

Mecânica dos Fluidos I

Apontamentos de escoamentos Compressíveis

1 Introdução

Faremos este estudo por etapas. Na introdução, apresentam-se as novas variáveis, nomeadamente a velocidade do som e a entalpia — que aparece associada a uma nova equação, a do balanço energético. Seguidamente, aborda-se de maneira sistemática o caso geral do escoamento estacionário unidimensional de gás perfeito. Finalmente, simplificam-se essas equações para várias situações-limite.

O aspecto de algumas páginas, carregadas de expressões matemáticas, pode sugerir que as manipulações algébricas assumem grande relevância no estudo dos escoamentos compressíveis, no entanto verifica-se o oposto. A aprendizagem fundamental não consiste em demonstrar equações, que em geral não são difíceis de demonstrar, mas em *compreender os escoamentos*: as consequências de variar a pressão, a temperatura ou outra variável. Essa tarefa é que não é nada trivial.

A exposição que se segue colheu sugestões muito úteis dos apontamentos elaborados por um anterior professor desta cadeira: LUÍS ALVES, *Elementos de Escoamento Compressível*, Secção de Termodinâmica Aplicada, IST, 1977. Como os processos termodinâmicos e as equações de estado desempenham um papel importante nestes escoamentos, sugere-se a revisão dos conceitos fundamentais.

1.1 O som

A propagação das pequenas perturbações de pressão denomina-se *som*. A grandeza que se propaga não é a massa mas a perturbação da pressão e a sua energia; por isso também se emprega o termo *celeridade* do som, por contraposição à *velocidade* do fluido. A velocidade de propagação das ondas de pressão, ou celeridade do som, depende das propriedades termodinâmicas do fluido, mas geralmente é pouco afectada pelo escoamento. A Figura 1 representa esquematicamente a propagação *unidimensional* de um som.

Obviamente os balanços são mais simples no referencial estacionário, que se desloca à velocidade da onda. Por isso vamos fazer o balanço de massa e o balanço de forças e quantidade de movimento de uma onda plana, nesse referencial, num volume de controlo escolhido de modo a envolver a frente de onda; Γ designa a fronteira, desenhada na Figura 2 a traço interrompido; A representa a área da secção transversal do escoamento.

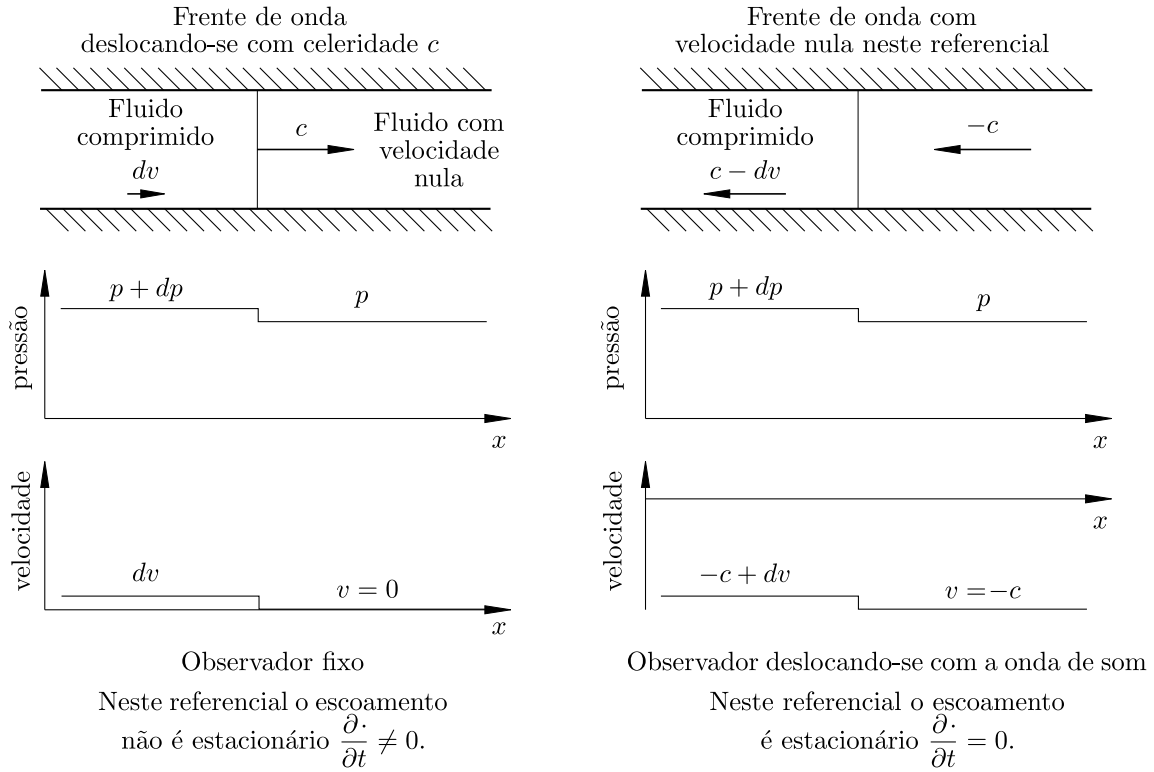


Figura 1: Esquema de propagação unidimensional de uma onda de som num referencial em que a onda se move e num referencial em que ela é estacionária.

O balanço de massa é:

$$\int_{\Gamma} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega}_{=0} = 0$$

$$\underbrace{-A \rho c}_{\int_{\Gamma_1}} + \underbrace{A (\rho + d\rho) (c - dv)}_{\int_{\Gamma_2}} = 0 \quad \text{donde } dv = \frac{d\rho}{\rho} c \quad (1)$$

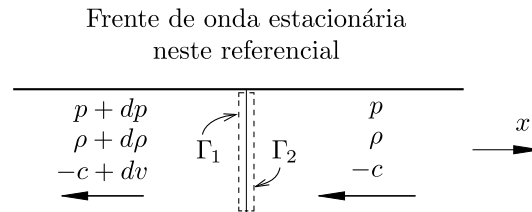


Figura 2: Balanço a uma onda de som, no referencial da onda.

O balanço de forças e quantidade de movimento segundo x , sem atrito, é:

$$\int_{\Gamma} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} d\Omega}_{=0} = \int_{\Gamma} -p n_x d\Gamma$$

$$\underbrace{\int_{\Gamma_1} A \rho c^2}_{f_{\Gamma_1}} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} A (\rho + d\rho) (c - dv)^2}_{f_{\Gamma_2}} = \underbrace{\int_{\Gamma_1} -A p}_{f_{\Gamma_1}} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} A (p + dp)}_{f_{\Gamma_2}} \quad (2)$$

Expandindo (2) e usando (1), obtém-se

$$c^2 \left[1 + \frac{d\rho}{\rho} - \left(\frac{dv}{c} \right)^2 \right] = \frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \lim_{d\rho/\rho \rightarrow 0} c^2 = \frac{dp}{d\rho}. \quad (3)$$

A passagem ao limite justifica-se porque estamos a considerar a propagação de ondas de pressão infinitesimais. Em geral, para cada processo termodinâmico, a pressão varia de forma diferente com a massa volúmica e portanto a derivada $dp/d\rho$ em (3) depende do processo termodinâmico. No caso de perturbações infinitesimais, a onda de pressão é praticamente *adiabática* e, de acordo com (1), as velocidades associadas à variação de pressão ($dv = c d\rho/\rho$) também são infinitesimais, pelo que a onda não dá origem a tensões viscosas nem a dissipação da energia. Portanto o processo é *reversível* e a *entropia é constante*:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \quad (4)$$

Este resultado é válido para a propagação de ondas cilíndricas, originadas por fontes rectilíneas, e para ondas esféricas, emitidas por fontes pontuais. Em contrapartida, só é exacto se a intensidade da onda de pressão for infinitesimal.

Qual é a velocidade do som nalguns modelos mais típicos de fluido?

Velocidade do som num fluido incompressível

No modelo de fluido incompressível a massa volúmica nunca varia e portanto $d\rho/dp = 0$, pelo que

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{1}{d\rho/dp}} = \infty,$$

significando que as perturbações de pressão se propagam instantaneamente a todo o escoamento.

Velocidade do som em líquidos

No caso de líquidos, a equação de estado mais comum é

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{E_v} dp, \quad (5)$$

em que E_v é aproximadamente uma constante para cada líquido, denominada *módulo de expansão volumétrica* (tem unidades de pressão). Por exemplo, para a água líquida, $E_v = 2 \times 10^9$ Pa; portanto $dp/d\rho = E_v/\rho = 2 \times 10^9/10^3 = 2 \times 10^6$ m²/s². Daí resulta que a velocidade do som na água é $c = \sqrt{2 \times 10^6} \simeq 1400$ m/s.

Velocidade do som em gases perfeitos

Para os gases, a equação de estado mais usual é a dos gases perfeitos. Num gás perfeito,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \gamma RT$$

sendo $\gamma = C_p/C_v$ a razão de calores específicos e R a constante de gás perfeito do fluido. Donde:

$$c = \sqrt{\gamma RT}. \quad (6)$$

Por exemplo, para o ar, $\gamma = 1,4$ e $R = 287$ J/(kg K). Portanto, a velocidade do som à temperatura ambiente 20 °C ($T = 293$ K) é $c = 343$ m/s.

1.1.1 Distorção do som devida à velocidade

Um corpo radia de ondas de pressão geradas pelas flutuações de pressão que ocorrem sobre a sua superfície. Em cada instante, o campo de ondas é a sobreposição de todas as ondas emitidas anteriormente. Num fluido em repouso, as ondas de pressão geradas por um corpo parado propagam-se esfericamente (à velocidade do som) a partir do ponto em que foram emitidas (Figura 3-a). Como cada onda esférica se propaga a partir do ponto em que foi gerada, se o corpo tem velocidade relativa em relação ao fluido o campo de ondas fica distorcido, como se mostra na Figura 3. O esquema da Figura 3 permite identificar os seguintes tipos de escoamento, conforme o número de Mach ($M = v/c$), isto é, a proporção entre a velocidade do fluido e a velocidade do som:

Escoamento de fluido INCOMPRESSÍVEL ($M = 0$; $c \rightarrow \infty$)

A perturbação propaga-se uniformemente em todas as direcções. Na escala de tempo característica do escoamento (escala associada à velocidade-padrão e à distância-padrão l/v) a perturbação propaga-se *instantaneamente*, como já se viu.

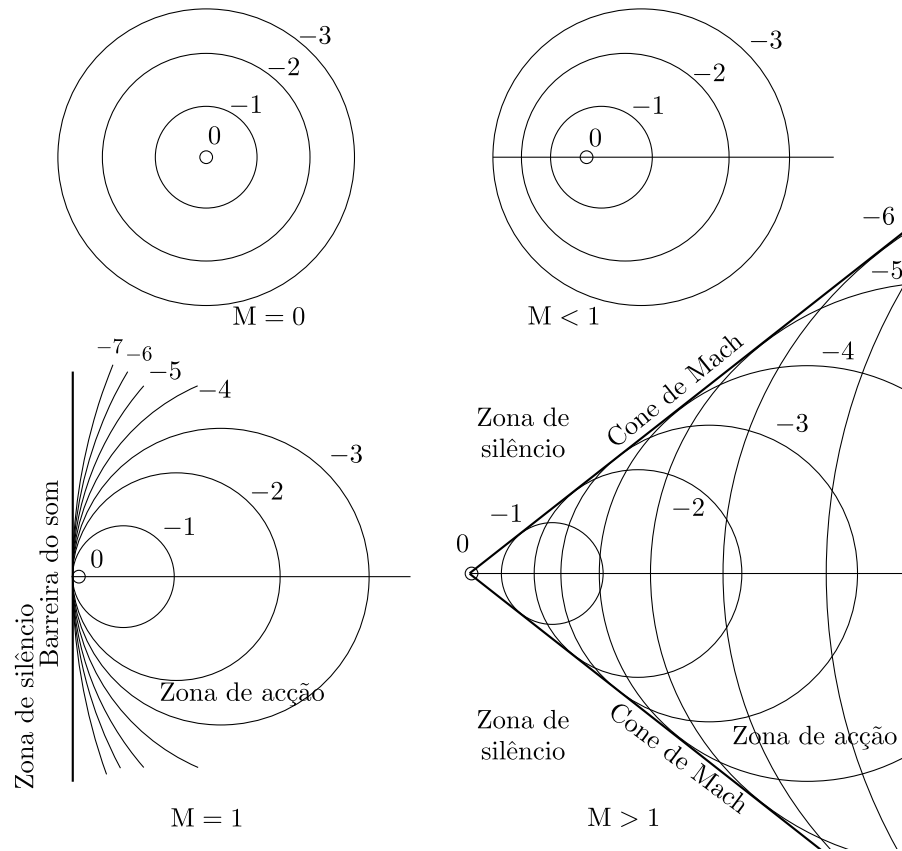


Figura 3: Esquema das ondas de som geradas num ponto em repouso ($M = v/c = 0$); com velocidade inferior à do som ($M < 1$); com velocidade igual à do som ($M = 1$); e com velocidade superior à do som ($M > 1$). Os números -3 , -2 , -1 e 0 referem-se à forma actual das ondas produzidas nos instantes -3 , -2 , -1 e 0 .

Escoamento SUBSÓNICO ($M < 1$)

A fonte de pressão desloca-se a uma velocidade inferior à do som ($v < c$). A onda propaga-se em todas as direcções mas o campo de pressões deixa de ser simétrico: é o chamado *efeito de Doppler*, que consiste em as cristas ficarem mais próximas à frente da fonte geradora de som e mais afastadas atrás dela. Nos autódromos o efeito de Doppler é responsável por os espectadores ouvirem o barulho dos carros que se aproximam num tom mais agudo e o dos carros que se afastam num tom mais grave.

Escoamento SÓNICO ($M = 1$)

Quando a fonte geradora de perturbações de pressão se desloca à velocidade do som ($v = c$), as ondas não se propagam para a frente dela. Cria-se assim uma *barreira*, em que se acumulam todas as frentes de onda que foram sendo geradas. Essa sobreposição de várias ondas em fase origina que, em vez de ondas de amplitude muito pequena, ocorra aí um salto significativo

da pressão. É por isso que a passagem repentina de uma barreira do som é sentida como uma espécie de martelada, que parte vidros e chega a ter efeitos na saúde humana.

Escoamento SUPERSÓNICO ($M > 1$)

A fonte de pressão é mais rápida que o som ($v > c$). Em escoamento sónico a barreira do som tem a forma plana, num escoamento supersónico fica cónica. Todas as perturbações de pressão estão contidas nesse cone que se desloca com a própria fonte e cujo vértice coincide com ela.

Esse cone denomina-se *cone de Mach* e divide a *zona de acção* da zona de silêncio, ainda não atingida por qualquer onda de pressão. Como se disse, para $M = 1$ o cone de Mach degenera numa superfície plana.

1.1.2 Velocidade adimensional em escoamento compressível: número de Mach

O número de Mach, $M = v/c$, tem dois significados físicos dignos de menção:

É uma RAZÃO DE VELOCIDADES

entre a velocidade-padrão do escoamento, v , e a celeridade das ondas de pressão infinitesimais, c . Como já se viu, se $v > c$ isso significa que há uma *zona de silêncio* onde as ondas de pressão não chegam. A proporção v/c é também uma medida da assimetria do escoamento.

É uma RAZÃO ENTRE FORÇAS DE INÉRCIA E ELÁSTICAS

(mais precisamente, é a raiz quadrada dessa razão de forças)

Comparemos a escala das forças de inércia com a das forças elásticas associadas à compressibilidade do fluido, em função das escalas de comprimento l_0 , de velocidade v_0 , de massa volúmica ρ_0 e de pressão p_0 . As forças de inércia são proporcionais a:

$$F_{\text{inércia}} = \text{massa} \times \text{aceleração} \propto (\rho_0 l_0^3) (v_0^2/l_0) = \rho_0 l_0^2 v_0^2.$$

As forças elásticas associadas à compressibilidade são proporcionais a:

$$F_{\text{elástica}} = \text{força de pressão} \propto p_0 l_0^2.$$

A razão entre forças de inércia e forças elásticas é proporcional a:

$$\frac{F_{\text{inércia}}}{F_{\text{elástica}}} \propto \frac{\rho_0 l_0^2 v_0^2}{p_0 l_0^2} = \frac{v_0^2}{(p_0/\rho_0)} \propto \frac{v_0^2}{(\partial p_0/\partial \rho_0)} = M^2.$$

Nota: Para gases perfeitos $(p_0/\rho_0) = RT_0 \propto \gamma RT_0$, que é c_0^2 .

Se o número de Mach é baixo, as forças elásticas desempenham um papel pouco importante, relativamente às forças de inércia; se o número de Mach é elevado, o escoamento depende fortemente das compressibilidade do fluido.

1.1.3 Balanço de energia

O princípio da Mecânica acerca da energia, denominado Primeiro Princípio da Termodinâmica, estabelece que: a taxa de variação temporal da energia total (energia cinética mais energia interna) de um corpo iguala o balanço dos fluxos de energia trocada com o exterior através da sua fronteira, mais a potência energética gerada no interior do corpo.

Este balanço é análogo aos balanços de massa, ou de forças e quantidade de movimento, ou de momentos de forças e momento angular. Em escoamentos incompressíveis as trocas de energia do fluido com o escoamento são muito limitadas e por isso o balanço de energia acaba por coincidir com o balanço de forças e quantidade de movimento. Num escoamento compressível a variação volumétrica realiza trabalho e a energia interna pode transformar-se noutras formas de energia e vice-versa.

Para um volume material Ω , de fronteira Γ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \varepsilon d\Omega = \dot{Q} + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (7)$$

em que

ε representa a energia total por unidade de massa: $\varepsilon = u + \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$, soma da energia interna específica u com a energia cinética específica $\frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$;

\dot{Q} representa a potência calorífica trocada com o exterior, incluindo os fluxos de calor através da fronteira e a potência eventualmente gerada no interior.

\mathbf{t} designa a tensão aplicada exteriormente na fronteira e portanto $\int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma$ é o trabalho por unidade de tempo realizado pelas forças exteriores sobre a fronteira. Como se sabe, $\mathbf{t} = (-p\mathbf{I} + \mathbf{T}) \mathbf{n}$, em que p é a pressão, \mathbf{I} o tensor identidade, \mathbf{T} o tensor desviador das tensões e \mathbf{n} é a normal exterior unitária à fronteira.

$\rho \mathbf{g}$ é o peso do fluido por unidade de volume e $\int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Omega$ é o trabalho por unidade de tempo realizado pelo peso.

Nota: como o vector do peso por unidade de volume $\rho \mathbf{g}$ é vertical, $(\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = -\rho g v_y$, sendo $|\mathbf{g}| = g$ e v_y a componente vertical de \mathbf{v} .

1.1.4 Forma local do balanço de energia

A forma local deduz-se facilmente do balanço para uma volume Ω como se fez para os balanços de massa ou de forças e quantidade de movimento.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \varepsilon d\Omega}_{\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} d\Omega} &= \underbrace{\dot{Q}}_{\int_{\Omega} \rho \dot{q}_{\Omega} d\Omega} + \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \Gamma}_{\int_{\Gamma} -\dot{\mathbf{q}}_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} \Gamma} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \Omega}_{\int_{\Omega} \rho g v_y \Omega} \\
 \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \varepsilon (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Gamma}_{\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{v}) \right] d\Omega} &= \underbrace{\int_{\Omega} \rho \dot{q}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} -\dot{\mathbf{q}}_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} \Gamma}_{\int_{\Omega} \left\{ \rho \dot{q}_{\Omega} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\Gamma} + \nabla \cdot [(-p \mathbf{I} + \mathbf{T}) \mathbf{v}] + \rho g v_y \right\} d\Omega} + \underbrace{\int_{\Gamma} (-p \mathbf{I} + \mathbf{T}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Gamma}_{\int_{\Omega} \nabla \cdot [(-p \mathbf{I} + \mathbf{T}) \mathbf{v}] d\Omega} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho g v_y \Omega}_{\int_{\Omega} \rho g v_y \Omega} \\
 \underbrace{\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{v}) \right] d\Omega}_{\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{v}) \right] d\Omega} &= \underbrace{\int_{\Omega} \left\{ \rho \dot{q}_{\Omega} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\Gamma} + \nabla \cdot [(-p \mathbf{I} + \mathbf{T}) \mathbf{v}] + \rho g v_y \right\} d\Omega}_{\int_{\Omega} \left\{ \rho \dot{q}_{\Omega} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\Gamma} + \nabla \cdot [(-p \mathbf{I} + \mathbf{T}) \mathbf{v}] + \rho g v_y \right\} d\Omega}
 \end{aligned}$$

No limite em que o volume de controlo Ω tende para zero obtém-se a equação de transporte de energia num ponto, por unidade de volume:

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{v}) = \rho \dot{q}_{\Omega} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\Gamma} + \nabla \cdot [(-p \mathbf{I} + \mathbf{T}) \mathbf{v}] + \rho g v_y.$$

O primeiro membro pode desenvolver-se e simplificar-se, mediante a equação da continuidade:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{v}) &= \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \underbrace{\varepsilon \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right]}_{\varepsilon \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] = 0} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \varepsilon = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \varepsilon = \rho \frac{D\varepsilon}{Dt}.
 \end{aligned}$$

O termo das tensões pode também desenvolver-se numa forma análoga ao termo correspondente da equação de transporte de quantidade de movimento:

$$\nabla \cdot [(-p \mathbf{I} + \mathbf{T}) \mathbf{v}] = -\nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \mathbf{v}).$$

Portanto,

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \varepsilon = \rho \dot{q}_{\Omega} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_{\Gamma} - \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \mathbf{v}) + \rho g v_y. \quad (8)$$

$\dot{\mathbf{q}}_{\Gamma}$ representa o fluxo de calor através da fronteira e \dot{q}_{Ω} é a potência gerada no interior de Ω , por unidade de massa.

1.2 Entalpia

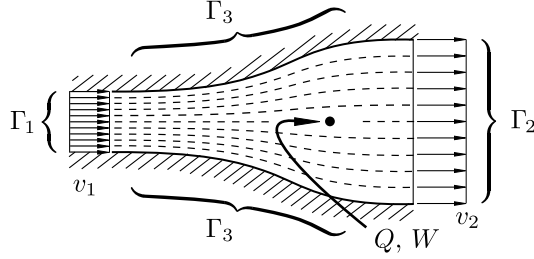


Figura 4: Volume de controlo fixo com fronteira Γ . A parte Γ_3 da fronteira é impermeável ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$) e em Γ_1 e em Γ_2 o escoamento é uniforme. W e Q representam o trabalho realizado sobre o fluido e o calor recebido pelo fluido.

Para um volume de controlo como o representado na Figura 4 e um escoamento estacionário, os termos da equação da energia (7) simplificam-se:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \varepsilon \, d\Omega &= \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} \, d\Omega}_{=0} + \int_{\Gamma} \rho \varepsilon (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = \underbrace{-\rho_1 \varepsilon_1 v_1 A_1}_{\Gamma_1} + \underbrace{\rho_2 \varepsilon_2 v_2 A_2}_{\Gamma_2} + \underbrace{0}_{\Gamma_3} \end{aligned} \right\}$$

$$\int_{\Gamma} -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = \underbrace{p_1 v_1 A_1}_{\Gamma_1} - \underbrace{p_2 v_2 A_2}_{\Gamma_2} + \underbrace{0}_{\Gamma_3}$$

de facto, como $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ nas superfícies de corrente Γ_3 , $\int_{\Gamma_3} -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = 0$

pelo mesmo motivo e porque $\mathbf{T} = 0$ em Γ_1 e Γ_2 por os perfis serem uniformes,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = 0$$

vamos ainda designar por Q o saldo da potência calorífica fornecida menos extraída e por W o saldo do trabalho por unidade de tempo fornecido menos extraído.

A equação da energia fica

$$-\rho_1 \varepsilon_1 v_1 A_1 + \rho_2 \varepsilon_2 v_2 A_2 = Q + W + p_1 v_1 A_1 - p_2 v_2 A_2.$$

Mas, pelo balanço de massa, $\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$, donde

$$\dot{m} (-\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = Q + W + \dot{m} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$$

ou

$$\left(\varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \left(\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{(Q + W)}{\dot{m}}$$

ou ainda, substituindo $\varepsilon = u + \frac{1}{2} v^2 + g y$,

$$\left(u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + g y_2 \right) - \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + g y_1 \right) = \frac{(Q + W)}{\dot{m}}.$$

Esta forma da equação da energia é a justificação principal para introduzir a variável *entalpia* específica, definida como

$$h = \left(u + \frac{p}{\rho} \right). \quad (9)$$

Assim, a equação da energia pode escrever-se:

$$\left(h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + g y_2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + g y_1 \right) = \frac{(Q + W)}{\dot{m}} = q + w. \quad (10)$$

Habitualmente, o termo gravítico $g(y_2 - y_1)$ é muito inferior às outras parcelas, podendo razoavelmente desprezar-se nos escoamentos de fluido compressível. $q = Q/\dot{m}$ e $w = W/\dot{m}$ são o calor e o trabalho recebidos por unidade de massa.

Nota sobre a Equação da Energia e a Equação de Bernoulli

Em escoamentos sem variação de energia interna $u_1 = u_2$, com massa volúmica constante $\rho_1 = \rho_2$ e sem transmissão de calor, a equação da energia reduz-se à equação de Bernoulli, que foi deduzida por integração da equação de transporte da quantidade de movimento ao longo de uma linha de corrente:

$$\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g y_2 \right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + g y_1 \right) = \frac{W}{\dot{m}}.$$

O calor Q não aparece na equação de Bernoulli porque um escoamento incompressível não pode transformar energia térmica noutra forma de energia mecânica. Num escoamento compressível isso é possível porque, havendo forças aplicadas, a variação de massa volúmica realiza trabalho.

1.2.1 Entalpia específica de estagnação

Define-se a *entalpia total específica* ou *entalpia específica de estagnação* de modo análogo a como se definiu a pressão total nos escoamentos incompressíveis:

$$h_0 = \left(h + \frac{v^2}{2} \right). \quad (11)$$

Portanto, a equação da energia para escoamentos unidimensionais estacionários pode escrever-se como:

$$\underbrace{\left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right)}_{h_{02}} - \underbrace{\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right)}_{h_{01}} = q + w. \quad (12)$$

Num escoamento adiabático ($q = w = 0$): $h_{02} = h_{01}$.

1.2.2 Temperatura de estagnação

Num gás perfeito, a diferença de entalpia específica depende exclusivamente da diferença de temperatura, $h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1)$. Por disso, é natural tomar a entalpia específica a 0 K como referência, de modo que $h = C_p T$. Assim, uma vez definida a entalpia específica de estagnação, podemos definir a *temperatura de estagnação* como

$$T_0 = T + \frac{v^2}{2C_p}. \quad (13)$$

A equação da energia diz-nos que um escoamento de temperatura T e velocidade v que é desacelerado adiabaticamente até atingir condições de estagnação tende para a temperatura de estagnação T_0 . Por vezes, esta temperatura é designada como temperatura de estagnação adiabática, porque se a desaceleração seguisse outro processo termodinâmico a temperatura final seria diferente.

Às vezes é útil relacionar a temperatura de estagnação com o número de Mach. Para um gás perfeito $c = \sqrt{\gamma RT}$ e $M = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{\gamma RT}} \Rightarrow v^2 = (\gamma RT) M^2$. dividindo por C_p e recordando que $R/C_p = (\gamma - 1)/\gamma$,

$$\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right).$$

1.3 Pressão de estagnação isentrópica

Ao longo de um processo isentrópico, a pressão só depende da temperatura. Concretamente, para um gás perfeito,

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (14)$$

Portanto, conhecida a temperatura que o fluido atinge ao cabo de uma desaceleração adiabática, podemos calcular também a sua pressão, caso o processo, além de adiabático tenha sido reversível, isto é isentrópico. Usando esta igualdade é fácil obter relações para pressão de estagnação isentrópica a partir da temperatura de estagnação

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (15)$$

2 Modelo matemático geral, para escoamento unidimensional, estacionário, de gás perfeito

Vamos iniciar uma abordagem mais sistemática dos escoamentos compressíveis, assumindo apenas as seguintes restrições:

- o escoamento é unidimensional;
- estacionário;
- de gás perfeito, com R , C_p , C_v e γ constantes.

Apesar destas simplificações, o sistema de equações diferenciais que se obtém só pode ser integrado analiticamente para em casos limite, mas verifica-se que eles são de grande interesse: escoamentos adiabáticos sem atrito; escoamentos em condutas de secção transversal constante; etc. Neste sentido, dizemos que o sistema de equações que vamos desenvolver nesta secção é *geral*, em confronto com essas situações mais específicas, que analisaremos nas secções posteriores.

O modelo matemático geral é constituído pelas seguintes equações:

G-1 Equação de estado dos gases perfeitos

$$p \frac{1}{\rho} = RT. \quad (16)$$

Tomando logaritmos $\ln p - \ln \rho = \ln R + \ln T$ e diferenciando:

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (17)$$

Faz ainda parte do modelo de gás perfeito considerar que a entalpia só depende da temperatura,

$$(h_2 - h_1) = C_p (T_2 - T_1) \quad \text{ou} \quad dh = C_p dT. \quad (18)$$

G-2 Velocidade do som

Em geral, $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ e, para gases perfeitos,

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad (19)$$

de modo, que tomando logaritmos, $\ln c = \frac{1}{2} (\ln \gamma + \ln R + \ln T)$ e derivando:

$$\frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T}. \quad (20)$$

G-3 Definição do número de Mach

$$M = \frac{v}{c} \quad (21)$$

tomando logaritmos, $\ln M = \ln v - \ln c$ ou $\frac{1}{2} \ln M^2 = \ln v - \ln c$, e diferenciando,

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{dc}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dv}{v} - 2 \frac{dc}{c} \quad (22)$$

G-4 Equação de conservação da massa

Para escoamentos unidimensionais estacionários a equação da continuidade resume-se a

$$\rho_2 v_2 A_2 = \rho_1 v_1 A_1 = \dot{m} \quad (23)$$

em que \dot{m} representa o caudal mássico. Aplicando a função logaritmo, $\ln \rho + \ln v + \ln A = \ln \dot{m}$ e diferenciando:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (24)$$

G-5 Equação da quantidade de movimento

Em geral, nos escoamentos compressíveis as forças mássicas são muito menores que as outras e por isso vamos ignorá-las. Assim, para escoamentos unidimensionais estacionários a equação de transporte da quantidade de movimento na direcção do escoamento é:

$$\rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx} + (\nabla \cdot \mathbf{T})_x. \quad (25)$$

Ao integrar ao longo de um tubo de corrente (ou linha de corrente), a Análise Dimensional diz-nos que a parcela $(\nabla \cdot \mathbf{T})_x$ pode ser expressa em função de um coeficiente de atrito f ,

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_x dx = -f \frac{dx}{D} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right),$$

o qual depende dos outros números adimensionais do problema: o número de Reynolds, a rugosidade específica da parede e o número de Mach. Normalmente, admite-se que a influência do número de Mach é desprezável e que, portanto, o diagrama de Moody é sempre aplicável. Por outro lado, tal como acontece em muitos fluidos incompressíveis, o coeficiente de atrito varia pouco com o número de Reynolds. Deste modo, acabamos por considerar f como constante, desde que a rugosidade relativa seja uniforme. Representando as tensões desviadoras em função de f , a equação de transporte de quantidade de movimento fica

$$\rho v dv = -dp - f \frac{dx}{D} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

ou, dividindo pela pressão e rearranjando,

$$\frac{dp}{p} + \frac{\rho}{p} v^2 \frac{dv}{v} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{p} v^2 f \frac{dx}{D} = 0.$$

Por outro lado, como $c^2 = \gamma RT = \gamma \frac{p}{\rho}$, obtém-se

$$\frac{dp}{p} + \gamma M^2 \frac{dv}{v} + \frac{\gamma}{2} M^2 f \frac{dx}{D} = 0. \quad (26)$$

G-6 Definição da função de impulso, F

Para escoamentos unidimensionais (o que implica perfis uniformes de velocidades nas secção 1 e na secção 2), o balanço integral de forças e quantidade de movimento na direcção x do escoamento resume-se a:

$$(p_2 A_2 + \rho A_2 v_2^2) - (p_1 A_1 + \rho A_1 v_1^2) = F_x \quad (27)$$

em que F_x designa a componente segundo x da resultante das forças aplicadas sobre o fluido entre as secções (1) e (2). Esta equação pode escrever-se como:

$$F_2 - F_1 = F_x \quad (28)$$

em que se define a função de impulso F como:

$$F = (p + \rho v^2) A. \quad (29)$$

Podemos desenvolver esta definição de F :

$$F = (p + \rho v^2) A = p A \left(1 + \frac{\rho}{p} v^2\right) = p A \left(1 + \frac{v^2}{RT}\right) = p A (1 + \gamma M^2).$$

Tomando logaritmos, $\ln F = \ln P + \ln A + \ln(1 + \gamma M^2)$, e diferenciando:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \left(\frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2}\right) \frac{dM^2}{M^2} \quad (30)$$

Para um tubo circular de comprimento L e diâmetro D , a força de atrito é:

$$F_{\text{atrito}} = f \frac{L}{D} \left(\frac{1}{2} \rho v^2\right) A$$

Este termo aparece na equação da quantidade de movimento apresentada atrás (G-5):

$$\rho v dv = -dp + \underbrace{f \frac{dx}{D} \left(\frac{1}{2} \rho v^2\right)}_{= dF_{\text{atrito}}/A}$$

Nota: Como se sabe, por vezes o coeficiente de atrito é definido de outro modo, por exemplo adimensionalizando o comprimento L pelo raio $(D/2)$ ou pelo raio hidráulico $(D/4)$.

G-7 Equação da energia

Para escoamentos unidimensionais estacionários a equação da energia é

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + q + w = h_2 + \frac{v_2^2}{2}. \quad (31)$$

Diferenciando a equação da energia,

$$d(q + w) = dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Substituindo $dh = C_p dT$ e $v^2 = M^2 c^2 = M^2 \gamma R T$ e dividindo por $C_p T$,

$$\frac{d(q + w)}{C_p T} = \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) M^2 \frac{dv}{v}. \quad (32)$$

G-8 Definição da temperatura de estagnação

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2}$$

mas, para gases perfeitos $\Delta h = C_p \Delta T$, donde podemos definir a temperatura de estagnação T_0 :

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{v^2}{2}$$

Substituindo novamente $v^2 = M^2 c^2 = M^2 \gamma R T$: $T_0 = T + \frac{\gamma R}{2 C_p} M^2 T$.

Como $\frac{\gamma R}{C_p} = \gamma - 1$, vem $T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$.

Tomando logaritmos, $\ln T_0 = \ln T + \ln \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$, e diferenciando

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \left[\frac{(\gamma - 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] \frac{dM^2}{M^2}. \quad (33)$$

«G-7.b» Equação da energia

Uma vez definida a temperatura de estagnação estamos em condições de escrever a equação da energia em função dessa temperatura. Efectivamente, o saldo das trocas de energia com o exterior (calor e trabalho) é igual à variação da «energia do fluido» – falando com rigor: é igual à variação da *entalpia total* do escoamento. Para os gases perfeitos, em que $dh_0 = C_p dT_0$, a energia trocada com o exterior é proporcional à *temperatura de estagnação*. É esta a justificação para o interesse de relacionar os fluxos de energia com a temperatura de estagnação.

Da equação (G-3): $\frac{dv}{v} = \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2}$

e da equação (G-2): $\frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$ pelo que: $\frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T} + \frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2}$

Substituindo na equação (G-7):

$$\frac{d(q+w)}{C_p T} = \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) M^2 \frac{dv}{v}$$

fica:

$$\begin{aligned} \frac{d(q+w)}{C_p T} &= \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) M^2 \left[\frac{1}{2} \frac{dT}{T} + \frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} \right] \\ &= \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{2} \right] \frac{dT}{T} + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \frac{dM^2}{M^2} \end{aligned}$$

Aplicando a equação (G-8) $\frac{dT}{T} = \frac{dT_0}{T_0} - \left[\frac{(\gamma - 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] \frac{dM^2}{M^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{d(q+w)}{C_p T} &= \frac{1}{2} [2 + (\gamma - 1) M^2] \frac{dT_0}{T_0} \\ &\quad - \frac{1}{2} [2 + (\gamma - 1) M^2] \left[\frac{(\gamma - 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] \frac{dM^2}{M^2} + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \frac{dM^2}{M^2} \end{aligned}$$

e simplificando:

$$\frac{d(q+w)}{C_p T} = \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{2} \right] \frac{dT_0}{T_0} \quad (34)$$

Nota: Eliminando T e T_0 nos denominadores chegar-se-ia ao ponto de partida: $d(q+w) = C_p dT_0 = dh_0$.

G-9 Definição da pressão de estagnação isentrópica

Para um gás perfeito ao longo de um processo isentrópico

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (35)$$

Usando esta igualdade é fácil obter relações para pressão de estagnação isentrópica a partir da temperatura de estagnação

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (36)$$

Ainda, tomando logaritmos, $\ln p - \ln p_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1}(\ln T - \ln T_0)$ diferenciando e isolando dp_0/p_0 :

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{dT_0}{T_0} - \frac{dT}{T} \right). \quad (37)$$

G-10 Equação da entropia

Para um gás perfeito

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - C_p \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{dp}{p} \quad (38)$$

e também

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - C_p \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right). \quad (39)$$

SINOPSE DAS EQUAÇÕES GERAIS

$$\mathbf{G-1.} \quad \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T}$$

$$\mathbf{G-2.} \quad \frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$$

$$\mathbf{G-3.} \quad \frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dv}{v} - 2 \frac{dc}{c}$$

$$\mathbf{G-4.} \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\mathbf{G-5.} \quad \frac{dp}{p} + \gamma M^2 \frac{dv}{v} + \frac{\gamma}{2} M^2 f \frac{dx}{D} = 0$$

$$\mathbf{G-6.} \quad \frac{dF}{F} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma M^2} \right) dM^2$$

$$\mathbf{G-7.} \quad \frac{d(q+w)}{C_p T} = \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) M^2 \frac{dv}{v}$$

$$\mathbf{G-7.b)} \quad \frac{d(q+w)}{C_p T} = \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{2} \right] \frac{dT_0}{T_0}$$

$$\mathbf{G-8.} \quad \frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \left[\frac{\gamma - 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] dM^2$$

$$\mathbf{G-9.} \quad \frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{dT_0}{T_0} - \frac{dT}{T} \right) = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma}{2 + (\gamma - 1) M^2} dM^2$$

$$\mathbf{G-10.} \quad \frac{ds}{C_p} = \frac{dT}{T} - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{dp}{p}$$

TIPOS ELEMENTARES DE ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS

O sistema de equações apresentado na página anterior não tem solução analítica geral. No entanto, há várias situações-limite, de grande importância prática, em que é possível encontrar uma solução.

Escoamento ISENTRÓPICO

Um escoamento adiabático ($q = 0$ e $w = 0$, portanto $dT_0 = 0$) e sem atrito (portanto reversível) é isentrópico ($ds = 0$).

Este modelo aplica-se quando as variações de área da secção transversal importam mais que o atrito ou a transmissão de calor, o que se verifica quando a área varia apreciavelmente ao longo de um comprimento curto e não há separação do escoamento. O escoamento será tanto mais adiabático quanto melhor for o isolamento térmico da conduta.

Escoamento ADIABÁTICO COM ATRITO em conduta de SECÇÃO CONSTANTE

Escoamento adiabático ($q = 0$ e $w = 0$, portanto $dT_0 = 0$), com atrito (expresso por determinado $f \neq 0$), numa conduta em que a área da secção é constante ($dA = 0$ e portanto $d(\rho v) = 0$).

Este modelo aplica-se em tubos isolados termicamente, ou nos quais a potência por unidade de massa dissipada por atrito é tão intensa que a transmissão de calor através das paredes se pode desprezar. Normalmente esta condição só se verifica quando o número de Mach não é pequeno.

Escoamento COM TRASMISSÃO DE CALOR em conduta de SECÇÃO CONSTANTE sem atrito

De acordo com a equação da energia, o calor e o trabalho trocados por unidade de massa alteram a entalpia de estagnação ($C_p \Delta T_0 = q + w$); para permitir tratar analiticamente as expressões, despreza-se o atrito ($f = 0$) e considera-se que a secção da conduta é constante ($dA = 0$).

Este modelo aplica-se quando as trocas de energia predominam sobre todos os outros efeitos. Isso pode dever-se a reacções químicas intensas, habitualmente exotérmicas (o exemplo mais típico é o escoamento em câmaras de combustão), ou à existência de um compressor, que fornece trabalho e algum calor ao fluido.

Escoamento ISOTÉRMICO COM ATRITO em conduta de SECÇÃO CONSTANTE

A temperatura é constante ($dT = 0$), a secção é constante ($dA = 0$), mas há atrito ($f \neq 0$).

Este modelo aplica-se em gasodutos muito longos, em que o número de Mach é baixo e a potência por unidade de massa e de comprimento dissipada por atrito é relativamente pequena. Como essa potência é pequena, a temperatura do fluido permanece quase igual à do meio envolvente, apenas ligeiramente superior. A pressão vai-se reduzindo muito gradualmente, mas, ao longo de distâncias grandes, a perda de carga cumulativa chega a ser grande e a massa volúmica do gás também varia apreciavelmente.

ONDA DE CHOQUE plana

Consiste numa interface, uma quase-descontinuidade, de espessura muito curta, através da qual as propriedades do fluido variam apreciavelmente. O modelo é o de uma interface plana ortogonal ao escoamento, que, em virtude de a espessura ser tão curta, não sofre variação de área ($dA = 0$), é adiabática ($q = 0$ e $w = 0$, portanto $dT_0 = 0$) e não tem forças aplicadas (a função de impulso conserva-se, $dF = 0$),

Nas secções seguintes, o sistema geral de equações diferenciais da página 18 é simplificado para cada um destes grupos de restrições e integrado.

3 Escoamento isentrópico (adiabático, sem atrito)

Para relacionar as propriedades do escoamento isentrópico entre duas secções, vamos integrar as equações gerais da página 18, depois de lhes aplicar as simplificações correspondentes. As manipulações algébricas não são difíceis, mas são trabalhosas, dado o número de equações. Como nos interessam sobretudo os resultados finais, estes destacam-se em letra normal e os passos intermédios escrevem-se em letra mais pequena. Começemos por simplificar o sistema de equações para este caso particular:

Escoamento adiabático sem troca de trabalho: $d(q + w) = 0$

Pela equação (G-7.b): $\frac{dT_0}{T_0} = 0$

Por não haver atrito: $f = 0$

Um processo reversível é isentrópico: $ds = 0$

Da equação (G-8): $\frac{dT}{T} = - \left[\frac{(\gamma - 1)}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] dM^2$

Da equação (G-2): $\frac{dc}{c} = \frac{-1}{2} \left[\frac{(\gamma - 1)}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] dM^2$

Da equação (G-10): $\frac{dp}{p} = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{dT}{T} = \left[\frac{(-\gamma)}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] dM^2$

Da equação (G-9): $\frac{dp_0}{p_0} = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{dT}{T} - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{dT}{T} = 0$

Da equação (G-7): $\frac{dv}{v} = \left[\frac{-1}{(\gamma - 1)M^2} \right] \frac{dT}{T} = \frac{1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-1): $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-M^2}{[2 + (\gamma - 1)M^2]} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-4): $\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{[2 + (\gamma - 1)M^2]} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-6), substituindo $\frac{dp}{p}$ e $\frac{dA}{A}$: $\frac{dF}{F} = \left[\frac{-\gamma M^2 + M^2 - 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \right] \frac{dM^2}{M^2}$
 $= \frac{1 - M^2}{(1 + \gamma M^2)[2 + (\gamma - 1)M^2]} \frac{dM^2}{M^2}$

Estas equações diferenciais podem ser integradas¹ entre duas secções, 1 e 2:

$$T_{02} - T_{01} = \int_1^2 dT_0 = 0: \quad \Rightarrow \quad T_{02} - T_{01} = 0$$

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 ds = 0: \quad \Rightarrow \quad s_2 - s_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) &= \int_1^2 \frac{dT}{T} = \int_1^2 \frac{-(\gamma-1)}{2+(\gamma-1)M^2} dM^2 = -(\gamma-1) \int_1^2 \frac{dM^2}{2+(\gamma-1)M^2} \\ &= -(\gamma-1) \left\{ \frac{1}{(\gamma-1)} \ln \left[\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \right] \right\} = -\ln \left[\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \right] \\ &\Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Como } \frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T}: \quad \Rightarrow \quad \frac{c_2}{c_1} = \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \right]^{1/2}$$

$$\text{Como } \frac{dp}{p} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{dT}{T}, \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \right]^{\gamma/\gamma-1}$$

$$p_{02} - p_{01} = \int_1^2 dp_0 = 0: \quad \Rightarrow \quad p_{02} - p_{01} = 0$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) &= \int_1^2 \frac{dv}{v} = \int_1^2 \frac{dM^2}{[2+(\gamma-1)M^2]M^2} = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{M_2^2 [2+(\gamma-1)M_1^2]}{M_1^2 [2+(\gamma-1)M_2^2]} \right\} \\ &\Rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{Como } \frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{1}{\gamma-1} \right) \frac{dT}{T}: \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \right]^{1/\gamma-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } \frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho_2 v_2} &= \left[\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \right]^{1/2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \right]^{\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

¹Primitivas úteis: $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$ e $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{a+bx}\right)$.

Da equação (G-6), $\ln\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right) + \int_1^2 \frac{\gamma dM^2}{1 + \gamma M^2}$

$$= \ln\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{A_2}{A_1}\right) \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{A_2}{A_1}\right) \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right)$$

$$= \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}\right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right) \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right]^{1/2}$$

As expressões anteriores permitem obter as relações de propriedades do escoamento isentrópico entre as condições de estagnação ($M_1 = 0$) e uma secção com um número de Mach genérico ($M_2 = M$). Vamos identificar as condições de estagnação com o índice 0.

$$T_0(M) = T_0 \quad (40)$$

$$s(M) = s_0 \quad (41)$$

$$\frac{T(M)}{T_0} = \frac{2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad (42)$$

$$\frac{c(M)}{c_0} = \left[\frac{2}{2 + (\gamma - 1) M^2}\right]^{1/2} \quad (43)$$

$$\frac{p(M)}{p_0} = \left[\frac{2}{2 + (\gamma - 1) M^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (44)$$

$$p_0(M) = p_0 \quad (45)$$

$$\frac{\rho(M)}{\rho_0} = \left[\frac{2}{2 + (\gamma - 1) M^2}\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (46)$$

Deduzem-se também os resultados triviais:

$$\frac{A(M)}{A_0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{F(M)}{F_0} = 0. \quad (47)$$

Repare-se que em condições de estagnação a área da secção é infinita.

Para $M = 1$ (condições críticas), no caso particular de $\gamma = 1, 4$:

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,8333 \quad \text{e} \quad \frac{p^*}{p_0} = 0,5283$$

As mesmas expressões permitem relacionar os valores das variáveis entre uma secção com um número de Mach genérico ($M_2 = M$) e os valores *críticos* das mesmas variáveis (isto é, na secção em que $M_1 = 1$). Os valores críticos vão assinalados com *:

$$T_0(M) = T_0^* \quad (48)$$

$$s(M) = s^* \quad (49)$$

$$\frac{T(M)}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad (50)$$

$$\frac{c(M)}{c^*} = \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2} \quad (51)$$

$$\frac{p(M)}{p^*} = \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (52)$$

$$p_0(M) = p_0^* \quad (53)$$

$$\frac{v(M)}{v^*} = M \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2} \quad \text{Nota: } v^* = c^* \quad (54)$$

$$\frac{\rho(M)}{\rho^*} = \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (55)$$

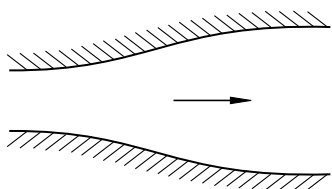
$$\frac{A(M)}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{1 + \gamma}{2(\gamma - 1)}} \quad (56)$$

$$\frac{F(M)}{F^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \right) \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2} \quad (57)$$

Em apêndice apresentam-se gráficos de algumas destas funções para o caso em que $\gamma = 1, 4$.

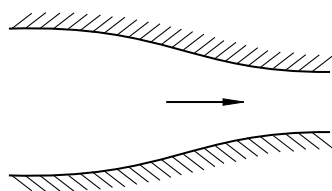
Evolução das propriedades de um escoamento isentrópico com secção variável

Designa-se por *tubeira* uma conduta em que o escoamento acelera e *difusor* uma conduta em que ele desacelera. Em escoamento incompressível, uma contracção é uma tubeira e uma conduta divergente é um difusor, mas não acontece assim em escoamento compressível. O seguinte quadro sumariza a evolução das variáveis nos vários casos.



Conduta divergente:
 DIFUSOR SUBSÓNICO
 TUBEIRA SUPERSÓNICA
 $dA/dx > 0$

$M < 1$	$dp/dx > 0$ $dT/dx > 0$ $d\rho/dx > 0$ $dv/dx > 0$ $dM/dx < 0$ $dc/dx > 0$	$M > 1$	$dp/dx < 0$ $dT/dx < 0$ $d\rho/dx < 0$ $dv/dx > 0$ $dM/dx > 0$ $dc/dx < 0$
---------	---	---------	---



Conduta convergente:
 DIFUSOR SUPERSÓNICO
 TUBEIRA SUBSÓNICA
 $dA/dx < 0$

$M < 1$	$dp/dx < 0$ $dT/dx < 0$ $d\rho/dx < 0$ $dv/dx > 0$ $dM/dx > 0$ $dc/dx < 0$	$M > 1$	$dp/dx > 0$ $dT/dx > 0$ $d\rho/dx > 0$ $dv/dx > 0$ $dM/dx < 0$ $dc/dx > 0$
---------	---	---------	---

Nota: Recordamos que este quadro diz a respeito a escoamento isentrópico, portanto sem perda de carga.

3.1 Caudal Mássico

Por definição, o caudal mássico de um escoamento unidimensional é: $\dot{m} = \rho v A$, sendo ρ , v e A valores uniformes numa dada selecção transversal do escoamento. Pela equação da continuidade sabe-se que \dot{m} não varia de secção para secção num escoamento estacionário.

Aplicando as relações atrás deduzidas para escoamento isentrópico:

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho v = \left(\frac{p}{RT} \right) v = \frac{(p/p_0) v}{\sqrt{\gamma RT}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}.$$

usando $M = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{\gamma RT}}$

$$\frac{T_0}{T} = \frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{2} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2$$

$$\frac{p_0}{p} = \left[\frac{2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

vem:

$$\frac{\dot{m}}{A} = M \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right]^{\left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)}$$

ou:

$$\frac{\dot{m}}{A} = M \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right]^{\frac{-(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}}$$

Nota Importante: Esta equação é válida genericamente em cada secção como relação entre o caudal e a pressão de estagnação isentrópica e a temperatura de estagnação dessa secção. Se o escoamento for isentrópico, a pressão de estagnação nessa secção será a mesma que noutros sítios mas, em geral, cada secção tem os seus próprios valores de p_0 e T_0 .

Vale a pena ressaltar dois aspectos desta equação do caudal mássico por unidade de área:

- O caudal mássico por unidade de área é proporcional a $p_0/\sqrt{T_0}$, para um dado número de Mach.
- Para determinado fluido e dadas condições de estagnação, o caudal mássico por unidade de área é *máximo* para $M = 1$, como se ilustra na figura (particularizando para $\gamma = 1,4$).

Nota: Para $\gamma = 1,4$ e $R = 287 \text{ J}/(\text{kg K})$, $\left(\frac{\dot{m}}{A} \right)_{max} = \left(\frac{\dot{m}}{A} \right)_{M=1} = 0,04042 \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}$.

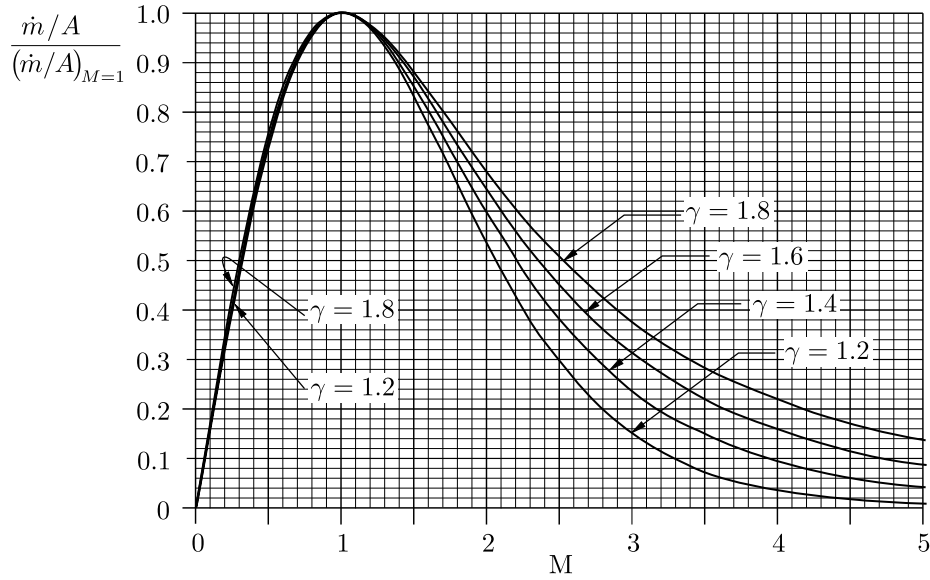


Figura 5: Caudal mássico por unidade de área adimensionalizado pelo caudal mássico por unidade de área em condições críticas. As curvas cobrem uma gama ampla de razões de calores específicos, entre $\gamma = 1.2$ e $\gamma = 1.8$.

3.2 Condições de estagnação

As condições de estagnação de uma determinada secção correspondem muitas vezes a um escoamento virtual, porque não se verificam de facto, mas são aquelas que se atingiriam ao cabo de uma desaceleração isentrópica ou, equivalentemente, aquelas de que se tinha de partir para acelerar o fluido isentropicamente desde a velocidade nula até às condições actuais na secção.

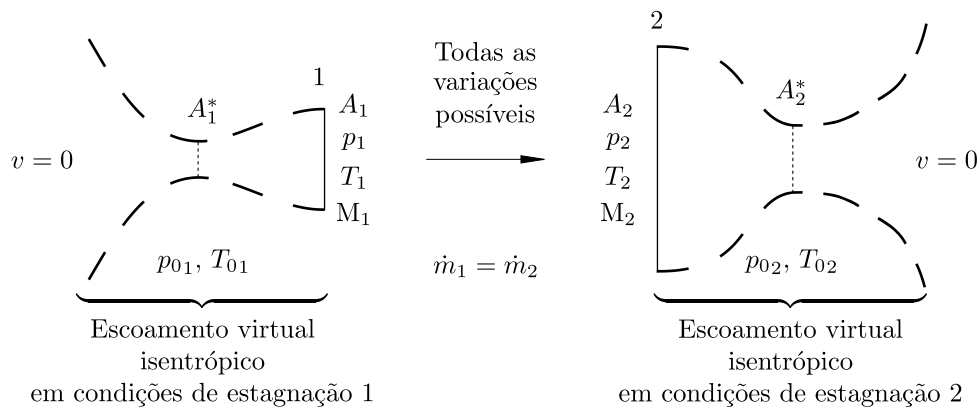


Figura 6: Duas secções de um escoamento, com condições de estagnação diferentes.

Pode ser que, nem a montante nem a jusante da secção se verifique uma evolução isentrópica. Inclusivamente, se se tratar de um escoamento supersónico, em

muitas situações é tecnicamente impossível desacelerar o escoamento sem provocar ondas de choque (ver secção 7), que implicam um aumento considerável de entropia. Apesar disso, pode sempre definir-se um estado de estagnação isentrópico, pelo menos virtual, de onde o fluido *poderia* ter acelerado isentropicamente até às condições actuais, ou que atingiria *se fosse* desacelerado isentropicamente.

A impossibilidade técnica de desacelerar isentropicamente um escoamento supersónico resulta de que há duas soluções para um escoamento compressível com determinada secção e caudal mássico, sem exercer forças sobre o escoamento (mesma função de impulso) nem trocar calor com o exterior (mesma entalpia específica de estagnação). Uma dessas soluções é subsónica e a outra é supersónica. A alternativa subsónica tem maior entropia específica e, portanto, o escoamento pode transitar directamente de supersónico a subsónico (onda de choque), mas o inverso é contra o segundo princípio da Termodinâmica.

Outra maneira de entender a dificuldade de desacelerar um escoamento supersónico é reparar que o som (as ondas de pressão infinitesimais) não conseguem propagar-se para montante e, portanto, uma alteração da pressão a jusante não se transmite para trás: o escoamento de montante está numa *zona de silêncio*, análoga à representada na Figura 3. A única forma de influenciar o escoamento a montante é provocar a sua passagem a subsónico (onda de choque).

Outra forma de perspectivar o problema, equivalente ao argumento da maximização da entropia, é considerar a instabilidade inerente à desaceleração de um escoamento supersónico. Um escoamento subsónico é comparável a um pêndulo articulado em cima, um escoamento supersónico é comparável a um pêndulo articulado em baixo: enquanto o pêndulo articulado em cima é estável, é difícil ou praticamente impossível manter na vertical um pêndulo articulado em baixo.

A temperatura de estagnação é a mesma para qualquer processo de desaceleração adiabático, seja reversível (isentrópico) ou irreversível. Por esse motivo, se refere a *pressão de estagnação isentrópica*, mas basta dizer *temperatura de estagnação adiabática*.

3.3 Área crítica virtual

A secção 3.1 mostrou que um caudal \dot{m} pode evoluir isentropicamente desde uma secção genérica até uma secção crítica, com área A^* que é função das condições de estagnação p_0 e T_0 da secção. Deste modo, tal como se mostra na Figura 6, podemos atribuir a cada secção uma área crítica A^* isentrópica, pelo menos virtual, que se relaciona com a área da secção pela relação de áreas (56).

A dificuldade técnica de desacelerar um escoamento supersónico até condições críticas é a mesma, assinalada acima, para o desecelerar até às condições de estagnação.

4 Escoamento adiabático com atrito em condu- ta de secção constante

Nesta secção simplificamos as equações gerais da página 18 para este tipo particular de escoamento, para as integrar entre duas secções da conduita. Como na secção anterior, os resultados finais aparecem em letra normal e os passos intermédios em letra mais pequena. Começemos por simplificar o sistema de equações gerais:

Escoamento adiabático sem troca de trabalho: $d(q + w) = 0$

Pela equação (G-7.b): $\frac{dT_0}{T_0} = 0$

Conduita de área transversal constante: $dA = 0$

Da equação (G-8): $\frac{dT}{T} = - \left[\frac{\gamma - 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] dM^2$

Da equação (G-2): $\frac{dc}{c} = \frac{-1}{2} \left[\frac{\gamma - 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] dM^2$

Da equação (G-7): $\frac{dv}{v} = \left[\frac{-1}{(\gamma - 1) M^2} \right] \frac{dT}{T} = \frac{1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-4): $\frac{d\rho}{\rho} = \left[\frac{-1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-1): $\frac{dp}{p} = \left[\frac{-1 - (\gamma - 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-9): $\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{dT}{T} = \left[\frac{-1 - (\gamma - 1) M^2 + \gamma M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] \frac{dM^2}{M^2}$

$$\Rightarrow \frac{dp_0}{p_0} = \left[\frac{-1 + M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] \frac{dM^2}{M^2}$$

Da equação (G-6): $\frac{dF}{F} = \frac{M^2 - 1}{(1 + \gamma M^2) [2 + (\gamma - 1) M^2]} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-10): $\frac{ds}{C_p} = \frac{(\gamma - 1) (1 - M^2)}{\gamma [2 + (\gamma - 1) M^2]} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-5): $f \frac{dx}{D} = -\frac{2}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} - 2 \frac{dv}{v} = -2 \left[\frac{-1 - (\gamma - 1) M^2 + \gamma M^2}{\gamma M^2 [2 + (\gamma - 1) M^2]} \right] \frac{dM^2}{M^2}$

$$\Rightarrow f \frac{dx}{D} = \frac{2(1 - M^2)}{\gamma M^2 [2 + (\gamma - 1) M^2]} \frac{dM^2}{M^2}$$

Estas equações diferenciais podem ser integradas² entre duas secções, 1 e 2, da conduta:

$$T_{02} - T_{01} = \int_1^2 dT_0 = 0: \quad \Rightarrow \quad T_{02} - T_{01} = 0$$

$$\text{De } dA = 0: \quad \Rightarrow \quad A_2 = A_1$$

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \int_1^2 \frac{dT}{T} = \int_1^2 \frac{-(\gamma-1)}{2+(\gamma-1)} dM^2 = -\ln\left[\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2}\right]$$

$$\text{Como } \frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T}: \quad \Rightarrow \quad \frac{c_1}{c_2} = \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2}\right]^{1/2}$$

$$\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \int_1^2 \frac{dv}{v} = \int_1^2 \frac{dM^2}{[2+(\gamma-1)M^2]M^2} = \frac{1}{2} \ln\left\{\frac{M_2^2 [2+(\gamma-1)M_1^2]}{M_1^2 [2+(\gamma-1)M_2^2]}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2}\right]^{1/2}$$

$$\text{Como } \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v}: \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}\right]^{1/2}$$

$$\text{Como } \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1}: \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2}\right]^{1/2}$$

$$\text{Integrando (G-9) com } dT_0 = 0: \quad \ln\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \ln\left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2}\right]^{1/2} \left[\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

²Primitivas úteis: $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$, $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{a+bx}\right)$

e $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = \frac{-1}{ax} + \frac{b^2}{a} \ln\left(\frac{a+bx}{x}\right)$.

$$\begin{aligned}
\text{Integrando (G-6) com } dA = 0: \quad \ln\left(\frac{F_2}{F_1}\right) &= \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \gamma \int_1^2 \frac{dM^2}{1 + \gamma M^2} \\
&= \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \ln\left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right) = \ln\left(\frac{p_2}{p_1} \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right) \\
&= \ln\left\{\frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right]^{1/2} \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right)\right\} \\
\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} &= \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right) \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Integrando (G-10):} \quad \frac{s_2 - s_1}{C_p} &= \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \ln\left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right] \\
&= \ln\left\{\left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right] \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}\right]^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}}\right\} \\
\Rightarrow \frac{s_2 - s_1}{C_p} &= \ln\left\{\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right]^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\text{Como } f \frac{dx}{D} = \frac{2(1 - M^2)}{\gamma M^2 [2 + (\gamma - 1) M^2]} \frac{dM^2}{M^2},$$

$$\int_1^2 f \frac{dx}{D} = \int_1^2 \frac{2 dM^2}{\gamma M^4 [2 + (\gamma - 1) M^2]} - \int_1^2 \frac{2 dM^2}{\gamma M^2 [2 + (\gamma - 1) M^2]}$$

supondo que f seja constante no intervalo:

$$\begin{aligned}
f \frac{(x_2 - x_1)}{D} &= \frac{2}{\gamma} \left[-\frac{1}{2M^2} + \frac{(\gamma - 1)}{2^2} \ln\left(\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{M^2}\right) \right]_1^2 - \frac{2}{\gamma} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2}\right) \right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{\gamma M^2} \Big|_1^2 + \ln\left\{\left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{M^2}\right]^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma}} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{M^2}\right]^{1/\gamma}\right\} \Big|_1^2 \\
&= -\frac{1}{\gamma M^2} \Big|_1^2 + \ln\left\{\left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{M^2}\right]^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma}}\right\} \Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2}\right) + \ln\left[\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}\right]^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma}}
\end{aligned}$$

$$\text{ou finalmente } \Rightarrow f \frac{(x_2 - x_1)}{D} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2}\right) + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln\left[\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}\right]$$

Estas expressões permitem relacionar os valores das variáveis para um número de Mach genérico $M_2 = M$ com os valores *críticos* das mesmas variáveis ($M_1 = 1$), assinalados com *:

$$T_0(M) = T_0^* \quad (58)$$

$$A(M) = A^* \quad (59)$$

$$\frac{T(M)}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad (60)$$

$$\frac{c(M)}{c^*} = \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2} \quad (61)$$

$$\frac{v(M)}{v^*} = M \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2} \quad \text{Nota: } v^* = c^* \quad (62)$$

$$\frac{\rho(M)}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2} \quad (63)$$

$$\frac{p(M)}{p^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2} \quad (64)$$

$$\frac{p_0(M)}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (65)$$

$$\frac{F(M)}{F^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \right) \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2} \quad (66)$$

$$\frac{s(M) - s^*}{c_p} = \ln \left\{ M^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \right\} \quad (67)$$

$$f \frac{L^*(M)}{D} = f \frac{(x^* - x)}{D} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] \quad (68)$$

x^* designa a coordenada longitudinal da secção crítica ($M = 1$); M é o número de Mach na secção genérica x . Para a distância $L^* = (x^* - x)$ do primeiro membro da última expressão ser positiva ($x^* > x$), trocou-se a sequência usada nas

expressões anteriores: a secção 2 é a secção crítica ($x_2 = x^*$) e a secção 1 tem um número de Mach genérico, $x_1 = x(M)$.

No escoamento adiabático com atrito verifica-se que a situação *limite* do escoamento é $M = 1$, tanto para valores crescentes como decrescentes de M :

- Se o escoamento começa com um número de Mach inferior a 1, o número de Mach irá aumentando ao longo da conduta até atingir o limite $M = 1$. A maior conduta possível com aquele caudal e aquelas condições de alimentação é aquela em que, no final, $M = 1$.
- Se o escoamento começa com um número de Mach superior a 1, o número de Mach reduzir-se-á ao longo da conduta aproximando-se de 1. A maior conduta possível com aquele caudal, as mesmas condições de alimentação e sem choque é aquela em que, no final, $M = 1$.

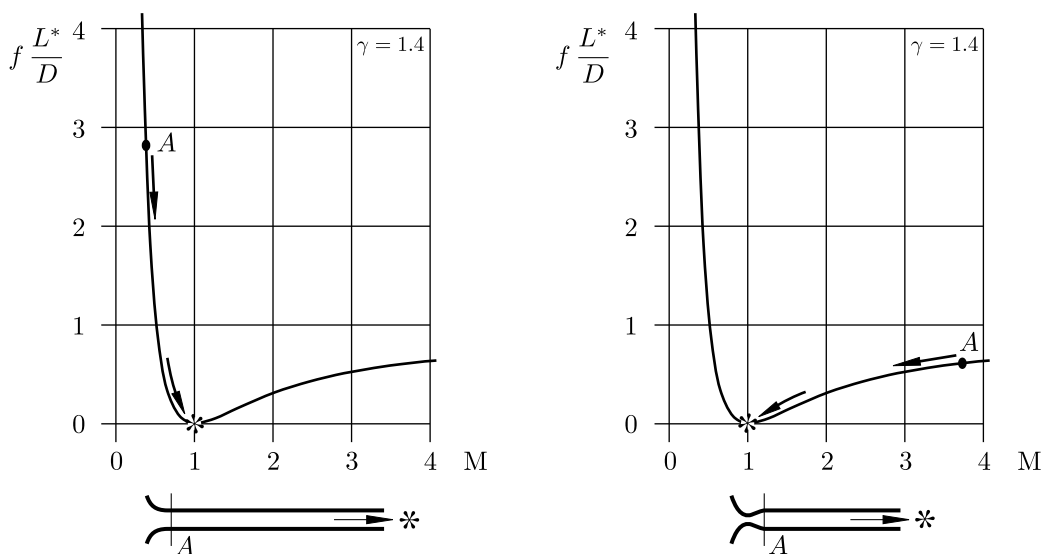


Figura 7: Distância adimensional à secção crítica, em função do número de Mach, numa conduta adiabática com atrito, para $\gamma = 1.4$. Para escoamento subsónico (à esquerda) e supersónico (à direita).

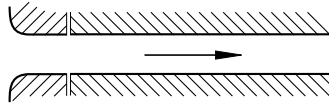
Repare-se que, sendo

$$f \frac{dx}{D} = \frac{2(1 - M^2)}{\gamma M^2 [2 + (\gamma - 1) M^2]} \frac{dM^2}{M^2},$$

para $(1 - M^2) = 0$ um acréscimo dx do comprimento da conduta provocaria uma variação $dM = \infty$.

Evolução das propriedades num escoamento adiabático com atrito em conduta de secção constante

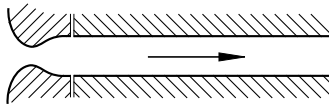
Repare-se que, em escoamento subsónico, esta conduta é uma tubeira e em supersónico é um difusor. O seguinte quadro sumariza a evolução das variáveis nos vários casos.



Escoamento subsónico:

$$M < 1$$

Igual em supersónico	M tende para 1	$dM/dx > 0$
	$dT_0/dx = 0$	$dp/dx < 0$
	$dA/dx = 0$	$dT/dx < 0$
	$ds/dx > 0$	$d\rho/dx < 0$
	$dp_0/dx < 0$	$dv/dx > 0$
	$dF/dx > 0$	$dc/dx < 0$



Escoamento supersónico:

$$M > 1$$

Igual em subsónico	M tende para 1	$dM/dx < 0$
	$dT_0/dx = 0$	$dp/dx > 0$
	$dA/dx = 0$	$dT/dx > 0$
	$ds/dx > 0$	$d\rho/dx > 0$
	$dp_0/dx < 0$	$dv/dx < 0$
	$dF/dx > 0$	$dc/dx > 0$

5 Escoamento isotérmico em condutas de secção constante, com atrito

A baixos números de Mach, o escoamento isotérmico em condutas de secção constante com atrito é muito semelhante ao escoamento adiabático no mesmo tipo de condutas, pelo que não costuma ser referido na disciplina de Mecânica dos Fluidos I. De qualquer modo, dadas as semelhanças, depois de estudar o escoamento adiabático, o estudo do escoamento isotérmico não requer praticamente nenhum esforço suplementar.

Nesta secção simplificam-se e integram-se as equações gerais da página 18 entre duas secções de uma conduta. Como anteriormente, os resultados finais aparecem em letra normal e os passos intermédios em letra mais pequena. Começamos por simplificar o sistema de equações:

Temperatura constante: $dT = 0$

Conduta de área transversal constante: $dA = 0$

Da equação (G-2): $\frac{dc}{c} = 0$

Da equação (G-3): $\frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-4): $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-1): $\frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-5): $f \frac{dx}{D} = \frac{1 - \gamma M^2}{\gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-8): $\frac{dT_0}{T_0} = \frac{(\gamma - 1)}{2 + (\gamma - 1) M^2} dM^2$

Da equação (G-9): $\frac{dp_0}{p_0} = \frac{M^2 - 2}{2 [2 + (\gamma - 1) M^2]} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-6): $\frac{dF}{F} = \frac{\gamma M^2 - 1}{2(1 + \gamma M^2)} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-10): $\frac{ds}{C_p} = \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} \frac{dM^2}{M^2}$

Estas equações diferenciais podem ser integradas³ entre duas secções, 1 e 2, da conduta:

$$\text{De } dT = 0: \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1$$

$$\text{De } dA = 0: \quad \Rightarrow \quad A_2 = A_1$$

$$\text{De } dc = 0: \quad \Rightarrow \quad c_2 = c_1$$

$$\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} = \frac{dM}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{M_2}{M_1}$$

$$\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \int_1^2 \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} = -\frac{dM}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2}$$

$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \int_1^2 \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} = -\frac{dM}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2}$$

Supondo que f seja constante entre as secções 1 e 2:

$$\begin{aligned} f \frac{x_2 - x_1}{D} &= \int_1^2 f \frac{dx}{D} = \int_1^2 \left(\frac{1 - \gamma M^2}{\gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} = \frac{1}{\gamma} \int_1^2 \frac{dM^2}{M^4} - \int_1^2 \frac{dM^2}{M^2} \\ &\Rightarrow f \frac{x_2 - x_1}{D} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + \ln\left(\frac{M_1^2}{M_2^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) &= \int_1^2 \frac{dT_0}{T_0} = \int_1^2 \frac{(\gamma - 1) dM^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} = \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)} \ln\left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}\right] \\ &\Rightarrow \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \end{aligned}$$

$$\text{De (9), } \frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{dT_0}{T_0} - \frac{dT}{T} \right), \text{ com } dT = 0:$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right) &= \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) \\ &\Rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \end{aligned}$$

$$\text{De (6), } \frac{dF}{F} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{\gamma dM^2}{1 + \gamma M^2}, \text{ com } dA = 0:$$

$$\ln\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{\gamma}{\gamma} \ln\left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_p} = \int_1^2 \frac{ds}{c_p} = \int_1^2 \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{dM^2}{M^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s_2 - s_1}{c_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

³Primitivas úteis: $\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln(a + bx)$ e $\int \frac{dx}{x(a + bx)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{a + bx}\right)$.

Num escoamento isotérmico com atrito a situação-*limite* é diferente da do escoamento adiabático com atrito. Como se viu, num escoamento isotérmico,

$$f \frac{dx}{D} = \left(\frac{1 - \gamma M^2}{\gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2}.$$

Ora, quando $(1 - \gamma M^2) \rightarrow 0$, a variação do número de Mach num comprimento infinitesimal de conduta tende para infinito: $dM/dx \rightarrow \infty$. Conclusão análoga se retira da equação da função de impulso. Portanto, o número de Mach-*limite* dos escoamentos isotérmicos é $M^{**} = \sqrt{1/\gamma}$ tanto para valores superiores como inferiores de M . Nomeadamente:

- Se o escoamento começa com um número de Mach inferior a M^{**} , o número de Mach aumenta ao longo da conduta até atingir o limite M^{**} . Alcançado esse limite, não é possível o escoamento numa conduta mais comprida, a não ser com outro caudal ou outras condições de alimentação.
- Se o escoamento começa com um número de Mach superior a M^{**} , o número de Mach reduz-se ao longo da conduta aproximando-se de M^{**} . A maior conduta possível, com aquele caudal e aquelas condições de alimentação, é a conduta para a qual, no fim, M^{**} .

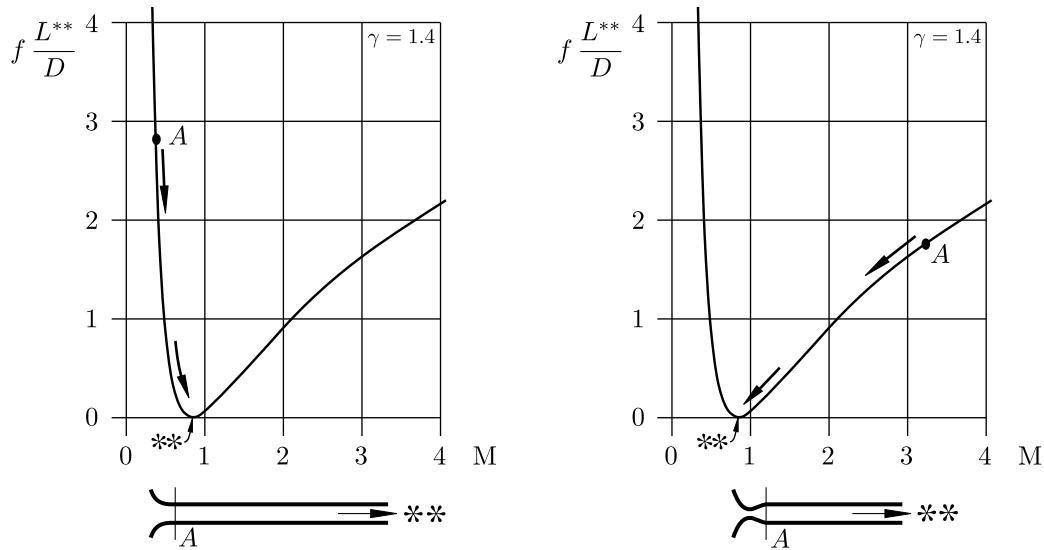


Figura 8: Distância adimensional à secção crítica, em função do número de Mach, num escoamento isotérmico com atrito, para $\gamma = 1.4$. Para escoamento subsónico (à esquerda) e supersónico (à direita).

Entende-se por que é usual chamar *condições críticas* do escoamento isotérmico, as correspondentes a $M^{**} = \sqrt{1/\gamma}$. Para evitar confusões, indicaremos estas condições críticas por dois asteriscos, $**$.

A relação entre as variáveis para o número de Mach genérico ($M_2 = M$) e para o valor crítico do escoamento isotérmico ($M_1 = M^{**} = \sqrt{1/\gamma}$) é dada pelas expressões seguintes:

$$T_0(M) = T_0^{**} \quad (69)$$

$$A(M) = A^{**} \quad (70)$$

$$c(M) = c^{**} \quad (71)$$

$$\frac{v(M)}{v^{**}} = \frac{M}{\sqrt{1/\gamma}} \quad (72)$$

$$\frac{\rho(M)}{\rho^{**}} = \frac{\sqrt{1/\gamma}}{M} \quad (73)$$

$$\frac{p(M)}{p^{**}} = \frac{\sqrt{1/\gamma}}{M} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} f \frac{L^{**}(M)}{D} = \frac{f(x^{**} - x)}{D} &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M^2} - \gamma \right) - \ln \left(\frac{1}{\gamma M^2} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma M^2} - 1 + \ln(\gamma M^2) \end{aligned} \quad (75)$$

$$\frac{T_0(M)}{T_0^{**}} = \frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{2 + (\gamma - 1)/\gamma} \quad (76)$$

$$\frac{p_0(M)}{p_0^{**}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma} M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{2 + (\gamma - 1)/\gamma} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (77)$$

$$\frac{F(M)}{F^{**}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma} M} \left(\frac{1 + \gamma M^2}{2} \right) \quad (78)$$

$$\frac{s(M) - s^{**}}{c_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln(\sqrt{\gamma} M) \quad (79)$$

Nos escoamentos adiabáticos em condutas de secção constante a temperatura varia relativamente pouco, de modo que, excepto para números de Mach elevados, os escoamentos isotérmicos não diferem muito dos escoamentos adiabáticos.

Em escoamento isotérmico em condutas de secção constante:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{M_1}{M_2}$$

Em escoamento adiabático em condutas de secção constante:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{1/2}$$

Mesmo na situação extrema em que o fluido acelere de $M = 0$ até $M = 1/\sqrt{\gamma}$, o factor $\left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{1/2}$ tem o valor de 0,935, para $\gamma = 1,4$, e portanto a relação de pressões só difere de um factor 0,935.

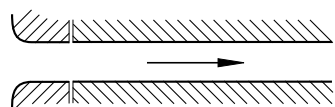
Em qualquer caso, embora as equações deduzidas para escoamento isotérmico sejam válidas a qualquer número de Mach, na prática o escoamento só se mantém isotérmico enquanto o número de Mach for muito baixo, porque, a quantidade de calor por unidade de massa, $q = C_p(T_{02} - T_{01})$, que seria necessário trocar com o exterior para manter a temperatura do fluido constante é cada vez maior à medida que o número de Mach aumenta. Por isso uma conduta comporta-se cada vez mais como adiabática, à medida que o número de Mach aumenta.

Consideremos um troço de tubo, aparentemente bom condutor, com um comprimento $L = 1$ m, um diâmetro $D = 0,1$ m e um coeficiente global de transmissão de calor $U = 100$ W/(m² K). Suponhamos que a diferença de temperatura entre o interior e o exterior do tubo é $\Delta T = 100$ K. A velocidade do fluido é $v = 300$ m/s a Mach $M = 0,5$, com massa volúmica $\rho = 1$ kg/m³, calor específico a pressão constante $C_p = 10^3$ J/(kg K) e razão de calores específicos $\gamma = 1,4$. Admitamos que o coeficiente de atrito é $f = 0,05$. O calor transmitido é $Q = (\pi D L) U \Delta T = 3,14 \times 10^3$ W, o caudal mássico é $\dot{m} = \rho v (\pi D^2/4) = 2,36$ kg/s, o calor trocado por unidade de massa é $q = 1,3 \times 10^3$ W/kg e a correspondente variação de temperatura de estagnação é apenas $q/C_p = 1,3$ K. Esta variação é muito pequena, apesar de termos admitido excelentes condições de transmissão de calor ao longo de um troço com um comprimento $L/D = 10$ relativamente grande. Repare-se que um escoamento isotérmico a $M = 0,5$ atinge condições críticas ($M^{**} = 0,85$) ao fim de uma distância adimensional $f L^{**}/D = 0,81$, ou seja, em $L/D = 16$; e um escoamento adiabático a $M = 0,5$ atinge esse número de Mach 0,85 ao fim de uma distância adimensional $f L/D = 1,0$, ou seja, em $L/D = 21$.

Este exemplo numérico mostra como a $M = 0,5$, mesmo uma conduta fina, de um metal muito condutor, com uma diferença de temperatura entre o interior e o exterior aparentemente grande, troca uma quantidade de calor muito pequena *por unidade de massa*, quase como se fosse adiabática.

Evolução das propriedades num escoamento isotérmico com atrito em conduta de secção constante

A evolução é parecida à do escoamento adiabático. Em escoamento sub-crítico ($M < \sqrt{1/\gamma}$) a conduta é uma tubeira e em super-crítico, ($M > \sqrt{1/\gamma}$) é um difusor (em escoamento adiabático o Mach crítico é 1). O seguinte quadro sumariza a evolução das variáveis.



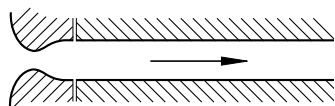
Escoamento sub-crítico:

$$M < \sqrt{1/\gamma}$$

Igual
em super-crítico

$$\left| \begin{array}{l} M \rightarrow \sqrt{1/\gamma} \\ dT/dx = 0 \\ dA/dx = 0 \\ dc/dx = 0 \\ dF/dx < 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} dM/dx > 0 \\ dp/dx < 0 \\ d\rho/dx < 0 \\ dv/dx > 0 \\ ds/dx > 0 \\ dT_0/dx > 0 \\ dp_0/dx \begin{cases} > 0; M < \sqrt{2/(\gamma+1)} \\ < 0; M > \sqrt{2/(\gamma+1)} \end{cases} \end{array} \right.$$



Escoamento super-crítico:

$$M > \sqrt{1/\gamma}$$

Igual
em sub-crítico

$$\left| \begin{array}{l} M \rightarrow \sqrt{1/\gamma} \\ dT/dx = 0 \\ dA/dx = 0 \\ dc/dx = 0 \\ dF/dx < 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} dM/dx < 0 \\ dp/dx > 0 \\ d\rho/dx > 0 \\ dv/dx < 0 \\ ds/dx < 0 \\ dT_0/dx < 0 \\ dp_0/dx \begin{cases} < 0; M < \sqrt{2/(\gamma+1)} \\ > 0; M > \sqrt{2/(\gamma+1)} \end{cases} \end{array} \right.$$

Em sub-crítico o fluido *recebe calor*, embora a temperatura se mantenha; e em super-crítico *perde calor*, embora a temperatura se mantenha.

6 Escoamento com transmissão de calor em condutas de secção constante, sem atrito

Nesta secção simplificam-se e integram-se as equações gerais, da página 18, ao longo de um troço de conduta de secção constante, sem atrito, com transmissão de calor. Como anteriormente, os resultados finais aparecem em letra normal e os passos intermédios em letra mais pequena. Começemos por simplificar as equações gerais:

Por não haver forças aplicadas: $dF = 0$

Por não haver atrito: $f = 0$

Conduta de área transversal constante: $dA = 0$

Da equação (G-6): $\frac{dp}{p} = \left(\frac{-\gamma}{1 + \gamma M^2} \right) dM^2$

Da equação (G-5): $\frac{dv}{v} = \left(\frac{1}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-4): $\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{-1}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-3): $\frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-2): $\frac{dT}{T} = \left(\frac{1 - \gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-8): $\frac{dT_0}{T_0} = \left(\frac{1 - \gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} + \left[\frac{(\gamma - 1)}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right] dM^2$
 $\Rightarrow \frac{dT_0}{T_0} = \frac{2(1 - M^2)}{(1 + \gamma M^2)[2 + (\gamma - 1) M^2]} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-7-b), substituindo dT_0/T_0 : $\frac{d(q+w)}{c_p T} = \frac{1 - M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-9), substituindo $\frac{dp}{p}$: $\frac{dp_0}{p_0} = \frac{-\gamma}{1 + \gamma M^2} dM^2 + \frac{\gamma}{2 + (\gamma - 1) M^2} dM^2$
 $\Rightarrow \frac{dp_0}{p_0} = \frac{\gamma(M^2 - 1)}{(1 + \gamma M^2)[2 + (\gamma - 1) M^2]} \frac{dM^2}{M^2}$

Da equação (G-10), substituindo $\frac{dp}{p}$ e $\frac{dT}{T}$: $\frac{ds}{C_p} = \left(\frac{1 - M^2}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2}$

=====

Estas equações diferenciais podem ser integradas entre duas secções, 1 e 2:

$$\text{De } dA = 0: \quad A_2 - A_1 = 0$$

$$\text{De } f = 0 \quad \frac{f(x_2 - x_1)}{D} = 0$$

$$\text{De } \frac{dv}{v} = \left(\frac{1}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} :$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) &= \ln \left(\frac{M^2}{1 + \gamma M^2} \right) \Big|_1^2 = \ln \left(\frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \left[\frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{De } \frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{-1}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} :$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) &= - \ln \left(\frac{M^2}{1 + \gamma M^2} \right) \Big|_1^2 = \ln \left(\frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[\frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{De } \frac{dp}{p} = \left(\frac{-\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dM^2}{M^2} :$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) &= -\gamma \frac{1}{\gamma} \ln (1 + \gamma M^2) \Big|_1^2 = \ln \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \end{aligned}$$

$$\text{De } \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} :$$

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

substituindo p_2/p_1 e ρ_2/ρ_1 :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) &= \ln\left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right) + \ln\left(\frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right) \\ &= \ln\left[\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)^2\right] \\ \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{De } \frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T} &\Rightarrow \ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) \\ &\Rightarrow \frac{c_2}{c_1} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)\end{aligned}$$

$$\text{De } dF = 0 \Rightarrow F_2 = F_1$$

$$\begin{aligned}\text{de } \frac{ds}{c_p} &= \left(\frac{1-M^2}{1+\gamma M^2}\right) \frac{dM^2}{M^2} \\ \Rightarrow \left(\frac{s_2-s_1}{c_p}\right) &= \int_1^2 \frac{dM^2}{M^2(1+\gamma M^2)} - \int_1^2 \frac{dM^2}{1+\gamma M^2} \\ &= \ln\left(\frac{M^2}{1+\gamma M^2}\right) \Big|_1^2 - \frac{1}{\gamma} \ln(1+\gamma M^2) \Big|_1^2 \\ &= \ln\left[\frac{M^2}{1+\gamma M^2} (1+\gamma M^2)^{-1/\gamma}\right] \Big|_1^2 \\ &= \ln\left[\frac{M_2^2}{M_1^2} \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]\end{aligned}$$

$$\text{De } \frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \left[\frac{(\gamma-1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}\right] \frac{dM^2}{M^2} :$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) &= \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + (\gamma-1) \int_1^2 \frac{dM^2}{2+(\gamma-1)M^2} \\ \ln\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) &= \ln\left[\frac{M_2^2}{M_1^2} \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)^2\right] + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma-1)} \ln[2+(\gamma-1)M^2] \Big|_1^2 \\ &= \ln\left[\frac{M_2^2}{M_1^2} \left(\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}\right)^2 \left(\frac{2+(\gamma-1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right)$$

De $\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \left[\frac{dT_0}{T_0} - \frac{dT}{T} \right]$, aproveitando a integração anterior

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right) &= \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) + \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \ln \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right] \\ &= \ln \left[\left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

As relações entre as diversas variáveis a um dado número de Mach M e os valores críticos (assinalados com *) obtêm-se como caso particular dos resultados anteriores substituindo $M_2 = M$ e $M_1 = 1$:

$$A(M) = A^* \quad (80)$$

$$f \frac{x(M) - x^*}{D} = 0 \quad (81)$$

$$\frac{v(M)}{v^*} = M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right) \quad (82)$$

$$\frac{\rho(M)}{\rho^*} = \frac{1}{M^2} \left(\frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \right) \quad (83)$$

$$\frac{p(M)}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \quad (84)$$

$$\frac{T(M)}{T^*} = M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2 \quad (85)$$

$$\frac{c(M)}{c^*} = M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right) \quad (86)$$

$$F(M) = F^* \quad (87)$$

$$\frac{s(M) - s^*}{c_p} = \ln \left[M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma^8}} \right] \quad (88)$$

$$\frac{T_0(M)}{T_0^*} = M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2 \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right] \quad (89)$$

$$= \left(\frac{M}{1 + \gamma M^2} \right)^2 (1 + \gamma) [2 + (\gamma - 1) M^2] \quad (90)$$

$$\frac{p_0(M)}{p_0^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (91)$$

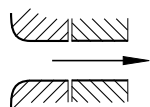
Evolução das propriedades num escoamento com transmissão de calor, sem atrito nem variação de secção

Os quadros desta página e da página seguinte sumarizam a evolução das variáveis.

Calor fornecido ao escoamento

M tende para 1

$$\begin{aligned} q &> 0 \\ dT_0/dx &> 0 \\ ds/dx &> 0 \\ dp_0/dx &< 0 \\ dA/dx &= 0 \\ dF/dx &= 0 \end{aligned}$$

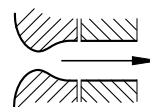


Escoamento subsónico

$$\begin{aligned} dM/dx &> 0 \\ dp/dx &< 0 \\ d\rho/dx &< 0 \\ dv/dx &> 0 \end{aligned}$$

$$M < \sqrt{1/\gamma} : \begin{cases} dT/dx > 0 \\ dc/dx > 0 \end{cases}$$

$$M > \sqrt{1/\gamma} : \begin{cases} dT/dx < 0 \\ dc/dx < 0 \end{cases}$$



Escoamento supersónico

$$\begin{aligned} dM/dx &< 0 \\ dp/dx &> 0 \\ d\rho/dx &> 0 \\ dv/dx &< 0 \end{aligned}$$

$$dT/dx > 0$$

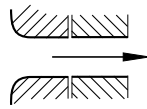
$$dc/dx > 0$$

Em muitos casos, a potência térmica por unidade de massa que é preciso fornecer ou extrair ao escoamento para a troca de calor ser importante é tão grande que nem sempre é tecnicamente viável realizá-la. A combustão permite atingir potências de aquecimento muito elevadas, mas as potências de arrefecimento estão bastante limitadas pela diferença de temperaturas e pela resistência térmica.

Calor extraído ao escoamento

M afasta-se de 1

$$\begin{aligned} q &< 0 \\ dT_0/dx &< 0 \\ ds/dx &< 0 \\ dp_0/dx &> 0 \\ dA/dx &= 0 \\ dF/dx &= 0 \end{aligned}$$

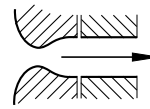


Escoamento subsónico

$$\begin{aligned} dM/dx &< 0 \\ dp/dx &> 0 \\ d\rho/dx &> 0 \\ dv/dx &< 0 \end{aligned}$$

$$M < \sqrt{1/\gamma} : \begin{cases} dT/dx < 0 \\ dc/dx < 0 \end{cases}$$

$$M > \sqrt{1/\gamma} : \begin{cases} dT/dx > 0 \\ dc/dx > 0 \end{cases}$$



Escoamento supersónico

$$\begin{aligned} dM/dx &> 0 \\ dp/dx &< 0 \\ d\rho/dx &< 0 \\ dv/dx &> 0 \end{aligned}$$

$$dT/dx < 0$$

$$dc/dx < 0$$

Repare-se que, em escoamento subsónico, a adição de calor *acelera* o fluido; em escoamento supersónico *reduz* a velocidade. Para $\sqrt{1/\gamma} < M < 1$, em subsónico o aquecimento *diminui* a temperatura do fluido, em supersónico o arrefecimento *aumenta* a temperatura do fluido.

Os títulos desta secção referem-se a calor trocado, mas as conclusões mantêm-se se o escoamento trocar trabalho em vez de calor (w em vez de q), desde que a força resultante continue a ser nula, para não haver variação da função de impulso. Só com esta condição é que estas equações se aplicam entre as secções de entrada e de saída de um compressor ou de uma turbina. Obviamente, dentro da turbomáquina o escoamento passa por significativas variações de área e uma análise unidimensional deste tipo não se aplica.

7 Ondas de choque

Em certas circunstâncias que analisaremos a seguir, dá-se uma variação brusca das propriedades do fluido e o escoamento passa directamente de supersónico a subsónico. Esta quase descontinuidade denomina-se *onda de choque*. Experimentalmente (por fotografia SCHLIEREN), verifica-se que a variação de propriedades a que chamamos onda de choque se dá ao longo de uma distância da ordem de $0,1 \mu$ comparável, portanto, ao percurso livre médio das moléculas do gás. O facto de as ondas de choque possuírem uma espessura tão pequena justifica as seguintes simplificações fundamentais do modelo que se apresentará:

1. Escoamento *adiabático* (não há troca de calor q nem de trabalho w):
$$d(q + w) = 0;$$
2. Sem forças exteriores aplicadas, isto é, com *função de impulso constante* (esta simplificação restringe o modelo às ondas de choque estacionárias):
$$f dx/D = 0 \quad \text{ou} \quad dF = 0;$$
3. Sem variação de área transversal ao longo da espessura da onda de choque:
$$dA = 0.$$

Mesmo que a conduta seja um cone muito aberto, que as potências térmicas por unidade de área sejam enormes, ou que as forças por unidade de área sejam muito grandes, o argumento para estas simplificações é considerar que a distância entre as duas secções é tão pequena ($x_2 - x_1 \approx 0$) que elas têm a mesma área, a força de atrito no espaço entre elas é nula e o calor trocado entre elas também é nula.

Embora, muitas vezes, as ondas de choque sejam oblíquas em relação ao escoamento trataremos apenas o caso de ondas de choque planas unidimensionais, perpendiculares ao escoamento. A generalização para o caso de ondas oblíquas não é, aliás, difícil, pelo menos em primeira aproximação.

A verificação das condições 1 e 3 corresponde a um escoamento adiabático numa conduta de secção constante. A representação destes estados termodinâmicos, por exemplo num diagrama T-s, designa-se por LINHA DE FANNO. As condições 2 e 3 verificam-se num escoamento sem atrito numa conduta de secção constante. A respectiva representação, por exemplo num diagrama T-s, denomina-se LINHA DE RAYLEIGH. A onda de choque dá-se entre os pontos de intercepção das linhas de FANNO e de RAYLEIGH.

Sem entrar na discussão do que se passa *dentro* da onda de choque, consideremos as duas secções transversais 1 e 2 que a limitam, representadas na Figura 9.

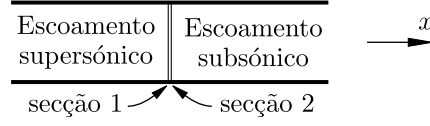


Figura 9: Volume de controlo entre duas secções que enquadram uma onda de choque. À esquerda o escoamento supersónico e à direita é subsónico.

7.1 Escoamento adiabático com secção constante: linha de Fanno $[d(q + w) = 0; dA = 0]$

Apliquemos as restrições de Fanno às equações gerais da página 18:

Escoamento adiabático: $d(q + w) = 0$

Da equação (G-7.b): $dT_0 = 0$

Conduta de área transversal constante: $dA = 0$

Da equação (G-8): $\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma - 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} dM^2$

Da equação (G-2): $\frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$

Da equação (G-3): $\frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{dM^2}{M^2} + \frac{dT}{T} \right)$

Da equação (G-4) com $dA = 0$: $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dM^2}{M^2} + \frac{dT}{T} \right)$

Da equação (G-1), $\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$: $\frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$

Substituindo $\frac{dT}{T}$: $\frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} - \frac{\gamma - 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} dM^2$

Integrando entre as duas secções ⁴: $\ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{M_2^2}{M_1^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]$.

Aplicando o operador exponencial e rearranjando, obtém-se a relação de pressões correspondente à linha de Fanno:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \right]^{1/2} \left(\frac{M_1}{M_2} \right). \quad (92)$$

⁴Primitiva útil: $\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln(a + bx)$.

**7.2 Escoamento sem atrito e secção constante:
linha de Rayleigh** $[dF = 0; dA = 0]$

Apliquemos agora as restrições de Rayleigh às equações gerais da página 18:

Por não haver forças aplicadas: $dF = 0$

Conduta de área transversal constante: $dA = 0$

Da equação (G-6): $\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma}{1 + \gamma M^2} dM^2$

Integrando entre as duas secções, como antes: $\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -\ln\left[\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right]$.

Obtém-se assim a relação de pressões para uma evolução de Rayleigh:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right) \quad (93)$$

7.3 Onda de choque $[d(q + w) = 0; dF = 0; dA = 0]$

Impondo simultaneamente as condições de Fanno e de Rayleigh, (92) e (93), obtém-se a equação a que deve obedecer uma onda de choque:

$$\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right]^{1/2} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right)$$

Resolvendo esta equação em ordem a M_2^2 chega-se às seguintes duas soluções (ver demonstração na página 51):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2^2 = M_1^2 \\ M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \end{array} \right. \quad (94)$$

A primeira solução é trivial e apenas indica que as condições podem ser idênticas nas secções 1 e 2 ...não havendo onda de choque entre essas secções. A segunda solução é a que indica a relação entre os estados antes e depois da onda de choque, no caso de ela se dar.

Nota: As expressões (94) referem-se a M_1^2 e M_2^2 , mas como os números de Mach são razões entre módulos são intrinsecamente positivos. Portanto, o sistema (94) não se desdobra em soluções negativas.

$$\text{Soluções da equação } \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \right]^{1/2} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)$$

Esta equação é do segundo grau em M_2^2 (e em M_1^2) e resolve-se pelo método habitual, uma vez reduzida à forma canónica.

Elevando ao quadrado e multiplicando pelos denominadores fica:

$$M_1^2 [2 + (\gamma - 1) M_1^2] (1 + \gamma M_2^2)^2 = M_2^2 [2 + (\gamma - 1) M_2^2] (1 + \gamma M_1^2)^2$$

Com o objectivo de pôr em evidência M_2^2 e M_2^4 tem-se, sucessivamente:

$$[2M_1^2 + (\gamma - 1)M_1^4] (1 + 2\gamma M_2^2 + \gamma^2 M_2^4) = 2(1 + \gamma M_1^2)^2 M_2^2 + (\gamma - 1)(1 + \gamma M_1^2)^2 M_2^4$$

$$\begin{aligned} [2M_1^2 + (\gamma - 1)M_1^4] + \{2\gamma [2M_1^2 + (\gamma - 1)M_1^4] - 2(1 + \gamma M_1^2)^2\} M_2^2 + \\ + \{\gamma^2 [2M_1^2 + (\gamma - 1)M_1^4] - (\gamma - 1)(1 + \gamma M_1^2)^2\} M_2^4 = 0 \end{aligned}$$

que é uma equação algébrica de segundo grau (em M_2^2) na forma $aM_2^4 + bM_2^2 + c = 0$, sendo:

$$\begin{aligned} a &= \gamma^2 [2M_1^2 + (\gamma - 1)M_1^4] - (\gamma - 1)(1 + \gamma M_1^2)^2 \\ &= 2\gamma^2 M_1^2 + \gamma^2(\gamma - 1)M_1^4 - (\gamma - 1)(1 + 2\gamma M_1^2 + \gamma^2 M_1^4) = 2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1) \\ b &= 2\gamma [2M_1^2 + (\gamma - 1)M_1^4] - 2(1 + \gamma M_1^2)^2 = 4\gamma M_1^2 + 2\gamma^2 M_1^4 - 2\gamma M_1^4 - 2 - 4\gamma M_1^2 - 2\gamma^2 M_1^4 \\ &= -2\gamma M_1^4 - 2 \\ c &= 2M_1^2 + (\gamma - 1)M_1^4 \end{aligned}$$

As soluções de uma equação do segundo grau são $M_2^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, em que o discriminante se pode desenvolver:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (2\gamma M_1^4 + 2)^2 - 4 [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)] [2M_1^2 + (\gamma - 1)M_1^4] \\ &= 4\gamma^2 M_1^8 + 8\gamma M_1^4 + 4 - 16\gamma M_1^4 + 8(\gamma - 1)M_1^2 - 8\gamma(\gamma - 1)M_1^6 + 4(\gamma - 1)^2 M_1^4 \\ &= 4 [\gamma^2 M_1^8 + (\gamma - 1)^2 M_1^4 + 1 - 2\gamma(\gamma - 1)M_1^6 + 2(\gamma - 1)M_1^2 - 8\gamma M_1^4] \\ &= 4 [\gamma M_1^4 - (\gamma - 1)M_1^2 - 1]^2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} M_2^2 &= \frac{2\gamma M_1^4 + 2 \pm \sqrt{4[\gamma M_1^4 - (\gamma - 1)M_1^2 - 1]^2}}{2 [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)]} = \frac{\gamma M_1^4 + 1 \pm [\gamma M_1^4 - (\gamma - 1)M_1^2 - 1]}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \\ M_2^2 &= \begin{cases} \frac{\gamma M_1^4 + 1 + \gamma M_1^4 - (\gamma - 1)M_1^2 - 1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} = M_1^2 \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} = M_1^2 \\ \frac{\gamma M_1^4 + 1 - \gamma M_1^4 - (\gamma - 1)M_1^2 - 1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \end{cases} \end{aligned}$$

Obviamente também se tem:

$$M_1^2 = \begin{cases} M_2^2 \\ \frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2\gamma M_2^2 - (\gamma - 1)} \end{cases}$$

A partir da relação (94) entre os números de Mach antes e depois da onda de choque podem determinar-se com relativa facilidade as relações entre as propriedades termodinâmicas a montante e a jusante de uma onda de choque:

Equação (93) (sem atrito e secção constante):
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

Escoamento adiabático:
$$T_{02} = T_{01}$$

Integrando a equação (G-8) de Fanno (pág. 49):
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}$$

Da equação de estado:
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}$$

Da conservação de massa em condutas de secção constante:
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Da velocidade do som para gases perfeitos:
$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Integrando a equação (G-9) em escoamento adiabático (com $dT_0 = 0$), vem:

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}}$$

Integrando a equação (G-10) da entropia:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{s_2 - s_1}{c_p} = \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]$$

Para facilitar alguns cálculos apresentam-se a seguir estas equações eliminando M_2 , de modo a obter expressões explícitas em M_1 .

7.4 Sinopse de equações para ondas de choque

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (95)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (96)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][2 + (\gamma - 1) M_1^2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad (97)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)^2 M_1^2}{[2 + (\gamma - 1) M_1^2]} \quad (98)$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{[2 + (\gamma - 1) M_1^2]}{(\gamma + 1) M_1^2} \quad (99)$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{T_2/T_1} = \left\{ \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][2 + (\gamma - 1) M_1^2]}{(\gamma + 1) M_1^2} \right\}^{1/2} \quad (100)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(\gamma + 1)^2 M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{(\gamma + 1)}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (101)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_p} = \ln \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \right] + \frac{1}{\gamma} \ln \left[\frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right] \quad (102)$$

$$F_2 = F_1 \quad (103)$$

$$T_{01} = T_{01} \quad (104)$$

$$A_2 = A_1 \quad (105)$$

$$(x_2 - x_1) \approx 0 \quad (106)$$

O segundo princípio da termodinâmica impõe que $s_2 \geq s_1$ (por o processo ser adiabático). Isso implica as seguintes desigualdades:

$$M_1 \geq 1, \quad M_2 \leq 1.$$

Por outras palavras, só há ondas de choque frontais de escoamento supersónico ($M_1 > 1$) para subsónico ($M_2 > 1$).

7.5 Intensidade de uma onda de choque

Define-se a intensidade P da onda de choque como a variação de pressão estática adimensionalizada pela pressão estática antes da onda:

$$P = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \quad (107)$$

$$P = \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} - 1 \quad \text{donde:}$$

$$P = \frac{2\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1} \quad (108)$$

Para um choque de intensidade infinitesimal $P \rightarrow 0$, $M_1^2 \rightarrow 1$ e $(s_2 - s_1) \rightarrow 0$. Isto é, um choque de intensidade infinitesimal é isentrópico e idêntico a uma onda acústica.

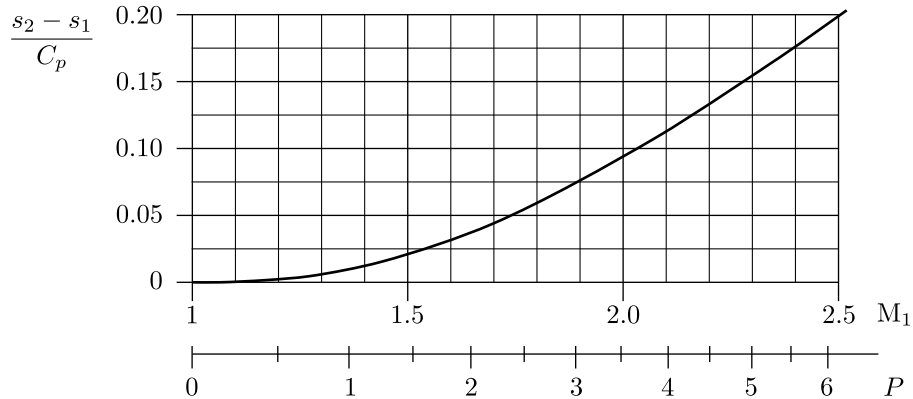


Figura 10: Variação de entropia de uma onda de choque em função da sua intensidade.

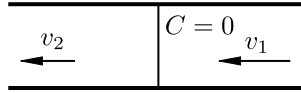
7.6 Velocidade de propagação das ondas de choque

Na análise anterior considerou-se apenas ondas de choque estacionárias mas, mediante uma mudança de referencial, é possível estender o estudo a ondas de choque que se propagam com velocidade constante num meio em repouso. Seja C a celeridade da onda em cada referencial.

A onda móvel desloca-se no referencial do fluido em repouso com uma celeridade

$$C = v_1,$$

Referencial da onda
(onda estacionária)



Referencial do
meio em repouso
(onda móvel)

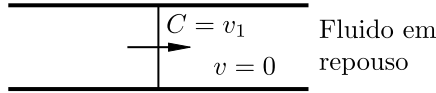


Figura 11: Em cima, onda de choque no referencial da onda (onda estacionária); em baixo, onda de choque no referencial do meio em repouso (onda móvel).

sendo v_1 e v_2 as velocidades antes e depois da onda de choque no referencial da própria onda. Por definição do número de Mach, $C = v_1 = M_1 c_1$, e isolando M_1 na expressão (108),

$$\frac{C}{c_1} = \left[\frac{P(\gamma + 1)}{2\gamma} + 1 \right]^{1/2}. \quad (109)$$

Uma onda de intensidade infinitesimal propaga-se com a velocidade do som c_1 no fluido em repouso e uma onda de pressão de intensidade superior propaga-se com uma celeridade C maior.

A análise anterior, representada graficamente na figura seguinte, mostra que uma onda de pressão se desloca a uma velocidade superior à velocidade do som ($C/c_1 \geq 1$). No limite de uma intensidade P infinitesimal (nesse caso a onda de pressão seria uma onda acústica) a onda de pressão desloca-se, como já se disse, à velocidade do som.

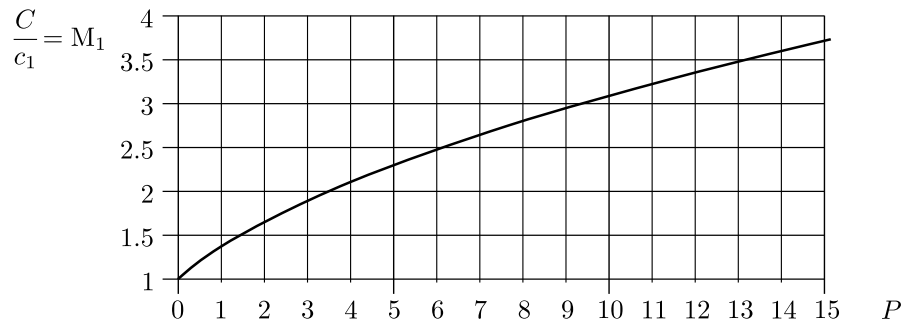


Figura 12: Velocidade de uma onda de choque num meio em repouso, em função da sua intensidade.

8 Perguntas de revisão e desenvolvimento

Os primeiros 12 problemas contêm soluções detalhadas e comentadas. Para facilitar ao leitor a confirmação dos próprios cálculos, apresentam-se resultados com muitos algarismos: obviamente só os primeiros terão real significado, dependendo não apenas dos arredondamentos aritméticos como das simplificações da modelação e do rigor dos dados de que se parte.

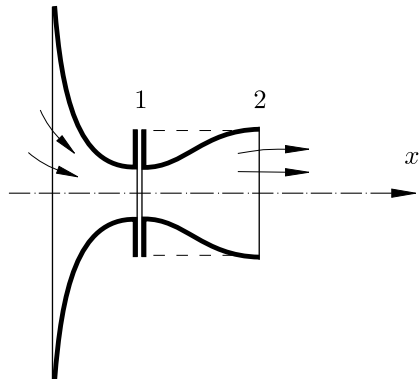
1. Acelerando o fluido a partir de um reservatório com determinada pressão e temperatura, qual a velocidade máxima que ele pode atingir, se a evolução for adiabática, sem trocas de calor ou de trabalho?

Solução: O facto de existir um mínimo para a entalpia específica, à temperatura absoluta de 0 K, mostra que existe um máximo para a energia cinética específica, num escoamento adiabático. Para determinada entalpia específica de estagnação, a velocidade será máxima quando a entalpia específica for mínima:

$$h_0 = \left(h_{min} + \frac{v_{max}^2}{2} \right); \quad \text{sendo } h_{min} = 0, \text{ conclui-se que } v_{max} = \sqrt{2h_0}.$$

Nesta condição limite, toda a entalpia (toda a energia interna e toda a energia potencial de pressão) se transformou em energia cinética.

2. Um depósito pressurizado descarrega ar para a atmosfera através de uma tubeira convergente-divergente, representada na Figura 13. O escoamento é crítico na garganta (secção 1) e supersónico à saída (secção 2). Pretende-se: (a) a pressão do depósito, (b) a temperatura do ar à saída, e (c) a força exercida pelo escoamento sobre a expansão (peça entre as secção 1 e 2).



Dados:

$$A_1 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_2 = 10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

temperatura no depósito: 293 K

$$p_2 = p_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$$

Figura 13: A peça da direita é um tubeira supersónica (conduta divergente).

Solução:

O escoamento é crítico em 1 pelo que A_1 é a área crítica. Num escoamento isentrópico a área crítica é a mesma, pelo que a relação de áreas em 2 é:

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{10^{-2}}{5 \times 10^{-3}} = 2$$

Das equações do escoamento isentrópico (cf: gráfico) resulta que $M_2 = 2,20$ (escoamento supersónico com $A_2/A^* = 2$).

Nota: Repare-se que também existe um escoamento subsónico para a mesma relação de áreas. O número de Mach correspondente é 0,306.

Das equações do escoamento isentrópico tira-se, para $M = 2,197$:

$$\frac{p_2}{p_0} = 0,09393, \quad \frac{T_2}{T_0} = 0,5088, \quad \frac{\rho_2}{\rho_0} = 0,1846, \quad \frac{F_2}{F^*} = 1,150.$$

Como $p_2 = 10^5$ Pa, a pressão no depósito (que é a pressão de estagnação isentrópica) é:

$$p_0 = \frac{10^5}{0,09393} = 1,065 \times 10^6 \text{ Pa} \quad (\text{cerca de 11 atmosferas}).$$

Como a temperatura no depósito é a temperatura de estagnação ($T_0 = 293$ K), vem: $T_2 = 0,5088 \times 293 = 149,1$ K ($\equiv -124$ °C!).

Pode calcular-se a massa volúmica no depósito a partir da equação de estado:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{1,065 \times 10^6}{287 \times 293} = 12,66 \text{ kg/m}^3.$$

Da relação de massas volúmicas: $\rho_2 = 0,1846 \times 12,66 = 2,337 \text{ kg/m}^3$.

Da temperatura em 2 pode determinar-se a velocidade do som nessa secção:

$$C_2 = \sqrt{\gamma RT_2} = 244,8 \text{ m/s}$$

e, como se conhece o número de Mach, pode calcular-se a velocidade:

$$v_2 = M_2 c_2 = 2,197 \times 244,8 = 537,8 \text{ m/s}.$$

Neste momento são conhecidas todas as variáveis necessárias para calcular a função de impulso na secção 2:

$$F_2 = (p_2 + \rho_2 v_2^2) A_2 = (10^5 + 2,337 \times 537,8^2) \times 10^{-2} = 7,773 \times 10^3 \text{ N}.$$

Da relação F_2/F^* , calculada acima, pode calcular-se a função de impulso em 1:

$$F_1 = F^* = \frac{F_2}{F_2/F^*} = \frac{7,773 \times 10^3}{1,150} = 6,749 \times 10^3 \text{ N}.$$

A força exercida sobre o escoamento entre as secções 1 e 2 é $F_x = F_2 - F_1 = 1010$ N. A força que o fluido exerce sobre a superfície interna da tubeira é a reacção, simétrica de F_x : -1010 N. Se a flange tiver uma dimensão idêntica à da tubeira, como na Figura 13, a resultante devida à pressão atmosférica na superfície *exterior* teria uma componente segundo x nula. Nesse caso, a força de encosto das flanges seria de 1010 N.

Nota sobre a resolução das equações: A primeira equação utilizada no exemplo anterior foi (56), que é explícita para calcular $A(M)/A^*$ e implícita para calcular M . Neste caso, eram dados $A/A^* = 2,0$ e $\gamma = 1,4$; a incógnita era M . Um primeiro passo para resolver este tipo de equação implícita é consultar o respectivo gráfico. Concluir-se-ia que existem duas soluções, $M \sim 0,3$ e $M \sim 2,2$. Como, o enunciado afirma que o escoamento é supersónico, só interessaria a solução $M \sim 2,2$. Vem

a propósito dizer que a tarefa mais importante na resolução dos problemas de escoamento compressível é identificar todas as possíveis soluções e averiguar qual se aplica em cada caso.

O segundo passo é refinar a solução por aproximações sucessivas para obter mais algarismos significativos. Pode usar-se, por exemplo, o método da *regula falsi* ou da falsa posição. A equação (56), substituindo $\gamma = 1,4$, era:

$$\frac{A}{A^*} = 2 = \frac{1}{M} \left(\frac{2 + 0,4 M^2}{2,4} \right)^3$$

Primeira iteração:

$$\text{Para } M = 2,15 \longrightarrow A/A^* = 1,9185$$

$$M = 2,25 \longrightarrow A/A^* = 2,0964$$

Por interpolação linear, para $A/A^* = 2,0 \longrightarrow M = 2,196$.

Segunda iteração:

$$\text{Para } M = 2,19 \longrightarrow A/A^* = 1,9873$$

$$M = 2,20 \longrightarrow A/A^* = 2,0050$$

Por interpolação linear, para $A/A^* = 2,0 \longrightarrow M = 2,19719$.

A solução era $M = 2,197198$, ou seja, $M \simeq 2,20$.

Como é obvio, é possível otimizar largamente o método numérico empregue. Também se pode recorrer a gráficos mais precisos ou a tabelas. No entanto, os gráficos e tabelas mais comuns foram elaborados para $\gamma = 1,4$ pelo que, para outros de γ , é indispensável empregar as equações, servindo os gráficos ou as tabelas apenas como aproximação qualitativa.

As outras equações que apareciam no exemplo anterior eram de resolução explícita. Nomeadamente, dado $M = 2,20$ e $\gamma = 1,4$:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{2 + (\gamma - 1)M^2} = 0,508; \quad \frac{p}{p_0} = \left[\frac{2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0,0935; \text{ etc.}$$

- Retome-se a tubeira convergente-divergente do exemplo anterior, mas com uma pressão no depósito mais pequena, $1,038 \times 10^5$ Pa, para a mesma pressão exterior de 10^5 Pa. Pretende-se estimar a velocidade do ar nas secções 1 e 2, a temperatura do ar à saída, e a força exercida pelo escoamento sobre a conduta divergente (peça entre as secção 1 e 2) considerando o fluido (I) incompressível e considerando-o (II) compressível. De acordo com a equação de estado, no depósito: $\rho = p_0/(RT_0) = 1,19 \text{ kg/m}^3$.

Solução:

I Cálculo para escoamento incompressível

Se o fluido for incompressível ($\rho_2 = \rho_0$), pode estabelecer-se a equação de Bernoulli entre um ponto no depósito e um ponto da secção 2, ao longo de uma linha de corrente. Omitindo o termo geopotencial,

$$p_0 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2, \quad \text{donde } v_2 = 80 \text{ m/s.}$$

Pela equação da continuidade $v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} = 160$ m/s. Ter-se-ia pois:

$$\begin{aligned} T_0 &= T_1 = T_2 = 293 \text{ K} && \text{(a temperatura não depende do escoamento)} \\ \rho_0 &= \rho_1 = \rho_2 = 1,19 \text{ kg/m}^{-3} \\ p_1 &= p_0 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = 8,857 \times 10^4 \text{ Pa} \end{aligned}$$

II Cálculo para escoamento compressível isentrópico

À saída, a relação de pressões é: $\frac{p_2}{p_0} = \frac{10^5}{1,038 \times 10^5} = 0,963$. Portanto, pelas equações do escoamento isentrópico (cf. também o respectivo gráfico): $M_2 = 0,231$.

Das equações do escoamento isentrópico, para este número de Mach: $T_2/T_0 = 0,989$.
 Onde: $T_2 = 0,989 \times 293 = 290$ K.

A velocidade do som à saída é: $c_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = 341$ m/s.

A velocidade do fluido à saída é: $v_2 = M_2 c_2 = 0,231 \times 341 = 78,8$ m/s (em incompressível: 80 m/s).

Das equações do escoamento isentrópico para $M = 0,231$: $\frac{A_2}{A^*} = 2,587$.

Como $A_1 = 0,5 A_2$: $A_1/A^* = 1,293$.

Para esta relação de áreas: $M_1 = 0,526$.

Para este número de Mach: $T_1/T_0 = 0,948$, donde: $T_1 = 278$ K. A velocidade acústica na garganta é: $c_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = 334$ m/s. A velocidade do ar na garganta é: $v_1 = M_1 c_1 = 0,526 \times 334 = 176$ m/s (em incompressível: 160 m/s).

Para confirmar os resultados anteriores pode calcular-se o caudal mássico em 1 e em 2.

De $M_1 = 0,526 \Rightarrow \rho_1/\rho_0 = 0,874 \Rightarrow \rho_1 = 0,874 \times 1,19 = 1,04$ kg/m⁻³

De $M_2 = 0,231 \Rightarrow \rho_2/\rho_0 = 0,974 \Rightarrow \rho_2 = 0,974 \times 1,19 = 1,16$ kg/m⁻³

Caudal mássico na garganta: $\dot{m}_1 = \rho_1 v_1 A_1 = 1,04 \times 176 \times 5 \times 10^{-3} = 0,915$ kg/s;

Caudal mássico à saída: $\dot{m}_2 = \rho_2 v_2 A_2 = 1,16 \times 78,8 \times 10^{-2} = 0,914$ kg/s.

Portanto, $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$, dentro da precisão dos cálculos.

Se o escoamento fosse incompressível: $\dot{m} = \rho v_2 A_2 = 1,19 \times 80 \times 10^{-2} = 0,951$ kg/s.

4. Compare a razão entre a pressão de estagnação e a pressão estática no modelo de escoamento incompressível sem dissipação de energia nem diferenças de cota (equação de Bernoulli sem diferenças de cota) e no modelo de escoamento isentrópico de gás perfeito. Sugerem-se os seguintes passos:
 - (a) Escreva a razão de pressão para escoamento isentrópico de gás perfeito, em função do número de Mach e da razão de calores específicos.
 - (b) Expanda essa função em série.
 - (c) Escreva a equação de Bernoulli na forma de quociente entre a pressão de estagnação e a pressão estática.
 - (d) Utilize a equação de estado dos gases perfeitos para eliminar a massa volúmica na equação de Bernoulli e exprimir o quociente entre a pressão de estagnação e a pressão estática em função da temperatura absoluta. Expresse essa temperatura em função da velocidade do som num gás perfeito ($c = \sqrt{\gamma R T}$).

Solução:

A expansão em série da razão de pressões em escoamento isentrópico de gás perfeito dá ⁵:

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \dots \right). \quad (110)$$

Segundo a equação de Bernoulli, a mesma razão de pressões dá ⁶:

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{p} v^2 = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2. \quad (111)$$

Conclui-se que é legítimo utilizar a equação de Bernoulli em escoamentos estacionários quando os termos de ordem M^4 e superiores da expansão em série (110) forem desprezáveis. Por outras palavras, quando o valor entre parênteses nessa primeira expansão for aproximadamente igual a 1.

Como a figura 14 dá a entender, considerar os escoamentos estacionários a Mach $< 0,3$ como incompressíveis conduz, em geral, a bons cálculos da distribuição de pressão.

⁵A equação (44) pode escrever-se na forma: $\frac{p_0}{p} = \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} = (1+x)^n$ em que $x = \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2$ e $n = \frac{\gamma}{\gamma-1}$.

Para $|x| < 1$ (ou seja, até $M < 2,24$ se $\gamma = 1,4$), a seguinte expansão em série é convergente:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Substituindo valores nos primeiros termos da série:

$$nx = \frac{\gamma}{2} M^2, \quad \frac{n(n-1)}{2!} x^2 = \frac{\gamma}{8} M^4, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 = \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} M^6.$$

Portanto, retendo apenas os primeiros 4 termos da série:

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} M^6 + \dots = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 \left[1 + \frac{M^2}{4} + \frac{(2-\gamma)}{24} M^4 + \dots \right]$$

⁶A equação de Bernoulli pode escrever-se na forma $\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{p} v^2$. Para um gás perfeito $\frac{\rho}{p} = \frac{1}{RT}$, donde $\frac{1}{2} \frac{\rho}{p} v^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{RT} = \frac{\gamma}{2} \frac{v^2}{\gamma RT} = \frac{\gamma}{2} M^2$, pois $c^2 = \gamma RT$.

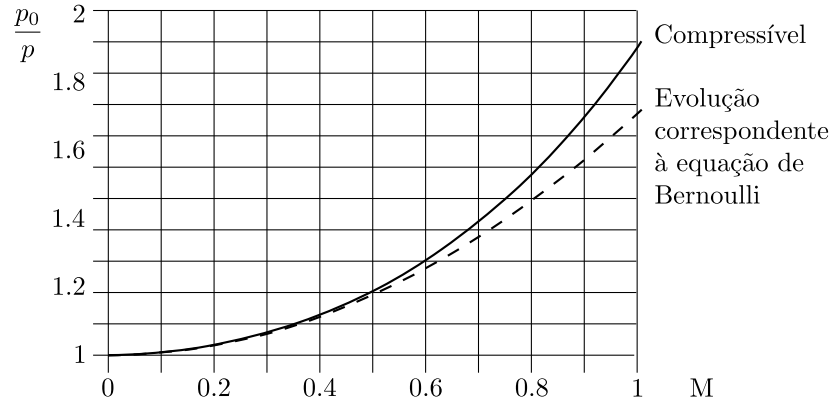
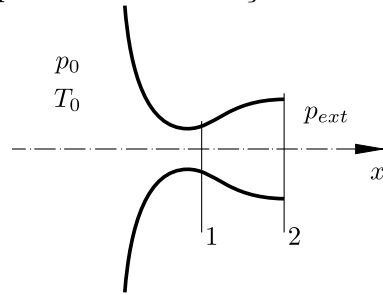


Figura 14: Razão entre a pressão de estagnação isentrópica e a pressão estática em função do número de Mach. A curva de cima corresponde à equação (110) com $\gamma = 1,4$ e a de baixo corresponde à equação de Bernoulli na forma (111).

5. Para apreciar o significado de o caudal mássico por unidade de área ser máximo para $M = 1$ (mantendo as condições de estagnação) considere-se o depósito e a tubeira convergente-divergente apresentados no problema 5, mantendo as condições no depósito e examinando o escoamento produzido por diversas condições à saída.



$$p_0 = 1,07 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 293 \text{ K}$$

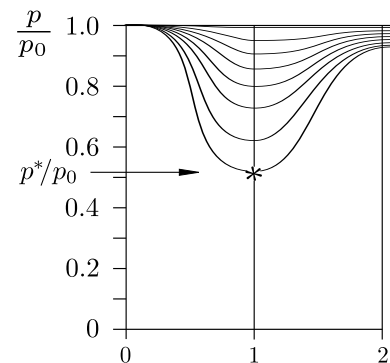
p_{ext} variável

Nota: a pressão do reservatório de descarga, a pressão exterior, denomina-se em inglês *back pressure*.

Para escoamento isentrópico, aplicam-se as equações (44) e (56):

$$\frac{p_2}{p_0} = \left[\frac{2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad \text{e} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1/A^*}{A_2/A^*} = \frac{\frac{1}{M_1} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{1 + \gamma}{2(\gamma - 1)}}}{\frac{1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{1 + \gamma}{2(\gamma - 1)}}}$$

	p_2/p_0	p_1/p_0	M_2	M_1
	1	1	0	0
Para valores sucessivamente mais baixos da pressão de saída, até o escoamento ser crítico na garganta, temos:	0,99	0,959	0,12	0,25
	0,98	0,914	0,17	0,36
	0,97	0,864	0,21	0,46
	0,96	0,807	0,24	0,56
	0,95	0,736	0,27	0,68
	0,94	0,629	0,30	0,84
	0,937	0,528	0,31	1,00



À medida que a pressão exterior foi baixando, o caudal escoado foi crescendo, até se atingir $M = 1$ na garganta. A partir daí o caudal mássico já não pode aumentar mais nesta tubeira, com aquelas condições de estagnação. Reduzir mais a pressão exterior já não faz aumentar o caudal nem varia o escoamento a montante da contracção.

Nestas condições diz-se que a contracção *controla* o escoamento: efectivamente, alterando a área da contracção controla-se directamente o caudal. A contracção só controla o escoamento para $M_1 = 1$.

6. Numa conduta circular, o ar entra à pressão $p_1 = 30$ psia e à temperatura $t_1 = 80$ °F. O tubo é de ferro fundido ($\varepsilon \simeq 0,3$ mm), tem 6 polegadas de diâmetro e mede 1310 pés de comprimento. O caudal mássico é de 200 lbm/min. O escoamento é adiabático. Pretende-se saber a pressão, a temperatura, a massa volúmica e o número de Mach na secção de saída. (Exemplo tomado de SABERSKY; ACOSTA; HAUPTMANN, *Fluid Flow*, Macmillan Co., New York, 1989, p. 344).

Solução:

A primeira tarefa é converter todos os dados para o S.I.:

$$\begin{aligned} p_1 &= 30 \text{ psia} && \Leftrightarrow 30 \times 7410,6 \text{ Pa} = 2,22 \times 10^5 \text{ Pa} \\ t_1 &= 80 \text{ °F} && \Leftrightarrow (80 - 32) \frac{5}{9} \text{ °C} = 26,7 \text{ °C} \Leftrightarrow T_1 = 300 \text{ K} \\ D &= 6 \text{ in} && \Leftrightarrow 6 \times 2,54 \times 10^{-2} \text{ m} = 0,152 \text{ m} \\ L &= 1310 \text{ ft} && \Leftrightarrow 1310 \times 0,3048 \text{ m} = 399 \text{ m} \\ \dot{m} &= 200 \text{ lbm/min} && \Leftrightarrow 200 \times 0,45359/60 \text{ kg/s} = 1,51 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

Feita esta operação preliminar os passos de resolução são:

- Determinar o número de Mach M_1 à entrada. A velocidade calcula-se a partir do caudal mássico, da massa volúmica à entrada, etc.
- Achar o número de Mach à saída, M_2 .
- A partir de M_2 , mediante as relações entre propriedades, calcular todas as propriedades relevantes em 2.

Nota: Para o ar atmosférico: $R = 287$ J/(kg K), $\gamma = 1,4$ e $\nu = 1,5 \times 10^{-5}$ m²/s.
(Obs: no livro citado, a resolução usa $\nu \simeq 6,98 \times 10^{-6}$ m²/s)

- Cálculo de M_1

Pela equação de estado: $\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{2,22 \times 10^5}{287 \times 300} = 2,58 \text{ kg/m}^3$.

Usando o caudal e a velocidade média:

$$v_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 A_1} = \frac{1,51}{2,58 \times 1,815 \times 10^{-2}} = 32,3 \text{ m/s.}$$

Velocidade do som em 1: $c_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 300} = 347 \text{ m/s}$

Número de Mach em 1: $M_1 = 32,3/347 = 0,0930$.

- Cálculo de M_2

A expressão $f \frac{(x_2 - x_1)}{D} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]$

(página 31) pode ser usada para estimar M_2 , com $x_2 - x_1 = L = 399$ m, $M_1 = 0,0930$, $\gamma = 1,4$, $D = 0,152$ m e $f \simeq 0,024$ (do diagrama de Moody para $\varepsilon/D = 2 \times 10^{-3}$ m e $Re = Dv/\nu = 3 \times 10^5$). Resolvendo esta expressão iterativamente: $M_2 = 0,1975683 \dots \simeq 0,198$.

(c) Cálculo das propriedades na secção de saída (cf. equações da página 30):

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{1/2} = 0,468 \implies p_2 = 1,04 \times 10^5 \text{ Pa} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right] = 0,994 \implies T_2 = 298 \text{ K} \\ \frac{v_2}{v_1} &= \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{1/2} = 2,12 \implies v_2 = 68,6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Como a velocidade variou pouco em relação à estimativa inicial, não se justifica repetir o cálculo do número de Reynolds para estimar novamente o coeficiente f de atrito (ver comentário no fim).

Resolução Alternativa

Por vezes é mais prático referir todas as variáveis aos seus valores críticos.

Se a conduta fosse suficientemente comprida, atingir-se-iam à saída as condições críticas. Esse seria o comprimento máximo L_{MAX1} a partir da secção 1.

Como $M_1 = 0,0930$, $\frac{f(x^* - x_1)}{D} = 77,955$. Portanto $L_{MAX1} = x^* - x = 494$ m (usou-se $f = 0,024$).

Estando a secção de saída à distância de 399 m da secção 1, obviamente

$$L_{max2} = L_{max1} - 399 = 95 \text{ m. Portanto: } f \frac{(x^* - x_2)}{D} = \frac{0,024 \times 95}{0,152} = 14,96.$$

Para este valor de γ , a função $f[x^* - x(M)]/D$ está disponível em gráficos e tabelas, pelo que é possível obter o número de Mach por interpolação: $M_2 = 0,198$.

As pressões na secção 2 podem-se calcular em função da pressão crítica usando (64). Assim,

$$\begin{aligned} M_1 = 0,0930 &\implies p_1/p^* = 11,8 \\ M_2 = 0,198 &\implies p_2/p^* = 5,51 \end{aligned}$$

(Se, em vez de usar (64) se fizerem interpolações lineares entre valores de uma tabela normal, obtêm-se estas razões de pressão com apenas dois algarismos significativos. Por exemplo: $p_1/p^* = 12,25 \simeq 12$ e $p_2/p^* = 5,53 \simeq 5,5$).

$$\text{A relação } p_2/p_1 \text{ obtém-se directamente: } \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = \frac{5,51}{11,8} = 0,467.$$

Nota: Ao apreciar os resultados tenha-se em conta a influência da variação de alguns parâmetros, como o coeficiente de atrito.

Neste caso, se f fosse diferente, a solução para o número de Mach M_2 viria também diferente, como se indica na tabela ao lado:

f	M_2
0,028	→ 0,320
0,024	→ 0,198
0,020	→ 0,156
0,016	→ 0,134

7. Retomemos o caso da conduta adiabática do problema anterior mas substituindo a conduta adiabática (isolada termicamente) por uma conduta *iso-*

térmica. As condições à entrada são:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2,22 \times 10^5 \text{ Pa} & \rho_1 &= 2,58 \text{ kgm}^{-3} \\ T_1 &= 300 \text{ K} & v_1 &= 32,3 \text{ ms}^{-1} \\ & & M_1 &= 0,0930 \end{aligned}$$

Dimensões da conduta: $D = 0,152 \text{ m}$; $L = 399 \text{ m}$. Admitamos $f = 0,024$.

Solução:

O escoamento é crítico em 1 pelo que A_1 é a área crítica. Das equações do escoamento isotérmico em condutas de secção constante:

$$\frac{f(x_2 - x_1)}{D} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) - \ln \left(\frac{M_2^2}{M_1^2} \right)$$

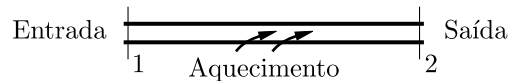
resolvendo iterativamente:

$$M_2 = 0,199 \quad [\text{escoamento adiabático: } M_2 = 0,198]$$

Cálculo das propriedades na secção de saída:

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} &= 0,467 \Rightarrow p_2 = 1,04 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &[\text{escoamento adiabático: } p_2 = 1,04 \times 10^5 \text{ Pa}] \\ T_2 = T_1 &= 300 \text{ K} \quad [\text{escoamento adiabático: } T_2 = 298 \text{ K}] \\ \frac{v_2}{v_1} = \frac{M_2}{M_1} &= 2,14 \Rightarrow v_2 = 69,1 \text{ m/s} \\ &[\text{escoamento adiabático: } v_2 = 68,6 \text{ m/s}] \end{aligned}$$

8. Numa conduta sem atrito e de área transversal constante pretende-se aquecer um caudal de ar $\dot{m}/A = 1436 \text{ kg/s m}^{-2}$. À entrada o número de Mach é $M_1 = 0,3$ e a temperatura é $T_1 = 250 \text{ K}$.



Qual é a quantidade máxima de calor que é possível fornecer com este caudal? (Exemplo tomado de SABERSKY; ACOSTA; HAUPTMANN, *Fluid Flow*, Macmillan Co., New York, 1989, 9.28, p. 318).

Solução:

As condições de estagnação adiabática do escoamento à entrada são:

$$M_1 = 0,3 \longrightarrow \frac{T_1}{T_{01}} = \frac{2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} = 0,982 \quad \Rightarrow T_{01} = \frac{250}{0,982} = 255 \text{ K}.$$

A quantidade máxima de calor que é possível fornecer ao fluido sem reduzir o caudal é aquela que provoca condições sónicas à saída. Isto é, $T_{02} = T_0^*$. Para escoamento com transmissão de calor:

$$M_1 = 0,3 \longrightarrow \frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 [2 + (\gamma - 1) M_1^2]}{(1 + \gamma M_1^2)} = 0,347 \quad \Rightarrow T_0^* = \frac{255}{0,347} = 734 \text{ K}.$$

O calor fornecido por unidade de massa nestas condições é (cf. equação da energia):

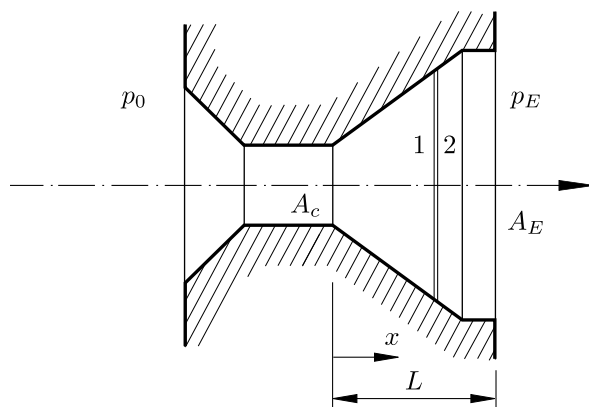
$$q = h_{02} - h_{01} = C_p (T_{02} - T_{01}) = 4,79 \times 10^5 \text{ J/kg},$$

usando $C_p = 10^3 \text{ J/(kg K)}$. À medida que o fluido iria recebendo calor (q representa o calor recebido por unidade de massa desde a entrada), as propriedades termodinâmicas e a velocidade variavam da seguinte forma:

Calor q fornecido por unid. de massa (J/kg)	T_0 Temperatura de estagnação (K)	M Número de Mach	T Temperatura (K)	v Velocidade (m/s)
0	255	0,3	250	95
10^5	355	0,375	345	140
2×10^5	455	0,45	433	188
3×10^5	555	0,55	526	253
4×10^5	655	0,68	600	334
$4,79 \times 10^5$	734	1,0	611	496

9. Uma conduta convergente-divergente é composta por secções cónicas e cilíndricas, como se mostra na figura. A área de saída, A_E , é 16 vezes maior que a área da garganta, A^* . A conduta é alimentada por ar ($\gamma = 1,4$) a partir de um reservatório à pressão p_0 . A pressão à saída é p_E .

Determine a razão p_0/p_E para a qual se dá uma onda de choque a meio da conduta divergente ($x/L = 0,5$). (Exemplo tomado de SABERSKY; ACOSTA; HAUPTMANN, *Fluid Flow*, Macmillan Co., New York, 1989, 9.58, p. 338).



Solução:

No cone divergente, o raio varia linearmente com x e a área de uma secção transversal de coordenada longitudinal x é: $A(x) = A^*(1 + 3x/L)^2$. Se o choque se dá na secção $x/L = 1/2$, a respectiva área da secção será

$$A_{CH}(x = L/2) = A_1^* \frac{25}{4}.$$

Até ao choque o escoamento seria isentrópico. Indicar-se-ão as propriedades até ao choque com o índice (1) e depois do choque com o índice (2). Assim

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)_{CH_1} = \frac{25}{4} = 6,250 \quad \text{donde, pela equação (56):} \quad M_{CH_1} = 3,411$$

Das equações (95) e (101) de uma onda de choque plana: $\Rightarrow \begin{cases} M_{CH_2} = 0,4547 \\ p_{02}/p_{01} = 0,2299 \end{cases}$

Depois da onda de choque, o escoamento passa a ter uma área crítica A_2^* diferente da que tinha anteriormente, A_1^* . A relação entre a área e a área crítica é (56):

$$M_{CH_2} = 0,4547 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{A}{A^*}\right)_{CH_2} = 1,437 \quad \text{como} \quad A_{CH_1} = A_{CH_2} : \quad A_2^* = 4,349A_1^*.$$

Desde a onda de choque CH até à saída o escoamento volta a ser isentrópico (com a nova pressão de estagnação isentrópica p_{02} e a nova área crítica A_2^*).

$$\frac{A_E}{A_2^*} = \frac{A_E/A_1^*}{A_2^*/A_1^*} = \frac{16}{4,349} = 3,679$$

Para esta razão de áreas, com escoamento isentrópico, aplicam-se (56) e (44):

$$\begin{aligned} M_E &= 0,1597 \\ p_E/p_{02} &= 0,9823 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{p_E}{p_{01}} = \frac{p_E}{p_{02}} = \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,2259,$$

em que p_E é a pressão à saída e p_{01} é a pressão no reservatório (pressão de estagnação isentrópica do escoamento até à onda de choque).

10. Para a mesma geometria do problema anterior, em que posição estaria a onda de choque se a relação entre a pressão exterior p_E e a pressão no reservatório fosse $p_E/p_0 = 1/8 = 0,1250$?

Solução:

A resolução deste problema obter-se-á por iterações.

1ª ITERAÇÃO

O problema anterior fornece uma primeira iteração: com a onda de choque em $x/L = 1/2$ $p_E/p_{01} = 0,2259$. Como a relação de pressões é inferior ($=0,1250$), o choque deve dar-se em $x > L/2$.

2ª ITERAÇÃO

A posição extrema da onda de choque seria $x = L$. Nesse caso, $A_{CH} = A_E$ pelo que, imediatamente antes do choque $\left(\frac{A}{A^*}\right)_{CH_1} = 16$ pelo que $M_{CH_1} = 4,459$ e $p_{CH_1}/p_{01} = 3,63 \times 10^{-3}$.

Das equações da onda de choque plana:

$$M_{CH_1} = 4,459 \Rightarrow \begin{aligned} M_{CH_2} &= 0,4243 \\ p_{CH_2}/p_{CH_1} &= 23,03 \end{aligned}$$

em que, por a onda de choque estar localizada à saída, $p_{CH_2} = p_E$. Portanto:

$$\frac{p_E}{p_{01}} = \frac{p_{CH_2}}{p_{CH_1}} \frac{p_{CH_1}}{p_{01}} = 8,374 \times 10^{-2}$$

3ª ITERAÇÃO

A partir das tentativas anteriores:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = L/2 \Rightarrow \left(\frac{A}{A^*}\right)_{CH_1} = 6,250 \quad p_E/p_{01} = 0,08374 \\ x = L \quad \Rightarrow \left(\frac{A}{A^*}\right)_{CH_1} = 16 \quad p_E/p_{01} = 0,2259 \end{array} \right.$$

por interpolação linear obtém-se, para $p_E/p_{01} = 0,125$, a estimativa $(A/A^*)_{CH_1} = 13,17$.

Para essa relação de áreas, sendo o escoamento isentrópico até à onda de choque (CH_1): $M_{CH_1} = 4,233$

Das equações da onda de choque:

$$\begin{aligned} M_{CH_2} &= 0,4292 \\ p_{02}/p_{01} &= 0,1141 \end{aligned}$$

Para esse número de Mach num escoamento isentrópico ter-se-ia:

$$A_{CH}/A_2^* = 1,503$$

Pelo que,

$$\frac{A_E}{A_2^*} = \frac{A_E}{A_1^*} \frac{A_1^*}{A_{CH}} \frac{A_{CH}}{A_2^*} = 16 \times \left(\frac{1}{13,17}\right) \times 1,503 = 1,755$$

Para essa relação de áreas:

$$\begin{aligned} M_E &= 0,3553 \\ p_E/p_{02} &= 0,9164 \end{aligned}$$

Donde

$$\frac{p_E}{p_{01}} = \frac{p_E}{p_{02}} \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,1046$$

4ª ITERAÇÃO

Os resultados anteriores podem ser usados para fazer uma interpolação quadrática:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 6,250 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,2259 \\ \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 13,17 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,1046 \\ \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 16 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,08374 \end{array} \right\} \frac{p_E}{p_{01}} = 0,125 \xrightarrow{\text{estimativa}} \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 10,87$$

Para $(A/A^*) = 10,87$ em escoamento isentrópico: $M_{CH_1} = 4,0157$. Uma onda de choque nessas condições dá: $M_{CH_2} = 0,43454$

$$p_{02}/p_{01} = 0,13693$$

Dado M_{CH_2} : $\frac{A_{CH}}{A_2^*} = 1,4884$ donde $\frac{A_E}{A_2^*} = \frac{A_E}{A_1^*} \frac{A_1^*}{A_{CH}} \frac{A_{CH}}{A_2^*} = 2,1909$.

Com essa relação de áreas: $M_E = 0,27644$

$$p_E/p_{02} = 0,94830$$

$$e \frac{p_E}{p_{01}} = \frac{p_E p_{02}}{p_{02} p_{01}} = 0,12985.$$

5ª ITERAÇÃO

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 10,87 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,12985 \\ \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 13,17 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,10459 \\ \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 16 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,08374 \end{array} \right\} \frac{p_E}{p_{01}} = 0,125 \xrightarrow{\text{estimativa}} \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 11,22$$

Os vários passos são: $A/A^* = 11,22 \Rightarrow M_{CH1} = 4,0513$.

Depois das ondas de choque: $M_{CH2} = 0,43360$

$$p_{02}/p_{01} = 0,13288$$

$$A_{CH}/A_2^* = 1,4909$$

$$\frac{A_E}{A_2^*} = 2,1261 \Rightarrow M_E = 0,28574 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,12556.$$

6ª ITERAÇÃO

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 10,87 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,12985 \\ \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 11,22 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,12556 \\ \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 13,17 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,10459 \end{array} \right\} \frac{p_E}{p_{01}} = 0,125 \xrightarrow{\text{estimativa}} \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 11,268$$

Para esta relação de áreas: $M_{CH1} = 4,0513$.

Depois das ondas de choque: $M_{CH2} = 0,43348 \Rightarrow \frac{A_E}{A_2^*} = 2,1175$

$$p_{02}/p_{01} = 0,13234$$

$$A_{CH}/A_2^* = 1,4913$$

Pelo que à saída:

$$\begin{array}{l} M_E = 0,28703 \\ p_E/p_{02} = 0,94441 \end{array} \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,12499$$

Resultado Final

A relação p_E/p_{01} obtida na última iteração coincide praticamente com 0,125. Uma nova interpolação daria:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 10,87 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,12985 \\ \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 11,22 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,12556 \\ \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 11,268 \Rightarrow \frac{p_E}{p_{01}} = 0,12499 \end{array} \right\} \frac{p_E}{p_{01}} = 0,125 \xrightarrow{\text{estimativa}} \frac{A_{CH}}{A_1^*} = 11,267$$

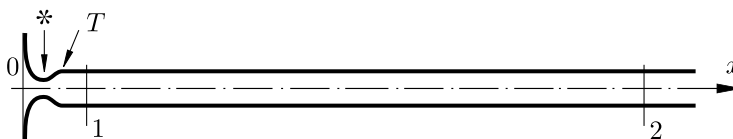
Conclui-se pois, que o choque se dá na secção com a relação de áreas $A_{CH}/A_1^* = 11,267$.

Como $A(x)/A_1^* = (1 + 3\frac{x}{L})^2$, o choque dá-se na secção $x = 0,7855 L$.

Nota: Fizeram-se os cálculos com mais algarismos que os apresentados. A precisão do resultado não depende apenas do rigor na resolução numérica das equações mas também da validade das hipóteses e da precisão das medidas.

11. Uma utilização experimental é constituída por uma tubeira convergente-divergente ligada a um tubo liso, cilíndrico. Com o objectivo de medir o coeficiente de atrito de um escoamento supersónico de ar, mediram-se as seguintes valores:

Pressão antes da tubeira = 516 cm Hg abs
 Temperatura antes da tubeira = 107,3 °F
 Diâmetro da contracção = 0,2416 inches
 Diâmetro de saída da tubeira e do tubo = 0,5009 inches
 Pressão estática a 1,75 diâmetros do início do tubo = 18,25 cm Hg abs
 Pressão estática a 29,60 diâmetros do início de tubo = 37,1 cm Hg abs



Pretende-se calcular o coeficiente médio de atrito entre as secções $x/D = 1,75$ e $x/D = 29,60$. Assumir-se-á que o escoamento na tubeira é isentrópico até à garganta e que o escoamento é adiabático em toda a instalação. (Enunciado adaptado de SHAPIRO, *compressible flow*, Art. .2, ex., p. 169).

Solução:

Como se trabalhará sempre com as quantidades adimensionais não é necessário converter os dados para o Sistema Internacional.

Se o escoamento é supersónico no tubo, será sónico na garganta. Sendo A^* a área da garganta e A_T a área no tubo (e à saída da tubeira):

$$\frac{A_T}{A^*} = \left(\frac{D_T}{D^*}\right)^2 = \left(\frac{0,5009}{0,2416}\right)^2 = 4,2984$$

Nota: Com esta relação de áreas, *se o escoamento fosse isentrópico* na parte divergente da tubeira (o enunciado diz apenas que é isentrópico *até* a garganta), de acordo com as equações do escoamento isentrópico (cf. pág. 23):

$$M_T = 3,0157146 \simeq 3,016$$

$$p_T/p_0 = 2,568994 \times 10^{-2} \simeq 2,659 \times 10^{-2}$$

Como $p_0 = 516$ cm Hg abs, $p_T = 13,720411 \simeq 13,72$ cm Hg abs.

Desde o início do tubo até à secção 1 o escoamento é adiabático com atrito (64):

$$\frac{p_1}{p_T} = \frac{M_T}{M_1} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_T^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right]^{1/2}$$

Com $p_1/p_T = 18,25/13,720411$ e $M_T = 3,0157146$ resulta:

$$M_1 = 2,5241464 \simeq 2,524$$

No entanto, como se chama a atenção, o escoamento na tubeira divergente seria adiabático (porque o enunciado menciona que é adiabático em toda a instalação) mas não necessariamente isentrópico. Assim, a abordagem anterior não se aplica com validade.

O caudal mássico por unidade de área é (cf. pág. 26):

$$\frac{\dot{m}}{A} = M \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}$$

equação que, tal como se chamou expressamente a atenção na ocasião (cf. pág. 26, nota), é válida genericamente referida aos valores locais de estagnação isentrópica, seja o escoamento isentrópico ou não.

Na garganta, com $M = 1$:

$$\left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^* = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{p_0^*}{\sqrt{T_0^*}}$$

sendo $p_0^* = p_{00} \equiv$ pressão de estagnação no reservatório

(por o escoamento ser isentrópico do reservatório até a garganta);

$T_0^* = T_{00} \equiv$ temperatura de estagnação no reservatório

(por o escoamento ser adiabático).

Na secção 1:

$$\left(\frac{\dot{m}}{A} \right)_1 = M_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^2 \right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}}$$

sendo $p_{01} \neq p_{00}$ por ser escoamento isentrópico,

$T_{01} = T_{00}$ por ser escoamento adiabático.

Como é conhecida a pressão estática em 1 convém exprimir a pressão de estagnação p_{01} em função de p_1 e do número de Mach local. A relação é (cf. pág. 23):

$$p_{01} = p_1 \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Substituindo na equação de $(\dot{m}/A)_1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{m}}{A} \right)_1 &= M_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^2 \right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} + \frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{p_1}{\sqrt{T_{00}}} \\ &= M_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{p_1}{\sqrt{T_{00}}} \end{aligned}$$

Por continuidade:

$$\dot{m}^* = \dot{m}_1$$

e, como se viu:

$$A^* = \frac{A_1}{4,2984}$$

pelo que

$$\left(\frac{\dot{m}}{A}\right)^* \Big/ \left(\frac{\dot{m}}{A}\right)_1 = 4,2984$$

Ora,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\dot{m}}{A}\right)^*}{\left(\frac{\dot{m}}{A}\right)_1} &= \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{p_{00}}{\sqrt{T_{00}}}}{M_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2\right]^{\frac{1}{2}} \frac{p_1}{\sqrt{T_{00}}}} \\ &= \frac{1}{M_1 \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{p_{00}}{p_1}\right) \end{aligned}$$

Sabe-se que $\frac{p_{00}}{p_1} = \frac{516}{18,25} = 28,27397$ e vamos usar $\gamma = 1,4$ por o fluido ser ar em condições próximas da atmosfera. A solução, obtida iterativamente, é: $M_1 = 2,5241461 \simeq 2,524$.

Verifica-se que este valor de M_1 é idêntico ao obtido para escoamento isentrópico mas não foi utilizada essa aproximação (na parte divergente da tubeira).

Dados p_1 , M_1 e a pressão estática p_2 é possível determinar M_2 :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_2^2} \right]^{1/2}$$

(cf. pág. 30). Iterativamente: $M_2 = 1,5416295$.

Nota: Uma alternativa de cálculo seria (cf. pág. 38):

$$\begin{aligned} p_1/p^* &= \frac{1}{M_1} \left[\frac{\gamma+1}{2 + (\gamma-1) M_1^2} \right]^{1/2} \Rightarrow p_1/p^* = 0,2877768 \\ p_2/p^* &= (p_2/p_1)(p_1/p^*) = 0,5850148 \end{aligned}$$

Calculando M_2 a partir da equação (74):

$$p_2/p^* = \frac{1}{M_2} \left[\frac{\gamma+1}{2 + (\gamma-1) M_2^2} \right]^{1/2} \Rightarrow M_2 = 1,5416295.$$

Conhecidos M_1 e M_2 e sabendo que $\frac{x_2 - x_1}{D} = 29,60 - 1,75 = 27,85$, pode usar-se a equação

$$\frac{f(x_2 - x_1)}{D} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{2 + (\gamma-1) M_2^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2} \right]$$

(cf. pág. 31) para determinar o coeficiente de atrito médio: $f = 0,0102643 \simeq 1,03 \times 10^{-2}$.

Nota: Outra abordagem é usar a área crítica:

$$\frac{f(x_1 - x^*)}{D} = \frac{M_1^2 - 1}{\gamma M_1^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{1}{M_1^2} \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{\gamma + 1} \right] = 0, 4371$$

$$\frac{f(x_2 - x^*)}{D} = \frac{M_2^2 - 1}{\gamma M_2^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{1}{M_2^2} \frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{\gamma + 1} \right] = 0, 1512$$

Donde

$$\frac{f(x_2 - x_1)}{D} = \frac{f(x_2 - x^*)}{D} - \frac{f(x_1 - x^*)}{D} = 0, 2859$$

$$\text{como } \frac{(x_2 - x_1)}{D} = 27, 85 : f = \frac{0, 2859}{27, 85} = 0, 01026 \simeq 1, 03 \times 10^{-2}.$$

Este valor pode comparar-se com o diagrama de Moody.

$$\left. \begin{aligned} T_1/T_0 &= \frac{2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \Rightarrow T_1 = 0, 4397T_0 \simeq 138, 5 \text{ K} \\ T_2/T_0 &= \frac{2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \Rightarrow T_2 = 0, 6778T_0 \simeq 213, 5 \text{ K} \end{aligned} \right\} \bar{T} \simeq -100^\circ\text{C}$$

$$v_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{\gamma R T_1} \simeq 586 \text{ m/s} \quad \bar{v} \simeq 515 \text{ m/s}$$

$$v_2 = M_2 c_2 = M_2 \sqrt{\gamma R T_2} \simeq 444 \text{ m/s} \quad \bar{T} \simeq -100^\circ\text{C} \Rightarrow \bar{v} \simeq 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$\overline{\text{Re}} = \frac{\bar{v} D}{\bar{\nu}} \simeq \frac{515 \times 1, 27 \times 10^{-2}}{10^{-5}} \simeq 6, 5 \times 10^5 \implies (\text{para tubo liso}) : \tilde{f} \simeq 1, 2 \times 10^{-2}.$$

12. Se na instalação experimental apresentada no exemplo anterior se der uma onda de choque numa secção a 42 diâmetros do início do tubo, qual seria a pressão à saída?

Solução:

Na secção 2 tinha-se (cf. problema anterior)

$$M_2 = 1, 5416295, \quad \frac{x_2}{D} = 29, 60, \quad p_2 = 37, 1 \text{ cm Hg abs.}$$

Na secção da onda de choque (secção 3) será: $\frac{x_3}{D} = 42$, sabendo-se que $f \simeq 0, 0102643$.

Por ser escoamento adiabático em conduta de secção constante (cf. pág. 31):

$$f \frac{(x_3 - x_2)}{D} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_2^2} - \frac{1}{M_3^2} \right) + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{M_2^2}{M_3^2} \frac{2 + (\gamma - 1)M_3^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]$$

donde $M_3 = 1, 4717008$ (este valor é M_{CH3} , antes do choque).

Da equação

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{M_2}{M_3} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_3^2} \right]^{1/2} \quad (\text{cf. pág. 30})$$

Conclui-se que $p_3 = 1, 0628054 p_2$ (este valor é p_{CH3} , antes do choque).

Usando-se as equações das ondas de choque (cf. pág. 49) podem determinar-se as condições depois do choque (secção 4):

$$\begin{aligned} M_4^2 &= \frac{2 + (\gamma - 1)M_3^2}{2\gamma M_3^2 - (\gamma - 1)} \Rightarrow M_4 = 0, 7113504 \\ p_4/p_3 &= \frac{2\gamma M_3^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \Rightarrow p_4 = 2, 360220 p_3 \end{aligned}$$

e, obviamente: $x_4/D = x_3/D = 42$.

A partir da secção 4 o escoamento volta a ser adiabático com atrito até à saída (secção 5). À saída o escoamento será crítico: $M_5 = M^* = 1$. Assim:

$$\frac{p_4}{p_5} = \frac{p_4}{p^*} = \frac{1}{M_4} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M_4^2} \right]^{1/2} = 1,4674833 \quad \text{pela equação (64),}$$

$$\Rightarrow p_5 = \frac{1}{1,4674833} p_4$$

Recordando resultados anteriores

$$p_4 = 2,360220 p_3$$

$$p_3 = 1,0628054 p_2$$

$$p_2 = 37,1 \text{ cm Hg abs.}$$

deduz-se que $p_5 = 63,4 \text{ cm Hg abs.} \Leftrightarrow 8,42 \times 10^4 \text{ Pa}$. Esta pressão é inferior à pressão atmosférica ($\simeq 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$) pelo que a pressão *ambiente* no final da conduta não é a pressão atmosférica.

Nota 1: Tanto na garganta como no extremo final do tubo o escoamento é crítico *mas são condições críticas diferentes* (veja-se a secção 3.2 e a Figura 6):

O número de Mach é o mesmo (=1);

a temperatura de estagnação é a mesma (porque o escoamento é adiabático);

a temperatura é a mesma (porque as temperaturas de estagnação e os números de Mach são idênticos);

mas a *pressão estática* e a *pressão de estagnação isentrópica* são diferentes;

por isso a *massa volúmica* também é diferente e, embora a velocidade e o caudal mássico sejam idênticos,

a *área das duas secções* (que são ambas críticas) é diferente.

Nota 2: Utilizando a equação (75),

$$f \frac{(x_4 - x^*)}{D} = \frac{M_4^2 - 1}{\gamma M_4^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{1}{M_4^2} \frac{2 + (\gamma - 1) M_4^2}{\gamma + 1} \right],$$

vem $\frac{x_4 - x^*}{D} = 18,22$. Portanto, a saída do tubo estará a 18,22 diâmetros da onda de choque. O comprimento total do tubo é:

$$\frac{L}{D} = \frac{x_2}{D} + \frac{x_3 - x_2}{D} + \frac{x_5 - x_4}{D} = 29,60 + 42 + 18,22 = 89,82$$

isto é, 89,82 diâmetros.

Nota 3: Repare-se que a presença da onda de choque na secção 3/4 não perturbaria os ensaios pois num escoamento supersónico as perturbações não se propagam para montante por a velocidade do fluido ser superior à celeridade das ondas de pressão.

(Estritamente, $M > 1$ garante que a velocidade do fluido é superior à velocidade das ondas de pressão infinitesimais – ondas de som –; para perturbações de intensidade maior tenha-se em conta a análise feita na página 49).

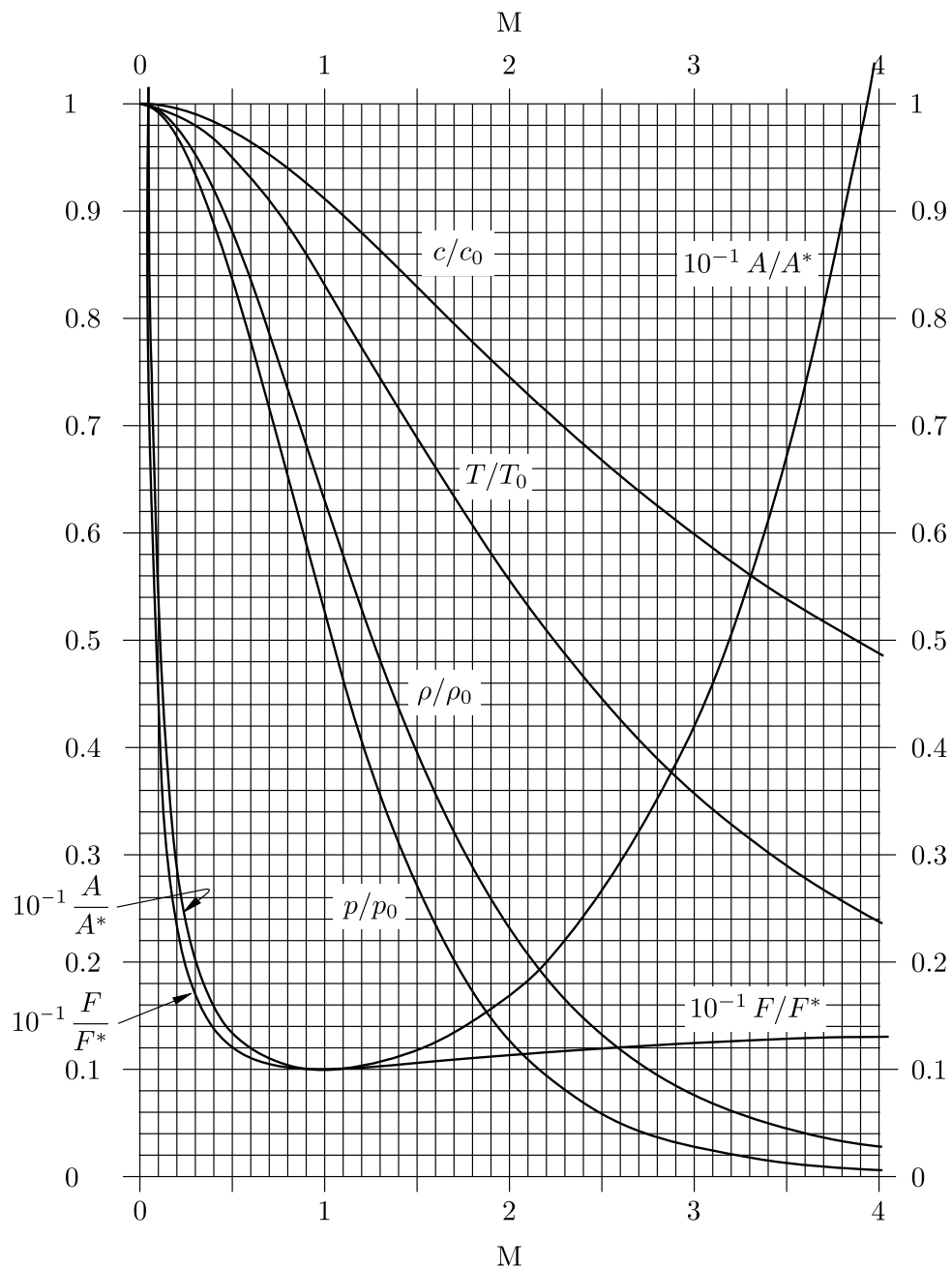


Figura 15: Gráfico das funções (42 – 44), (46), (56) e (57) para escoamento **isentrópico** de um gás perfeito com $\gamma = 1.4$, no intervalo $0 \leq M \leq 4$.

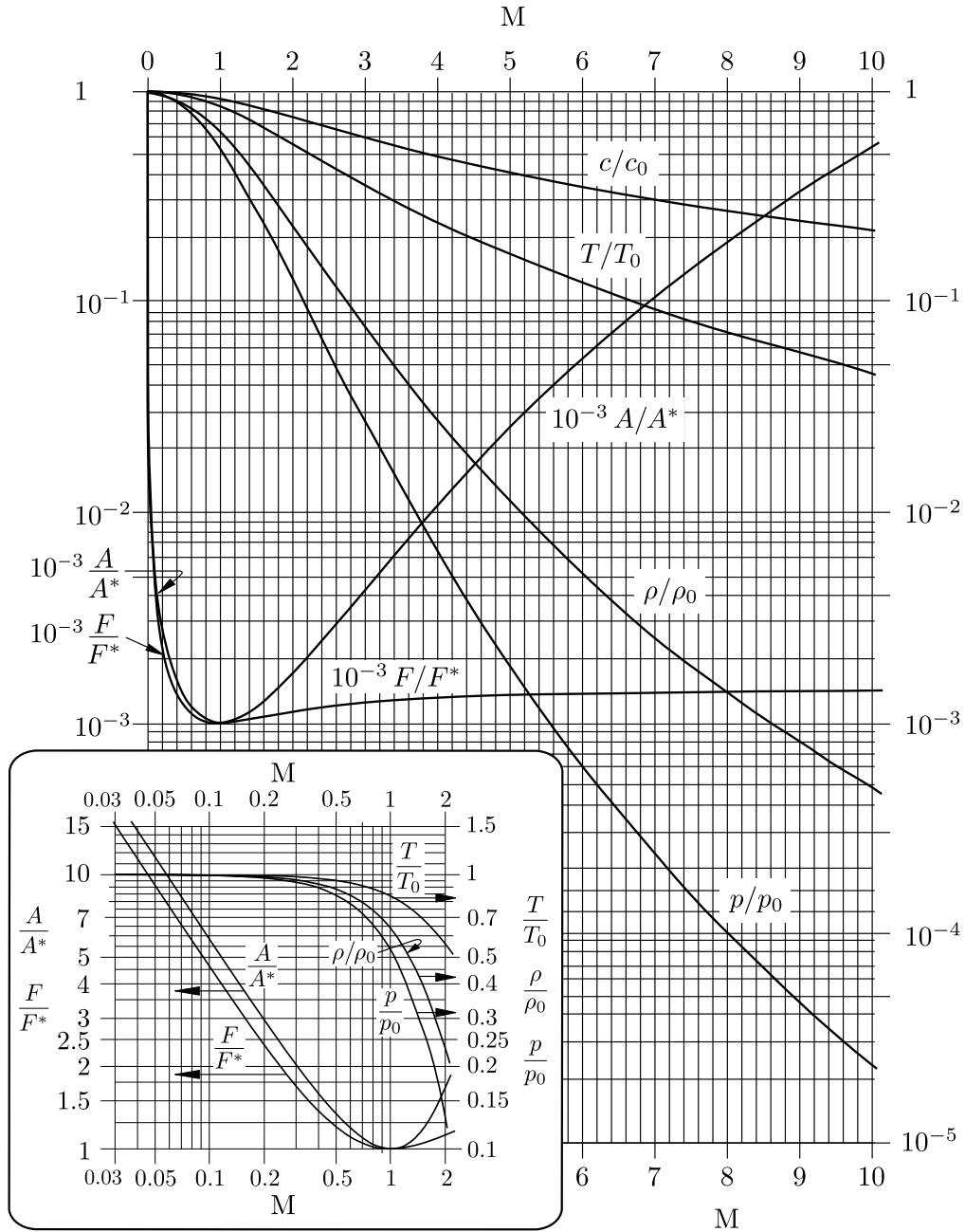


Figura 16: Gráfico das funções (42 – 44), (46), (56) e (57) para escoamento **isentrópico** de um gás perfeito com $\gamma = 1.4$, no intervalo $0 \leq M \leq 10$.

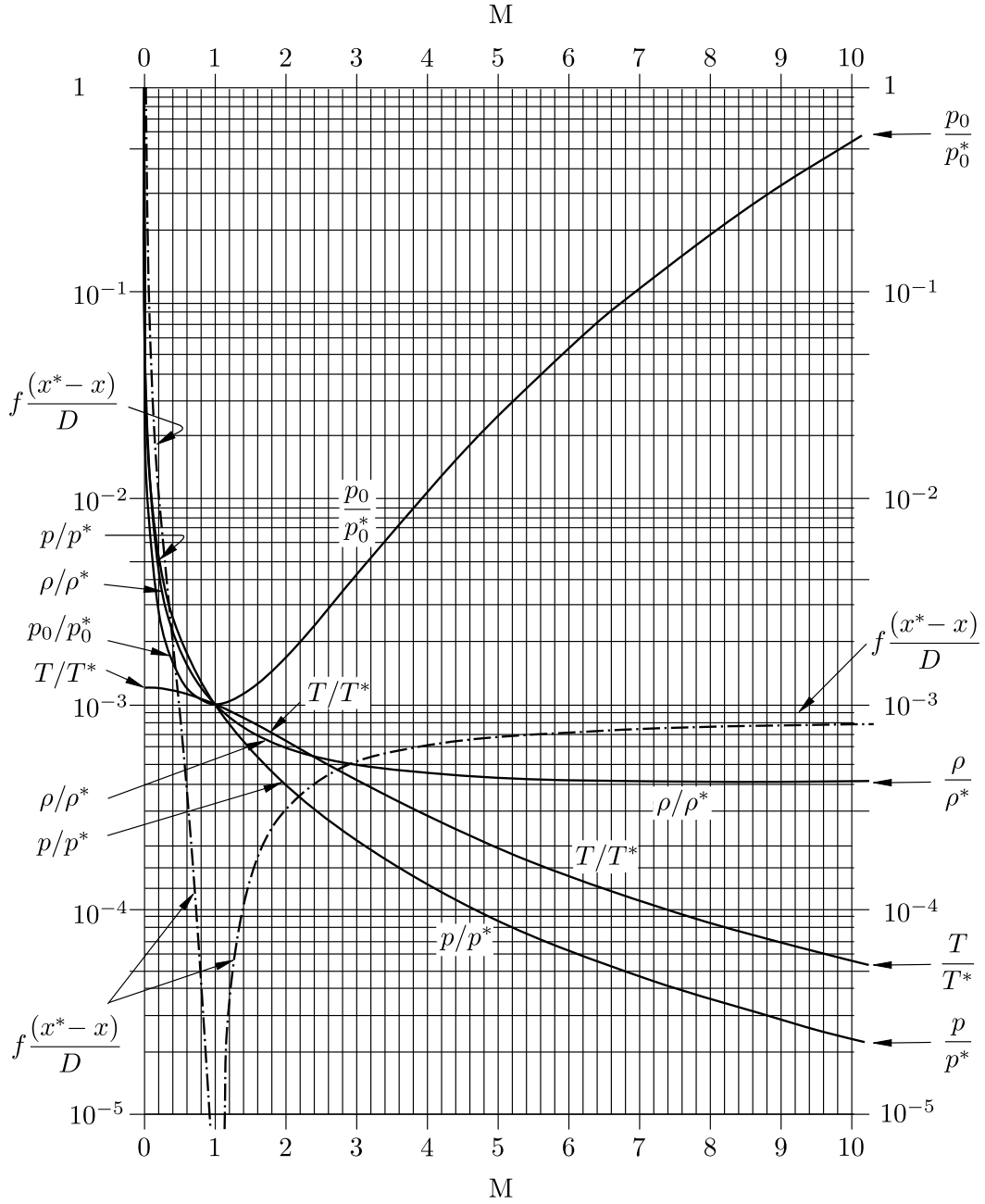


Figura 17: Gráfico das funções (60 – 68) para escoamento **adiabático** de um gás perfeito com $\gamma = 1.4$, no intervalo $0 \leq M \leq 10$.

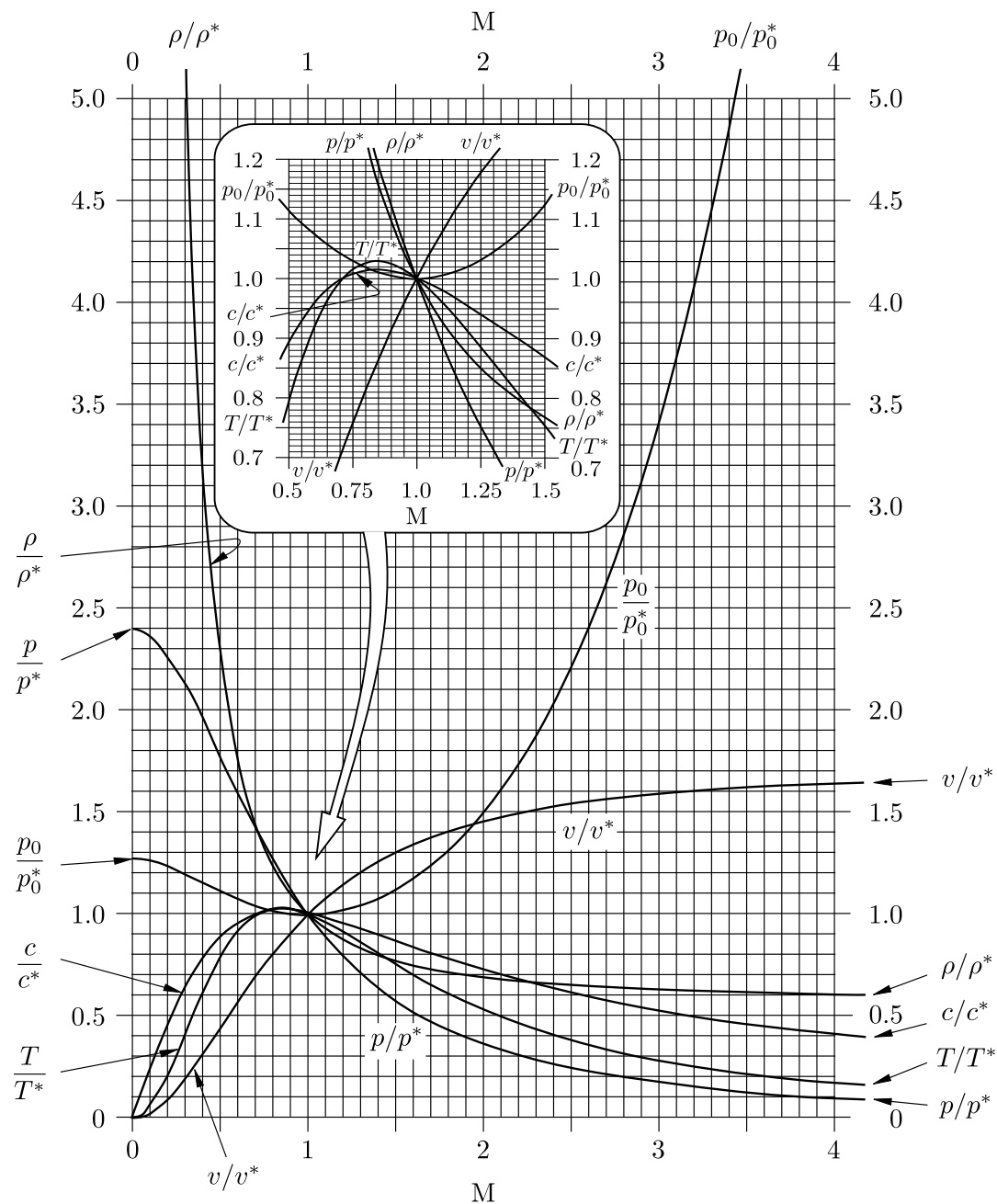


Figura 18: Gráfico das funções (82 – 91) para escoamento com **transmissão de calor** de um gás perfeito com $\gamma = 1.4$, no intervalo $0 \leq M \leq 4$.

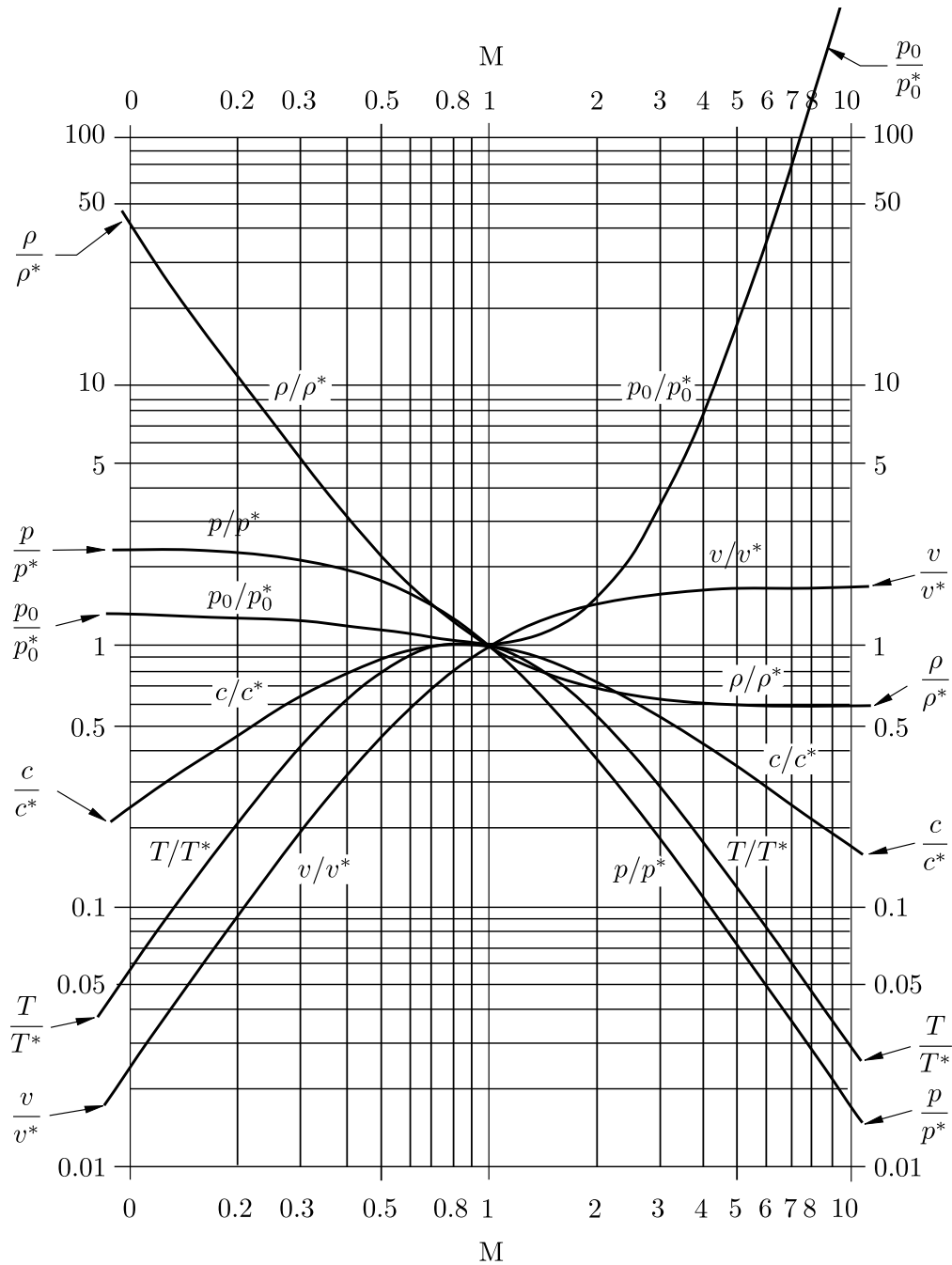


Figura 19: Gráfico das funções (82 – 91) para escoamento com **transmissão de calor** de um gás perfeito com $\gamma = 1.4$, no intervalo $0, 1 \leq M \leq 10$.

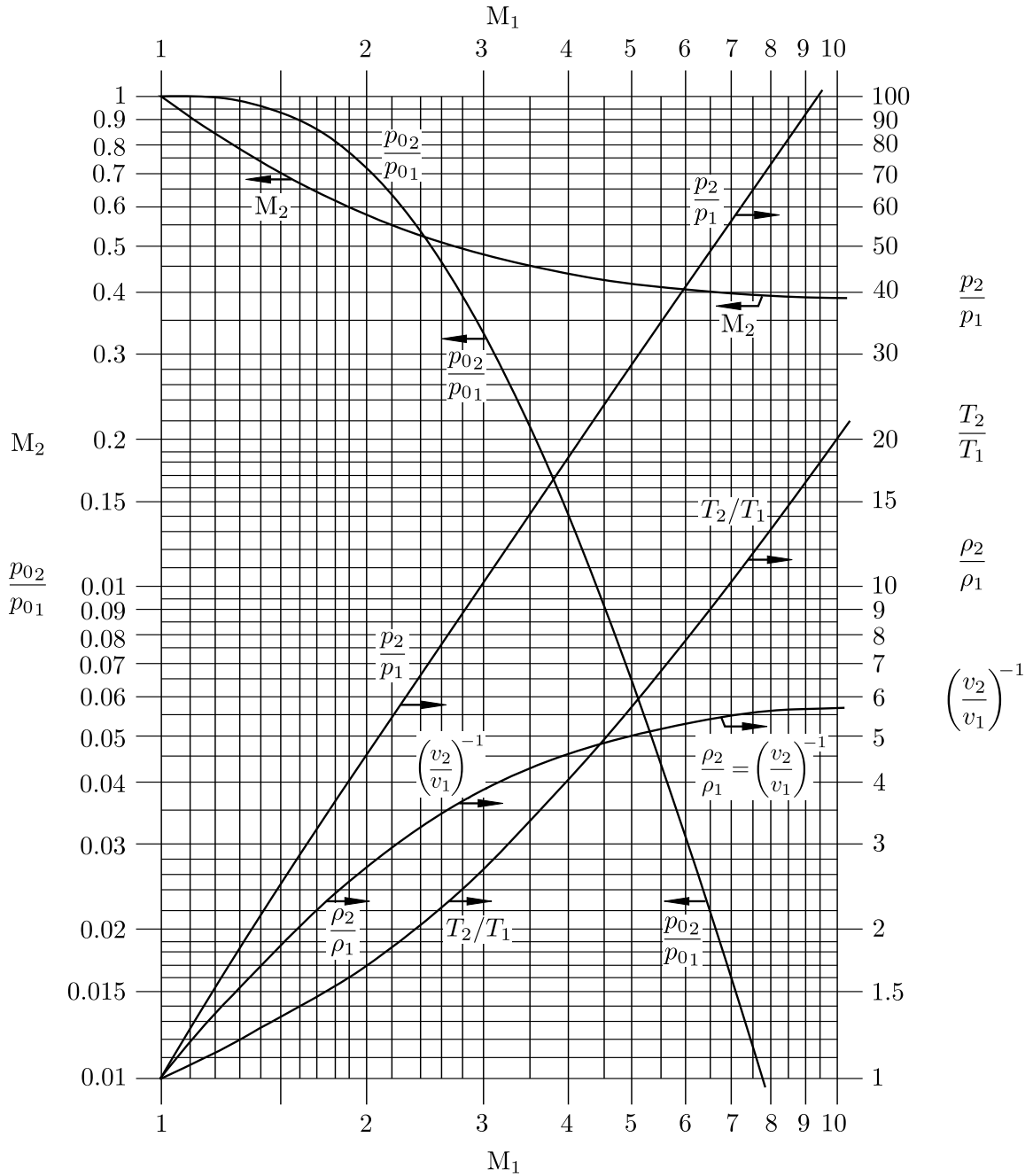


Figura 20: Gráfico das funções (95 – 99) e (101) para **onda de choque plana** de um gás perfeito com $\gamma = 1.4$, no intervalo $1 \leq M_1 \leq 10$.