambda + G} \right) \frac{(p_b b^2 - p_a a^2)}{(b^2 - a^2)} \quad \text{esta tensão existe porque } e_{zz} = 0$$

### 6.1.2 Exemplo 6.2 - Montagem de cilindros com aperto

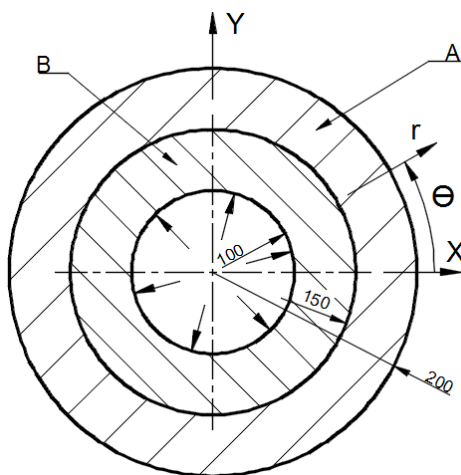


Figura 6-2 – Cilindros com aperto.

Um reservatório de pressão constituído por dois cilindros montados com aperto e feitos do mesmo material (com  $E=207\text{GPa}$ ) está sujeito a uma pressão interna  $p_i=207\text{MPa}$ , Figura 6-2. A interferência de contacto é de  $0.1\text{mm}$ .

Obter a tensão tangencial e a tensão radial nas três superfícies, e comparar com um cilindro único com parede de espessura igual à soma dos dois anteriores. Desprezar o efeito axial. Representar graficamente o resultado.

#### Resolução

Este problema pode ser resolvido usando as expressões do Exemplo 6.1. Note que para cada cilindro A e B, são conhecidos todos os valores exceto a pressão de contacto na interface comum (aqui designada como  $p_{contact}$ ).

$$\sigma_{r_B}(r_i = 100 \text{ mm}) = -p_i = -207 \text{ MPa}$$

As condições de fronteira são:

$$\sigma_{r_A}(r_e = 200 \text{ mm}) = 0$$

$$\sigma_{r_A}(r_0 = 150 \text{ mm}) = \sigma_{r_B}(r_0 = 150 \text{ mm}) \equiv p_{\text{contact}}$$

Na superfície da interface, os deslocamentos relativos entre os dois cilindros são

$$u_A - u_B = 0.1 \text{ mm} \quad (r_0 = 150 \text{ mm}) \quad (\text{Eq.1})$$

Uma maneira fácil de verificar esta equação é considerar o cilindro A indeformável (rígido), e a seguir fazer o mesmo com o cilindro B. Facilmente se chega à Eq. 1.

A partir das equações do Exemplo 6.1, obtemos as equações para os dois cilindros:

$$u_B = \frac{(-p_{\text{contact}} r_0^2 + p_i r_i^2) r}{2(r_0^2 - r_i^2)(\lambda + G)} + \frac{(-p_{\text{contact}} + p_i) r_0^2 r_i^2}{2(r_0^2 - r_i^2) G r} \quad (r \leq r_0)$$

$$u_A = \frac{(p_{\text{contact}} r_0^2) r}{2(r_e^2 - r_0^2)(\lambda + G)} + \frac{(+p_{\text{contact}}) r_0^2 r_e^2}{2(r_e^2 - r_0^2) G r} \quad (r \geq r_0) \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Substituindo na Eq.1, obtemos a pressão de contacto na interface,  $p_{\text{contact}} = -76.4 \text{ MPa}$

Sabendo a pressão de contacto, aplicamos as expressões anteriores para obter os resultados das tabelas seguintes.

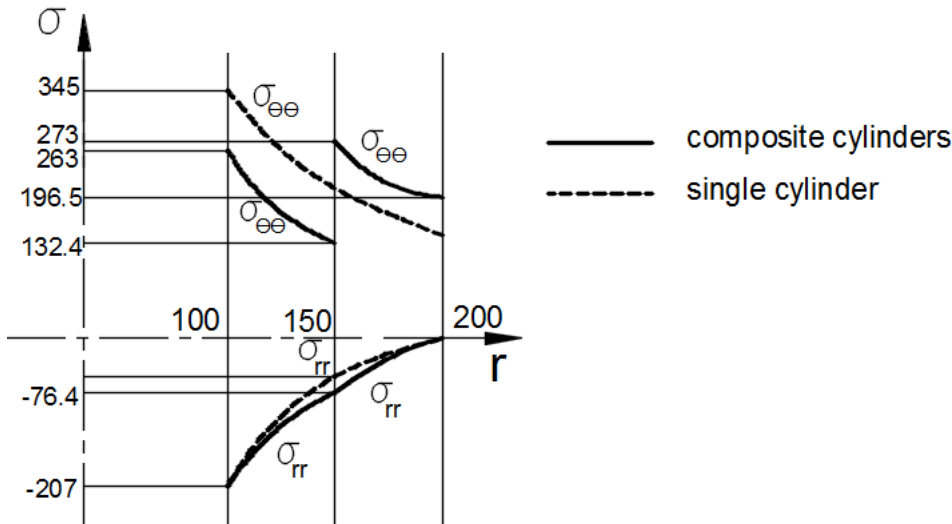
Resultados para os dois cilindros (montagem com aperto):

R=100	$\sigma_{r_B} = -207$	$\sigma_{\theta_B} = 263$		
R=150	$\sigma_{r_B} = -76.4$	$\sigma_{\theta_B} = 132.4$	$\sigma_{r_A} = -76.5$	$\sigma_{\theta_A} = 273$
R=200	$\sigma_{r_A} = 0$	$\sigma_{\theta_A} = 196.5$		

Caso de cilindro único de espessura de parede igual à soma das espessuras dos cilindros A e B

R=100	$\sigma_r = -207$	$\sigma_\theta = 345$
R=150	$\sigma_r = -53.7$	$\sigma_\theta = 191.7$
R=200	$\sigma_r = 0$	$\sigma_\theta = 138$

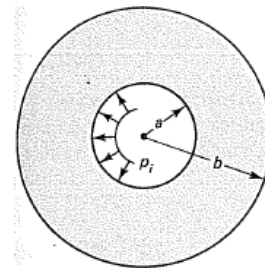
Observando graficamente os resultados, podemos ver que a tensão radial  $\sigma_{rr}$  é próxima nos dois casos, mas a tensão tangencial  $\sigma_{\theta\theta}$  é significativamente superior no cilindro único. Assim, pode-se concluir que esta montagem com aperto “alivia” as tensões máximas na estrutura, permitindo assim suportar maiores pressões internas antes de entrar em cedência.



**6.1.3 Exemplo 6.3 – Cilindro espesso com pressão interna e plasticidade.**

Considerar o cilindro espesso apenas com pressão interna.

- a) Obter a distribuição de tensões no regime totalmente plástico.
- b) A pressão última.



Resolução

a) Para o caso em que apenas existe pressão interna ( $p_i < 0$ , nas equações do Exemplo 6.1), as equações simplificam-se para:

$$u_r = \frac{(-p_i a^2) r}{2(b^2 - a^2)(\lambda + G)} + \frac{(-p_i) a^2 b^2}{2(b^2 - a^2) G r}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(-p_i a^2)}{(b^2 - a^2)} - \frac{(-p_i) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} = \frac{(-p_i a^2)}{(b^2 - a^2)} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (\text{negativa} \rightarrow \text{compressão})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(-p_i a^2)}{(b^2 - a^2)} + \frac{(-p_i) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} = \frac{(-p_i a^2)}{(b^2 - a^2)} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (\text{positiva} \rightarrow \text{tração})$$

Para um material dúctil, a cedência ocorre por limite na tensão de corte:  $\tau_{max} \equiv \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{2} = \frac{\sigma_{yield}}{2}$

em que  $\sigma_{yield}$  é a tensão de cedência obtida num ensaio de tração uniaxial.

Assim, da equação de equilíbrio (ver Eq.(6.1)):  $\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \frac{\sigma_{yield}}{r} = 0$

Cuja solução é  $\sigma_{rr} = \sigma_{yield} \ln r + C$

como  $\sigma_{rr}(r=b) = 0$  (não há pressão exterior),  $C = -\sigma_{yield} \ln b$ , vem  $\sigma_{rr} = \sigma_{yield} (\ln r - \ln b) = \sigma_{yield} \ln \frac{r}{b}$

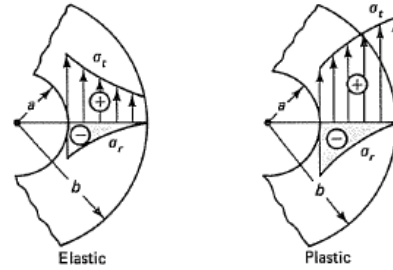
de  $\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} = \frac{\sigma_{yield}}{2}$ , obtemos  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \sigma_{yield}$

resumindo:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{yield} (\ln r - \ln b) = \sigma_{yield} \ln \frac{r}{b}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \sigma_{yield} = \sigma_{yield} \left( \ln \frac{r}{b} + 1 \right)$$

Graficamente:



b) A pressão máxima ( $p_{ultimate}$ ) que o cilindro espesso pode suportar, representando plasticidade em toda a

espessura de parede, é dada por  $p_{ultimate} = \sigma_{rr}(r=a) = \sigma_{yield} \ln \frac{a}{b}$

## 7 Placa com Furo em Elasticidade Plana

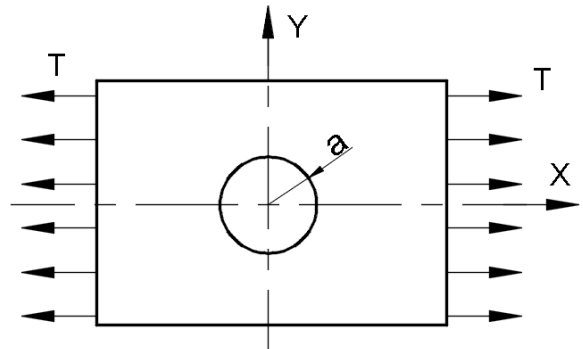
### 7.1.1 Exemplo 7.1 - Placa com furo circular

O problema pode ser tratado em coordenadas cilíndricas

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left[ 1 + \left( 1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{T}{2} \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{T}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left( 1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta$$



- Verificar as condições de fronteira
- Obter o ponto onde ocorre a máxima tensão  $\sigma_{\theta\theta}$
- Obter o ponto onde ocorre a máxima tensão de corte e indicar o ponto onde ocorre
- Calcular o fator de concentração de tensões no furo

#### Resolução

- As condições de fronteira no furo são:  $\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$  em  $r=a$
- A máxima tensão normal  $\sigma_{\theta\theta}$  ocorre quando  $\cos 2\theta = -1$ , pois todos os termos dentro do parêntesis reto são positivos, ou seja quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , e para  $r=a$ , o seu valor será:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{T}{2} [1 + 1 + (1 + 3)] = 3T$$

- Como a tensão normal  $\sigma_{\theta\theta} = 3T$  e  $\sigma_{rr} = 0$ , a máxima tensão de corte (a partir do círculo de Mohr)

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{2} = \frac{3}{2}T, \text{ que ocorre quando } \theta = \frac{\pi}{2}, r=a, \text{ a } 45^\circ \text{ com XY.}$$

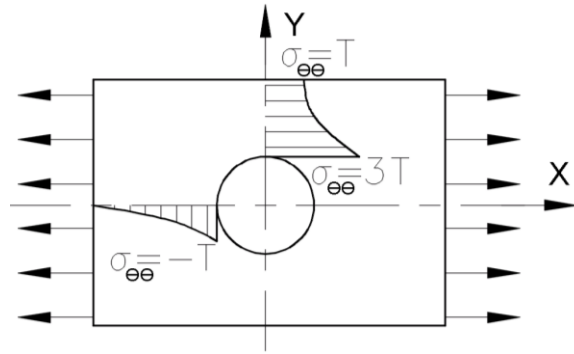
- A tensão relevante é  $\sigma_{\theta\theta}$

$$\left. \begin{array}{l} r = a \\ r = \infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sigma_{\theta\theta} = 3T \\ \sigma_{\theta\theta} = T \end{array} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} r = a \\ r = \infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sigma_{\theta\theta} = -T \\ \sigma_{\theta\theta} = 0 \end{array} \quad \theta = 0^\circ$$

Pelo que o fator de concentração de tensões no furo é:

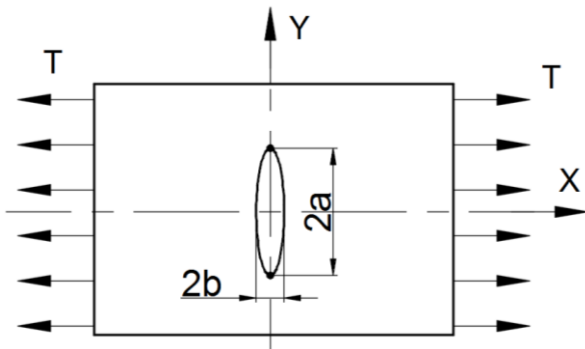
$$k = \frac{\sigma_{hole}}{\sigma_{reference}} = \frac{3T}{T} = 3.$$



### 7.1.2 Exemplo 7.2 - Placa com furo elítico

Para um furo elítico como o da figura junta, a tensão nos pontos extremos da elipse é  $\sigma_{xx} = T \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right)$ .

Qual o valor da tensão quando  $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ , como será o exemplo de uma fenda numa peça. Propor um método de evitar uma tão elevada concentração de tensões.



#### Resolução

O fator de concentração de tensões nos pontos extremos da elipse é  $k = \frac{\sigma_{xx_{extreme}}}{\sigma_{xx_\infty}} = \frac{T \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right)}{T} = \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right)$

quando  $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$  (por exemplo  $b \rightarrow 0$ ),  $k \rightarrow \infty$

Para evitar tão elevada concentração de tensões, pode-se fazer um furo circular nos pontos extremos da elipse. Desta forma o fator de concentração de tensões passará a ser de apenas 3, como visto no problema anterior.

## 8 Referências

- Boresi, A. P., R. J. Schmidt and O. M. Sidebottom (1993). Advanced mechanics of materials. New York, Wiley.
- Bower, A. F. (2010). Applied mechanics of solids, CRC Press Taylor & Francis Group.
- Lekhnitskii, S. G. (1981). Theory of elasticity of an anisotropic body. Moscow, Mir Publishers.
- Oden, J. T. and E. A. Ripperger (1981). Mechanics of Elastic Structures. Washington New York, Hemisphere Pub. Corp.; McGraw-Hill.
- Skrzypek, J. J. and A. W. Ganczarski (2015). Mechanics of Anisotropic Materials. Engineering Materials, Cham, Springer International Publishing : Imprint: Springer, : XXIII, 311 p. 191 illus., 314 illus. in color.
- Timoshenko, S. (1934). Theory of elasticity. New York,, McGraw-Hill.
- Ugural, A. C. and S. K. Fenster (1995). Advanced strength and applied elasticity. Englewood Cliffs, N.J., PTR Prentice Hall.

## 9 Índice Remissivo

ângulo de torção.....	61	Kronecker.....	45
<u>anisotropia</u> .....	49	lei constitutiva.....	45, 46, 50
Anisotropia ortotrópica .....	49	Lei de Hooke .....	45
Anisotropia triclinica.....	48	leis constitutivas.....	44
coeficiente de correlação.....	76	módulo de compressibilidade volumétrica .....	52
coeficiente de Poisson .....	46	módulo de corte .....	46
coeficientes de Chencov .....	44, 49	Módulo de Elasticidade Transversal.....	61
coeficientes de Poisson.....	49	módulo de Young .....	46
coeficientes de Rabinovich.....	49	momento polar de inércia .....	61
Constante de Torção.....	61, 66	ortotropia .....	50
constantes de Lamé.....	45, 46	perfis finos multicelulares .....	80
corte puro.....	47	Princípio de Saint-Venant .....	58
Corte puro .....	46	Rigidez à Torção .....	61
cosenos diretores .....	44, 65	<i>shear flow</i> .....	78
Empeno .....	62, 63	<i>Shear Modulus</i> .....	61
Equação de Laplace .....	64	tensor das deformações .....	44
Equação de Poisson .....	65	tensor das tensões .....	44
fluxo de corte .....	78	tensor de flexibilidade.....	45
Função de Tensão de Prandtl .....	64, 84	tensor de rigidez.....	45
isotropia .....	45	<i>Torsion constant</i> .....	61
Isotropia .....	45, 50, 51	<i>Torsional stiffness</i> .....	61
Isotropia transversal.....	50	<i>warping</i> .....	62