



APONTAMENTOS DE DINÂMICA E HIDRODINÂMICA DO NAVIO

NUNO FONSECA

Secção Autónoma de Engenharia Naval
Instituto Superior Técnico

Maio de 2009

Índice

1	Introdução.....	4
2	Teoria de Escoamento Potencial.....	7
	Introdução.....	7
	Hipóteses de Fluido Ideal.....	9
	Sistemas de Coordenadas.....	11
	Formulação do Problema Hidrodinâmico.....	13
	2.0.1 Condição Fronteira no Corpo.....	14
	2.0.2 Condição Fronteira na Superfície Livre.....	15
	2.0.3 Condição no Fundo.....	16
	2.0.4 Condição de Radiação para Infinito.....	16
	Linearização do Problema Hidrodinâmico.....	18
	2.0.5 Método de Pequenas Perturbações.....	18
	2.0.6 Condição Fronteira na Superfície Livre Linear.....	21
	2.0.7 Condição Fronteira Linear no Corpo.....	22
	2.0.8 Descomposição do Potencial de Velocidade.....	25
	2.0.9 Problema de Condição Fronteira Linear.....	27
	2.0.10 Pressão e Forças Hidrodinâmicas.....	28
	Observações Finais.....	30
3	solução no domínio da frequência.....	32
	3.1 Introdução.....	32
	3.2 Forças de Radiação.....	33
	3.2.1 Simplificação do Problema de Condição Fronteira.....	33
	3.2.2 Cálculo das Forças de Radiação.....	36
	3.3 Forças de Excitação.....	42

3.3.1	Força de Froude-Krilov.....	42
3.3.2	Forças de Difracção	44
3.4	Forças de Restituição.....	47
3.5	Equações do Movimento	49
3.6	Esforços Dinâmicos.....	51
3.7	Comentários Finais.....	56
4	Referências	59

1 INTRODUÇÃO

Os navios operam, na maior parte dos casos, em condições em que a ondulação provoca solicitações estruturais e respostas do sistema que devem ser consideradas tanto no projecto estrutural como na análise de operacionalidade. Podem ser distinguidos dois tipos de problemas. O primeiro está relacionado com a capacidade do navio, ou estrutura oceânica, sobreviver sem danos significativos às condições de ondulação mais severas que irá encontrar durante a sua vida operacional. O problema põe-se a nível das solicitações estruturais extremas e da capacidade de se manter a flutuar direito apesar dos movimentos induzidos pelas ondas. O segundo é o problema da operacionalidade do sistema, o que significa a capacidade para manter a operação em condições de ondulação dentro de limites aceitáveis de: conforto para a tripulação e passageiros, solicitações na estrutura e equipamentos, ou outros requisitos operacionais que dependem da missão. O comportamento em ondas relaciona-se também com a capacidade do navio manter a velocidade de serviço e com o consumo de combustível. Em termos gerais pode-se dizer que um navio, com boas qualidades de comportamento em ondas é mais seguro e mais eficiente do ponto de vista económico.

A qualidade do comportamento em ondas tem vindo a ganhar importância nas últimas décadas à medida que os requisitos operacionais se tornam mais exigentes em termos de segurança e conforto, e simultaneamente aumenta a pressão para tornar os navios mais eficientes economicamente. Por outro lado, o espectro de utilização e exploração do mar está constantemente a expandir-se, o que cria novos desafios na área do comportamento em ondas: mais velocidade, navios maiores, configurações não convencionais, novos tipos de operações, por exemplo relacionadas com as actividades offshore, etc.

Para incluir no projecto do navio (ou estrutura oceânica), ou no planeamento da sua operação, a análise do comportamento em ondas, o Engenheiro Naval tem que ter conhecimentos de base consistentes na área da dinâmica e hidrodinâmica em ondas. Se esta competência é importante quando o engenheiro trabalha com navios convencionais, ela é essencial quando se trata do desenvolvimento e utilização de novos conceitos para a utilização e exploração do mar, ou em aplicações especiais tais como; cascos rápidos, navios de passageiros, militares, de investigação, etc. Nestes casos é essencial estudar o comportamento em ondas e se necessário optimizá-lo, para garantir que o navio é capaz de desempenhar a sua missão.

Existem vários fenómenos dinâmicos que degradam a capacidade do navio desempenhar a sua missão relativamente à situação de águas tranquilas. Exemplos destes problemas são:

- Os movimentos induzidos pelas ondas aumentam a resistência ao avanço e reduzem a eficiência do hélice, o que pode pôr em causa a viabilidade económica do navio.
- Os movimentos relativos de grande amplitude entre o navio e as ondas, que podem causar danos na estrutura devido ao caturrar, ou em equipamentos no convés devido ao embarque de água. Outro problema associado aos movimentos relativos de grande amplitude é a saída do hélice da água o que origina sobrecargas na máquina e veio propulsores.
- As acelerações, para além de induzirem um esforço extra na carga e equipamentos, podem causar enjoo na tripulação (ou passageiros) degradando a sua capacidade para executar as tarefas.
- O balanço excessivo impede que pessoas se mantenham em pé, e em certas situações pode mesmo por em causa a segurança do navio.
- Em navios de grandes dimensões, os esforços induzidos na estrutura por ondas de grande amplitude podem ser excessivamente elevados.

Os problemas descritos acima podem ser identificados e corrigidos (ou pelo menos minimizados) durante o projecto do navio, idealmente durante a fase inicial do projecto.

O projecto segue a seguintes três fases:

Definição das características principais, onde se conhece apenas as dimensões principais do navio.

Projecto preliminar, onde se obtém uma descrição mais detalhada do casco e os métodos de cálculo de comportamento no mar podem ser utilizados para avaliar e melhorar a performance do navio. Esta é a fase onde normalmente se fazem os ensaios de resistência e propulsão e por vezes também os ensaios de comportamento em ondas.

Projecto detalhado, onde a forma do casco e todos os parâmetros principais são definidos e a análise de comportamento em ondas se concentra em aspectos específicos tais como a inclinação das amuras para reduzir o embarque de água no convés, ou em alternativa reduzir o caturrar, bordo livre na proa, possibilidade de instalar sistemas de controle de balanço, etc.

Pelo descrito é evidente que a aplicação dos métodos de previsão de comportamento no mar deve-se concentrar durante o projecto preliminar. Se estes métodos forem utilizados juntamente com resultados de ensaios com modelos, então podem ser também muito úteis para melhorar características específicas durante o projecto detalhado.

Adicionalmente ao projecto das formas do casco, é necessário fazer o dimensionamento da estrutura, para o qual o mais comum tem sido determinar solicitações de projecto utilizando as regras de uma Sociedade de Classificação de Navios. Estas regras são em grande parte resultado da experiência acumulada ao longo dos anos e os resultados são dados em termos de expressões semi-empíricas relativamente simples.

A alternativa, mais consistente do ponto de vista científico, métodos racionais para o dimensionamento da estrutura dos navios. Estes métodos incluem o cálculo dos esforços globais e locais induzidos pelas ondas no casco e o pós-processamento destes resultados para o cálculo do módulo das secções transversais ou das tensões máximas na estrutura. De facto a tendência actual é usar o cálculo directo das solicitações na estrutura do navio com procedimentos de cálculo hidrodinâmico complexos, mas também teoricamente mais consistentes.

Depois de justificado o interesse da análise do comportamento do navio em ondas, interessa referir que este cálculo envolve dois aspectos que devem ser combinados numa metodologia de análise do problema. O primeiro é o problema hidrodinâmico de interacção entre a estrutura e as ondas. O método clássico de resolver o problema passa por formulá-lo no âmbito do escoamento potencial com um método condição fronteira, linearizá-lo e resolvê-lo com um processo numérico de discretização das fronteiras. Se necessário, alguns efeitos viscosos e não lineares podem ser introduzidos à posteriori nas equações do equilíbrio dinâmico global. O tratamento matemático e numérico deste problema é relativamente complexo, no entanto enquadra-se no âmbito de uma disciplina de Mestrado. O segundo aspecto consiste na correcta representação das características estocásticas das respostas do sistema. De facto as ondas têm características aleatórias que são transmitidas ao comportamento da estrutura através das forças de excitação provocadas pelas ondas. Nestes apontamentos aborda-se o primeiro problema.

2 TEORIA DE ESCOAMENTO POTENCIAL

Introdução

Neste capítulo apresenta-se a formulação do escoamento potencial em torno do casco de um navio com velocidade de avanço e movimentos oscilatórios induzidos por ondas incidentes. Esta formulação serve de base à solução do problema de condição fronteira. A solução do escoamento em torno do casco resulta no cálculo do potencial de velocidade do escoamento, ou seja, assume-se que o fluido é incompressível, invíscido e irrotacional.

Deste modo o campo de velocidades do fluido pode ser expresso por uma função escalar Φ , que é o potencial de velocidade, e que deve satisfazer a equação da continuidade e as condições de fronteira próprias do problema. Na primeira parte do capítulo apresenta-se a formulação exacta (dentro da hipótese de fluido ideal), o que resulta num problema não-linear sem solução prática. Na segunda parte faz-se a linearização do problema de condição fronteira utilizando uma expansão do potencial de velocidade.

O desenvolvimento de um método teórico para a previsão das respostas dos navios em ondas começa pela formulação do problema de condição fronteira apropriado. Geralmente (quase sempre) é assumido que o fluido é ideal, ou seja, invíscido e irrotacional, de modo a poder-se utilizar a teoria dos escoamentos potenciais. Esta hipótese pode ser justificada porque o problema é essencialmente dependente de forças gravíticas e as forças viscosas têm um papel de menor importância. No seguimento do texto ir-se-à ver que em alguns casos particulares os efeitos viscosos têm que ser considerados.

A formulação exacta do problema de condição fronteira conduz ao problema de superfície livre não-linear, com as condições cinemática e dinâmica aplicadas nas fronteiras (superfície livre e do casco) nas suas posições instantâneas e as condições apropriadas a distâncias infinitas. O escoamento é governado pela equação de Laplace tridimensional a qual descreve a conservação de massa para escoamentos potenciais.

Este problema é muito complexo e tem de ser simplificado até ao ponto em que tenha solução numérica possível com um esforço computacional razoável. Existem alguns

modos de fazer esta simplificação e a escolha depende das hipóteses iniciais que se pretende assumir. Estas hipóteses geralmente envolvem restrições nos parâmetros que governam a solução, que são:

- A amplitude de oscilação das fronteiras, ζ_a, ξ_a
- Frequência de oscilação das fronteiras, ω
- Velocidade de avanço do navio, U
- Esbeltez do casco, $\varepsilon = (B, T) / L$, onde B é a boca e T a imersão média

As simplificações envolvem remover as não-linearidades das condições fronteira e simplificar os aspectos tri-dimensionais do problema. Deste modo, com o objectivo de linearizar o problema, assume-se que as amplitudes de oscilação das fronteiras são suficientemente pequenas e o navio deve ser esbelto. Existem diversos modos de trabalhar estas simplificações, o que resulta em diferentes soluções para o problema dos movimentos de navios em ondas. No entanto, devido às simplificações há alguns efeitos físicos do problema que deixam de ser contabilizados pelas formulações, o que pode afectar de forma significativa os resultados em certas situações e assim reduzir a gama de aplicação dos métodos.

Na figura 2.1 estão classificados em termos do domínio de aplicabilidade (teórica), os métodos mais conhecidos no âmbito da teoria linear dos movimentos de navios. Na classificação foram utilizados dois parâmetros, a frequência de oscilação das fronteiras (movimentos do navio e da superfície livre) e esbeltez do casco. O diagrama deve ser lido do seguinte modo, por exemplo: os métodos das faixas são válidos para frequências elevadas e cascos muito esbeltos.

Em termos gerais pode-se dizer que os métodos válidos para domínios de aplicabilidade mais alargados, são também os que exigem maior esforço computacional e estão sujeitos a maiores problemas numéricos. Então necessitam por um lado de computadores mais potentes e por outro lado são menos acessíveis a pessoal não especialista. Deste modo, ao desenvolver um novo método há que ter em conta os objectivos, o que inclui o tipo de utilização que vai ser dada e as gamas de parâmetros em que vai ser utilizado.

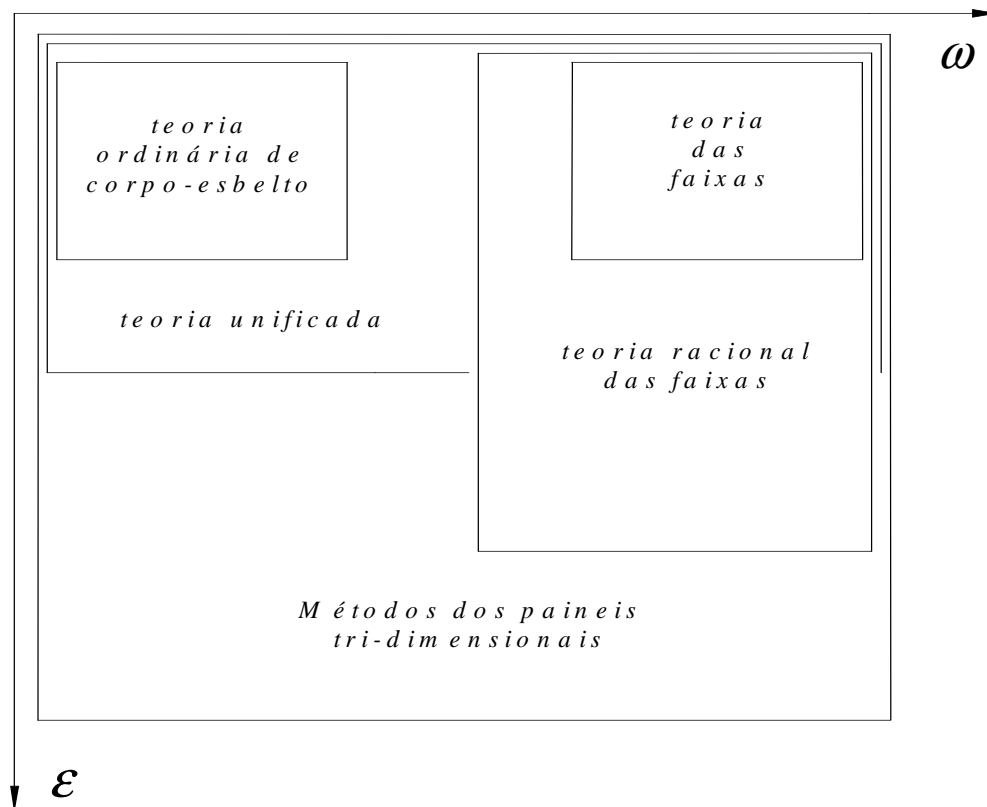


Figura 2.1 Classificação dos métodos de cálculo de comportamento de navios em ondas

Hipóteses de Fluido Ideal

O primeiro passo para resolver o problema de condição fronteira é estabelecer equações diferenciais que descrevam o escoamento do fluido. O grau de complexidade destas equações depende da descrição matemática das propriedades do fluido e do escoamento. No caso mais geral o escoamento é descrito pelas equações de Navier-Stokes, que representam o escoamento de fluidos com densidade constante e Newtonianos. No entanto estas equações diferenciais não-lineares são muito complexas de resolver, excepto para alguns casos simples. É então necessário introduzir algumas simplificações de modo a tornar a análise do problema mais tratável.

Deste modo assume-se que existe uma função escalar que satisfaz a equação de continuidade em todo o domínio do fluido (excepto em pontos singulares). Esta função escalar é o potencial de velocidade que existe se se assumir as seguintes hipóteses: o

fluido é homogéneo, incompressível, invíscido e as tensões superficiais podem ser desprezadas.

Embora a densidade da água do mar varie no tempo e de local para local, estas variações são muito pequenas e na prática pode-se assumir que a densidade da água é constante. A água pode também ser considerada incompressível pois o seu módulo de compressibilidade é muito elevado. Além disso no mar as ondas geradas pelo vento ou pelo navio e os efeitos de gravidade não produzem acelerações extremamente elevadas, como em outras situações onde é necessário considerar os efeitos da compressibilidade da água. No caso de um fluido homogéneo e incompressível a equação de conservação de massa reduz-se à equação de continuidade.

No caso geral o escoamento é representado de forma vectorial pelo vector de velocidade das partículas. Para que o vector de velocidade possa ser representado pelo gradiente de uma função escalar (potencial de velocidade) é necessário que o escoamento não tenha vorticidade, logo o fluido deve ser irrotacional. A representação não vectorial do escoamento simplifica bastante a análise do problema. A vorticidade no fluido pode ser alterada apenas pela acção da viscosidade, daí o requisito de o fluido ser invíscido. Esta hipótese pode ser assumida pois a viscosidade da água é muito pequena e no problema que se pretende formular grande parte do escoamento mantém-se irrotacional. A equação da continuidade juntamente com as características de fluido invíscido e irrotacional conduzem à equação de Laplace.

O potencial de velocidade é determinado resolvendo o problema de condição fronteira apropriado. Com o potencial de velocidade pode-se determinar o campo de velocidades do fluido e finalmente as pressões obtêm-se pela aplicação da equação de Bernoulli.

Dentro das hipóteses assumidas aquela que talvez induza algumas restrições, ou limitações, é a de escoamento invíscido. De facto as forças viscosas podem ser desprezadas, na maior parte dos casos, para os movimentos de arfagem e cabeceio. Nestes casos os efeitos inérciais associados às flutuações da superfície livre são dominantes. Por outro lado para os movimentos no plano horizontal (avanço, abatimento e guinada) os efeitos viscosos podem-se tornar importantes.

No caso do balanço, o amortecimento invíscido devido à geração de ondas é pequeno e por outro lado é normal haver grande amplificação dinâmica na gama de frequências à

volta da ressonância. Por estas razões os efeitos viscosos são importantes no estudo do movimento de balanço. Actualmente não existem métodos teóricos satisfatórios para estimar o amortecimento viscoso em balanço.

No caso de cascos rápidos tais como os SWATHs (Small Water-plane Area Twin Hull), o amortecimento gerado pela radiação de ondas é relativamente pequeno, e os efeitos viscosos tornam-se importantes também para os movimentos verticais.

Nestes casos, na prática a solução é decompor as forças hidrodinâmicas em viscosas e inviscidas, calcular as componentes viscosas recorrendo a procedimentos empíricos e finalmente combiná-las nas equações do movimento para obter as respostas do navio.

Quando ondas muito curtas, tais como as ondas capilares, deformam a superfície da água, as tensões superficiais tendem a contrariar as deformações e aplanar a superfície de novo. No entanto as ondas capilares têm períodos muito pequenos e não têm qualquer interesse do ponto de vista da engenharia. Para as ondas de períodos maiores que interessa considerar, a força que tende a aplanar a superfície livre é a gravítica. Então é possível desprezar o efeito das tensões superficiais no estudo da hidrodinâmica de navios.

Sistemas de Coordenadas

É conveniente utilizar três sistemas de coordenadas para estudar o escoamento em torno do casco e os movimentos do navio a navegar com velocidade de avanço através de um campo de ondas incidentes. Os sistemas de coordenadas são ortogonais e direitos (right handed), um deles é fixo no espaço, $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, o segundo avança com a velocidade média do navio, $X = (x, y, z)$ e o terceiro está fixo no navio logo tem a velocidade média e os movimentos oscilatórios do navio, $X' = (x', y', z')$. A figura 3.1 representa os três sistemas de referência.

O sistema de referência fixo no espaço (X_0) tem a origem e os eixos x_0 e y_0 sobre o plano da superfície livre calma, o eixo- x_0 aponta na direcção da velocidade do navio e o eixo- z_0 é vertical positivo para cima. Este sistema de coordenadas será utilizado para representar a condição fronteira na superfície livre. O sistema de referência que avança com a velocidade média do navio (X) é inercial, tem os eixos paralelos ao sistema fixo

e a origem sobre a superfície livre calma e na vertical do centro de gravidade do navio. A relação entre os dois sistemas de coordenadas é dada pela seguinte transformação linear:

$$\vec{x} = (x, y, z) = (x_0 - Ut, y_0, z_0) \quad (3.1)$$

onde U é a velocidade de avanço do navio e a variável t representa o tempo. Em todo o texto as variáveis vectoriais serão representadas com uma seta por cima.

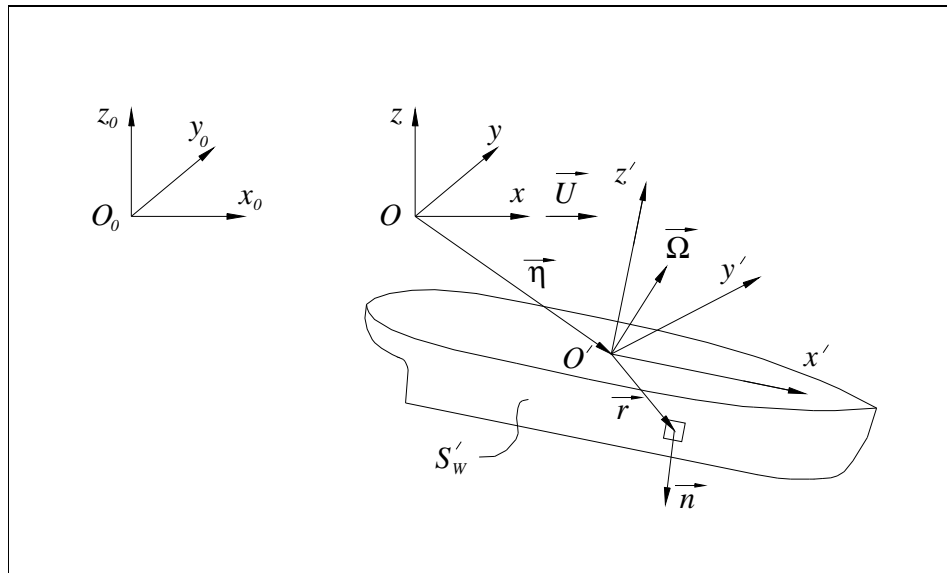


Figura 3.1 Relação entre os três sistemas de coordenadas

O sistema de referência de inércia que avança com o navio será utilizado para representar os movimentos oscilatórios do navio (depois de assumir que os movimentos angulares são de pequena amplitude). O navio como corpo rígido oscila com três translações e três rotações. As translações nas direcções dos eixos x , y e z denominam-se respectivamente por avanço, abatimento e arfagem e serão representadas por ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 . As rotações em torno dos eixos x , y e z denominam-se respectivamente por balanço, cabeceio e guinada e serão representadas por ξ_4 , ξ_5 e ξ_6 . A figura 3.2 representa este sistema de coordenadas e as convenções para os movimentos oscilatórios.

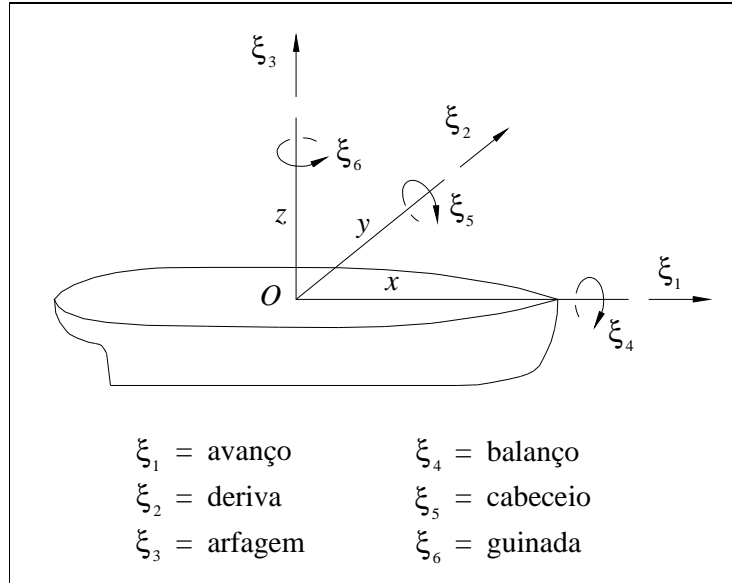


Figura 3.2 Sistema de coordenadas inercial e convenção para os deslocamentos

O vector que representa o deslocamento $\vec{\alpha}$ de um ponto na superfície do corpo S_w no sistema de referência que avança com velocidade constante U , é definido por:

$$\vec{\alpha} = \vec{x} - \vec{x}' \quad (3.2a)$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\eta} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (3.2b)$$

onde $\vec{\eta} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ e $\vec{\Omega} = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$ são os vectores dos deslocamentos oscilatórios de translação e rotação, \vec{r} é o vector de posição de um ponto na superfície S_w relativamente ao sistema de referência fixo no corpo $X' = (x', y', z')$ e ' \times ' representa o produto vectorial. Os sistemas de coordenadas e os vectores são representados na figura 3.1. Numa condição de equilíbrio estacionário o vector $\vec{\alpha}$ é constante.

Formulação do Problema Hidrodinâmico

Assumindo que o fluido é homogéneo, incompressível e invíscido, então o problema hidrodinâmico pode ser formulado pela teoria de escoamentos potenciais. Isto quer dizer que o vector de velocidade das partículas do fluido, $\vec{V}(\vec{x}_0, t)$, pode se representado pelo gradiente de um potencial de velocidade $\Phi(\vec{x}_0, t)$, ou seja $\vec{V} = \nabla\Phi$.

O operador gradiente é $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. O potencial de velocidade por sua vez satisfaz a equação de Laplace no domínio do fluido:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.3)$$

Conhecido o potencial de velocidade a pressão no fluido, $p(\vec{x}_0, t)$, pode ser determinada pela equação de Bernoulli:

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gz_0 \right) \quad (3.4)$$

onde ρ é a densidade do fluido e g a aceleração da gravidade.

Integrando a pressão no casco obtêm-se as forças hidrodinâmicas. A dificuldade está na determinação da solução da equação de Laplace. A equação de Laplace tem muitas soluções, logo é necessário definir condições fronteira no domínio do fluido de modo a obter a solução exacta para o problema em estudo. Neste caso estudam-se os movimentos de um corpo rígido a avançar na superfície livre da água, que se assume ser infinita em todas as direcções horizontais. As fronteiras que delimitam o domínio do fluido são a superfície molhada do corpo, a superfície livre, o fundo do mar e uma superfície de controlo afastada do corpo. É necessário estabelecer condições para estas fronteiras, o que será discutido nas próximas secções.

2.0.1 Condição Fronteira no Corpo

Quando o fluido está em contacto com a fronteira de um corpo rígido, a condição cinemática requer que o fluido não penetre a fronteira e que não se criem espaços vazios entre o fluido e a fronteira. Então no caso de um corpo em movimento, a velocidade do fluido adjacente e normal à fronteira do corpo deve ser igual à componente de velocidade da fronteira normal a ela mesma:

$$\vec{V}_S \cdot \vec{n}_w = \vec{V} \cdot \vec{n}_w \quad \text{em } S_w \quad (3.5)$$

onde S_w é a superfície molhada do corpo, $\vec{V}_S = \dot{\alpha}$ é a velocidade da superfície molhada do corpo e o ponto sobre o vector de deslocamentos significa derivada em ordem ao

tempo, \vec{V} é a velocidade do fluido e \vec{n}_w é o vector unitário normal a superfície do corpo e direccionado para o fluido.

A condição fronteira no corpo deve ser satisfeita na superfície molhada exacta do corpo a oscilar, o que torna o problema matematicamente intratável (de acordo com a solução que aqui vai ser escolhida). Por esta razão vai ser necessário expandir a condição fronteira no corpo em torno da superfície molhada média de um modo sistemático, para se considerar a interacção linear entre os escoamentos estacionário e oscilatório. Isto será discutido na secção 3.5.3.

2.0.2 Condição Fronteira na Superfície Livre

A superfície livre do fluido é definida pela sua elevação:

$$z_0 = \zeta(x_0, y_0; t) \quad (3.6)$$

As condições fronteira cinemática e dinâmica devem ser satisfeitas na superfície livre. A condição fronteira cinemática implica que sobre esta superfície a velocidade vertical do fluido deve ser igual a velocidade vertical da própria fronteira. A condição fronteira dinâmica diz que a pressão na superfície livre é dada pela equação de Bernoulli. As condições cinemática e dinâmica são representadas respectivamente por:

$$\frac{D}{Dt}(\zeta - z_0) = 0 \quad \text{em } z_0 = \zeta \quad (3.7)$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz_0 = 0 \quad \text{em } z_0 = \zeta \quad (3.8)$$

onde a derivada total no sistema de referência fixo em terra é:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \quad (3.9)$$

A pressão sobre a superfície livre é considerada zero e o índice t indica diferenciação em ordem ao tempo. Em todo o texto que se segue, as variáveis em índice indicam diferenciação em relação a essa variável.

Substituindo a equação (3.8) em (3.7) com $z_0 = \zeta$ obtém-se:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\right) \left(\Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 + gz_0\right) = 0 \text{ em } z_0 = \zeta \quad (3.10)$$

Desenvolvendo a expressão anterior chega-se à condição fronteira na superfície livre exacta:

$$\Phi_{tt} + g\Phi_{z_0} + 2\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi_t + \frac{1}{2} \nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = 0 \text{ em } z_0 = \zeta \quad (3.11)$$

Esta condição fronteira é não-linear devido aos termos quadráticos. Por outro lado a posição da superfície livre não é conhecida à partida. Por estas duas razões é muito difícil resolver o problema hidrodinâmico satisfazendo a expressão (3.11), portanto vai ser deduzida na secção 3.5.2 uma condição fronteira na superfície livre linear.

2.0.3 Condição no Fundo

Assume-se que o fundo do mar está a uma distancia do corpo suficientemente grande para que as perturbações no fluido originadas pelo corpo e pelas ondas incidentes não se sintam. Teoricamente diz-se que é uma situação de águas profundas e na prática a distancia vertical ao fundo tende para infinito.

A condição fronteira no fundo em águas profundas indica que o fluido está em repouso nesta zona. Para um fundo horizontal:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \text{ em } z \rightarrow \infty \quad (3.12a)$$

No caso do fundo do mar se encontrar a uma distância finita da superfície, h , então a condição cinemática indica a velocidade das partículas de fluido sobre o fundo e normal ao fundo deve ser igual à componente normal da velocidade do fundo, ou seja zero:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \text{ em } z \rightarrow -h \quad (3.12b)$$

2.0.4 Condição de Radiação para Infinito

No caso do problema hidrodinâmico ser formulado e resolvido no domínio do tempo, os movimentos do fluido causados pelo navio tendem para zero quando a distancia à origem da perturbação tende para infinito (para um intervalo de tempo finito):

$$\nabla\Phi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \text{para } t < \infty \quad (3.13)$$

onde r é a distancia horizontal do navio a um ponto no fluido.

Neste caso não é necessário a solução satisfazer uma condição de radiação em infinito.

Quando o problema é resolvido no domínio da frequência, as condições fronteira definidas em todas as fronteiras físicas, nomeadamente na superfície livre, na superfície molhada do corpo e no fundo do mar, não são suficientes para assegurar uma solução única em problemas onde o domínio do fluido ocupa uma região infinita. Uma vez que se assume que o oceano é infinito em todas as direcções horizontais, há que definir mais uma condição fronteira no fluido em infinito. Esta condição conhecida como “condição de radiação para infinito” é descrita numa superfície fictícia no infinito, S_∞ , que se estende da superfície livre ao fundo do mar.

A condição de radiação para infinito pode ser facilmente entendida para alguns casos de problemas físicos. Observando o movimento do fluido produzido por um corpo a oscilar na superfície livre, as ondas geradas parecem radiar para infinito em todas as direcções horizontais e desaparecerem em infinito. Este tipo de condição de radiação foi originalmente utilizada por Sommerfeld (1949) no estudo da acústica e é frequentemente designada por condição de Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - ik\Phi \right) = 0 \quad (3.14)$$

onde k é o número de onda. A condição de Sommerfeld é definida para ondas cilíndricas e indica que as ondas geradas pelo corpo devem-se comportar em infinito como ondas progressivas afastando-se da fonte da perturbação.

No caso das ondas de Kelvin geradas pelo navio a avançar em águas tranquilas com velocidade constante na direcção positiva do eixo- x , as perturbações na superfície livre propagam-se apenas na direcção de jusante do escoamento. Então a condição de radiação em infinito para a onda de Kelvin é:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi = 0 \quad (3.15)$$

Como a onda de Kelvin não tem uma forma cilíndrica, a expressão (3.15) não pode ser descrita pela condição de Sommerfeld.

No caso mais complexo do navio ter simultaneamente velocidade de avanço e movimentos oscilatórios induzidos por um campo de ondas incidentes, a condição de radiação em infinito é muito mais difícil de definir. Nesta situação a propagação das ondas geradas pelo navio depende de dois parâmetros, a velocidade do navio e a frequência de oscilação. O sistema de ondas estacionário interage com os sistemas de ondas oscilatórios devidos aos movimentos do navio e difracção da onda incidente. Como consequência, se a velocidade do navio for inferior à velocidade de grupo das ondas radiadas e difractadas, estas ondas propagam-se em todas as direcções. Se a velocidade do navio for superior à velocidade de grupo, então as ondas geradas propagam-se apenas na direcção de jusante do escoamento.

Linearização do Problema Hidrodinâmico

Na secção anterior apresentou-se o problema de condição fronteira que deve ser resolvido, com o objectivo de determinar o potencial de velocidade do escoamento em torno do navio a avançar em mar ondoso. O problema “exacto” (exacto no âmbito das limitações de fluído incompressível e invíscido) envolve a determinação do potencial de velocidade que satisfaz a equação de Laplace no domínio do fluído, a condição de fronteira não-linear na superfície livre e a condição fronteira na superfície oscilatória do corpo.

A formulação “exacta” conduz à condição fronteira não linear válida na superfície livre do fluído e à condição fronteira cinemática na superfície oscilatória do corpo. Estas condições fronteira tornam o problema muito complexo, devido não só à não-linearidade da superfície livre, mas também ao facto de haver interacção entre a superfície livre e a superfície do corpo cujas formas e posições não são conhecidas à partida. Para resolver o problema é necessário linearizar as condições fronteira, o que quer dizer que os efeitos de ordem superior são desprezados.

2.0.5 Método de Pequenas Perturbações

Se os efeitos não-lineares no problema hidrodinâmico tiverem uma importância relativamente pequena, então os termos não-lineares podem ser tratados como perturbações ao comportamento essencialmente linear. Estas perturbações são geralmente identificadas por um parâmetro pequeno ε . Se o sistema for

“aproximadamente” linear, então a solução pode ser representada por uma expansão em série de potências no parâmetro ε . Os métodos para obter soluções dependentes do tempo são conhecidos por “métodos das pequenas perturbações”.

No caso do problema hidrodinâmico, o potencial de velocidade do fluido e todas as outras quantidades derivadas, tais como a velocidade do fluido, elevação da superfície livre, pressões e forças hidrodinâmicas e os movimentos do navio, podem ser representadas por séries de potências de um parâmetro ε adimensional. Por exemplo o potencial de velocidade será:

$$\Phi(\vec{x}_0, t; \varepsilon) = \Phi^{(0)} + \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + \dots \quad (3.16)$$

onde o índice representa a ordem dos vários termos.

Os termos de ordem zero representam os valores na condição estacionária associados com $t=0$. As séries são introduzidas nas equações que governam o problema, incluindo as condições fronteira, e os termos são agrupados de acordo com a ordem da sua potência em ε . Os coeficientes de cada potência resultam numa sequência de equações e condições fronteira, onde os coeficientes de ε estão associados à solução de primeira ordem, os coeficientes de ε^2 estão associados à solução de segunda ordem, etc. Deste modo, o método das pequenas perturbações resolve o problema sistematicamente passo a passo até à ordem da solução desejada.

As diferenças entre o problema simplificado deste modo e o problema na sua forma não-linear completa, tendem a desaparecer se a ordem da solução for suficientemente elevada. No entanto quanto mais alta a ordem do problema, mais complexa é a solução e mais exigente em termos de esforço computacional.

O escoamento em torno do casco pode ser decomposto em duas partes, sendo uma o escoamento estacionário devido ao avanço do navio em águas tranquilas. A outra parte é o escoamento oscilatório associado às ondas incidentes, e às ondas difractadas e radiadas devido à presença e movimentos do casco no campo de escoamento estacionário. O potencial de velocidade pode então ser representado do seguinte modo:

$$\Phi(\vec{x}_0, t) = \Phi(x + Ut, y, z, t) = \bar{\Phi}(\vec{x}) + \tilde{\Phi}(\vec{x}, t) \quad (3.17)$$

onde $\bar{\Phi}$ e $\tilde{\Phi}$ representam respectivamente os potenciais de velocidade estacionário e variável. Evidentemente estes potenciais satisfazem a equação de Laplace.

Voltando às expansões em séries de potências das quantidades hidrodinâmicas, estas são convergentes se o parâmetro de perturbação ε existe e é inferior a um. O parâmetro adimensional ε utilizado para descrever o potencial de velocidade estacionária $\bar{\Phi}$, assume que as deformações da superfície livre devido à velocidade do casco são pequenas. Deste modo é necessário impor restrições nas características geométricas do casco e na velocidade de avanço.

Se o navio que avança através da superfície livre for esbelto, então as perturbações geradas no fluido pela sua passagem são pequenas. Neste caso o parâmetro ε pode ser definido pela razão entre a boca e o comprimento do navio ($\varepsilon = B/L$). Por outro lado se o navio não for esbelto, mas avançar com uma velocidade baixa, as perturbações induzidas no fluido são também pequenas. Neste caso pode-se assumir a “hipótese de baixa velocidade”, segundo a qual a razão entre as velocidades induzidas pela perturbação e a velocidade de avanço é pequena. Em geral os navios rápidos são esbeltos e os navios bojudos são lentos, sendo razoável assumir que o parâmetro ε é suficientemente pequeno para que a expansão do potencial estacionário seja válida.

No caso do potencial oscilatório, para que os efeitos não-lineares possam ser considerados relativamente pequenos impõe-se que o declive das ondas incidentes seja bastante inferior a um, logo as ondas são de pequena amplitude. Consequentemente as ondas difractadas, as ondas radiadas e os movimentos induzidos no navio são também considerados de pequena amplitude. O parâmetro ε está relacionado com o declive das ondas incidentes.

Fica então demonstrado que dadas certas restrições geométricas, de velocidade de avanço e de amplitude de oscilação das fronteiras, o método das pequenas perturbações pode ser aplicado para representar o potencial de velocidade do escoamento em torno do navio a avançar em mar ondoso. Todas as outras quantidades hidrodinâmicas de interesse têm também representação por expansões do mesmo tipo, pois derivam directamente do potencial de velocidade.

2.0.6 Condição Fronteira na Superfície Livre Linear

Foi mencionado atrás que a solução numérica da condição fronteira na superfície livre não-linear dada pela equação (3.11) é muito difícil de obter e caso se conseguisse o esforço computacional seria impraticável. Pode-se no entanto aplicar o método das pequenas perturbações para linearizar a condição fronteira até à primeira ordem e usar uma expansão em série de Taylor para expandir a condição fronteira em torno da superfície livre média que é conhecida à partida.

Uma vez que o escoamento é a combinação entre as partes estacionária e oscilatória, será necessário linearizar ambos os escoamentos. Começando pelo escoamento estacionário, o potencial de velocidade devido ao avanço do casco através da superfície livre pode ser representado por:

$$\bar{\Phi}(\bar{x}) = -Ux + \Phi_s(\bar{x}) \quad (3.18)$$

onde o primeiro termo é o potencial devido a velocidade do fluido a passar pelo sistema de referência e U é a velocidade de avanço do navio. O segundo termo, Φ_s , representa a perturbação estacionária devido à presença do casco.

Substituindo a expressão anterior na condição fronteira da superfície livre estacionária e desprezando os termos de ordem superior chega-se à condição fronteira linear na superfície livre para o problema do escoamento estacionário:

$$U^2(\Phi_s)_{,xx} + g\Phi_s = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad (3.26)$$

Note-se que esta equação é imposta na superfície livre média ($z = 0$) e não na elevação da onda, porque a diferença entre o valor do potencial e suas derivadas em $z = 0$ ou $z = \bar{\zeta}$ é da mesma ordem de grandeza dos termos de ordem superior já desprezados.

Para simplificar ainda mais a condição fronteira não linear do problema completo (escoamento estacionário mais oscilatório), assume-se que o termo de perturbação no potencial estacionário, devido ao avanço do navio em águas tranquilas é suficientemente pequeno e pode ser desprezado ($\Phi_s \cong 0$). Mais uma vez, isto significa que o casco deve ser esbelto, ou seja B/L deve ser pequeno. De acordo com esta hipótese, todas as parcelas associadas ao termo de perturbação do potencial estacionário são de ordem superior e podem ser desprezados no âmbito de uma condição fronteira na superfície

livre de primeira ordem para o escoamento oscilatório. O campo de velocidades do escoamento é então:

$$\vec{V}_0 = \nabla \bar{\Phi} = (-U, 0, 0) \quad (3.36)$$

A condição fronteira vem então:

$$\tilde{\Phi}_{tt} - 2U\tilde{\Phi}_{xt} + U^2\tilde{\Phi}_{xx} + g\tilde{\Phi}_z = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad (3.37a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \tilde{\Phi} + g\tilde{\Phi}_z = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad (3.37b)$$

Esta condição fronteira linearizada é imposta na superfície livre média $z=0$, pois é assumido que não existe perturbação ao potencial constante $-Ux$, ou seja não existe elevação da superfície livre estacionária.

O modo de lidar com a condição fronteira (3.37b) distingue as várias soluções para o problema hidrodinâmico do comportamento do navio no mar, nomeadamente: teoria ordinária de faixas, teoria de faixas, teoria ordinária do corpo esbelto, teoria unificada do corpo esbelto, teoria de segunda ordem do corpo esbelto, teoria 2 1/2D e métodos dos painéis.

2.0.7 Condição Fronteira Linear no Corpo

A condição fronteira não-linear no corpo foi apresentada pela equação (3.5). Esta condição fronteira é aplicada na superfície molhada oscilatória S_w , que não é conhecida à partida. O objectivo da linearização é obter uma expressão para a condição fronteira, que possa ser satisfeita na superfície molhada média do corpo S_0 , conhecida à partida.

No passado alguns autores aplicaram a expressão para a condição fronteira dada pela equação (3.5) directamente à superfície molhada média do corpo e de facto ainda hoje se utilizam algumas teorias das faixas que resultam da aplicação desta simplificação. No entanto, Timman e Newman (1962) demonstraram que uma teoria de primeira ordem consistente deve incluir algumas interferências entre os escoamentos estacionário e oscilatório, interferências estas que não podem ser representadas por esta simplificação.

A condição fronteira no corpo (3.5) pode ser representada em termos do vector de velocidade $\hat{\alpha}$ resultando:

$$-\vec{\alpha} \cdot \vec{n}_w + \vec{V} \cdot \vec{n}_w = 0 \quad \text{em } S_w \quad (3.38)$$

Para linearizar a condição fronteira começa-se por expandir o vector de velocidade do fluido \vec{V} em série de Taylor em torno da posição média do casco S_0 :

$$\vec{V}(\vec{x}', t) = \vec{V}|_{S_0} + (\vec{\alpha} \cdot \nabla) \vec{V}|_{S_0} + O(\varepsilon^2) \quad (3.39)$$

O vector unitário e normal à superfície do corpo na sua posição exacta \vec{n}_w , pode também ser representado em termos do vector unitário e normal à superfície média do corpo \vec{n} . A relação entre os dois vectores é estabelecida pela matriz de transformação que inclui os ângulos de Euler:

$$\vec{n}_w = [D] \vec{n} \quad (3.40)$$

Assumindo que os deslocamentos angulares são pequenos, a matriz de transformação que inclui produtos de funções trigonométricas nos deslocamentos angulares definidos em $o' - x' y' z'$, pode ser simplificada para dar uma relação linear, nos deslocamentos angulares definidos em $o - x y z$, entre \vec{n}_w e \vec{n} . De novo são desprezados os termos de $O(\varepsilon^2)$. A matriz de transformação simplificada é:

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_6 & \xi_5 \\ \xi_6 & 1 & -\xi_4 \\ -\xi_5 & \xi_4 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Combinando (3.40) e (3.41) e assumindo a hipótese de pequenos deslocamentos, o vector unitário normal a superfície do corpo na sua posição exacta pode ser aproximado a:

$$\vec{n}_w = \vec{n} + (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{\alpha} \quad (3.42)$$

onde \vec{n} é a normal unitária na superfície média do casco (conhecida).

A condição fronteira cinemática no corpo linearizada e aplicada em S_0 , obtém-se substituindo o vector de velocidade do fluido expandido (3.39) e a normal unitária (3.42) na equação (3.38):

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = [\vec{\alpha} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \nabla) \vec{V}] \cdot \vec{n} \quad \text{em } S_0 \quad (3.43a)$$

ou em termos da derivada espacial do potencial de velocidade:

$$\Phi_n = [\dot{\alpha} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \nabla)\vec{V}] \cdot \vec{n} \quad \text{em } S_0 \quad (3.43b)$$

Relembrando que o potencial de velocidade foi decomposto em componentes estacionária e oscilatória (ver equação 3.17), o vector de velocidade pode ser representado por:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 \quad (3.44)$$

onde \vec{V}_0 representa o campo de velocidades estacionário e \vec{V}_1 o campo de velocidades oscilatório.

Substituindo a expressão anterior em (3.43) resulta nas condições de fronteira a ser satisfeitas pelos escoamentos estacionário e não-estacionário. Para o escoamento estacionário, uma vez que existe apenas velocidade tangencial na vizinhança do corpo tem-se:

$$\vec{V}_0 \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{em } S_0 \quad (3.45)$$

Lembrando ainda que o potencial estacionário é dado por $\bar{\Phi} = -Ux + \Phi_s$ e $\vec{V}_0 = \nabla\bar{\Phi}$, então a condição fronteira cinemática a ser satisfeita pela parte de perturbação do potencial estacionário é:

$$\frac{\partial\Phi_s}{\partial n} = Un_1 \quad \text{em } S_0 \quad (3.46)$$

onde n_1 é a componente da normal unitária na direcção do eixo-x.

Para o escoamento oscilatório a condição cinemática vem:

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n} = [\dot{\alpha} + (\vec{V}_0 \cdot \nabla)\vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \nabla)\vec{V}_0] \cdot \vec{n} \quad \text{em } S_0 \quad (3.47)$$

A condição fronteira (3.47) foi deduzida por Timman e Newman (1962) para contabilizar de uma forma consistente a interacção entre os escoamentos estacionário e oscilatório numa teoria linear de primeira ordem. Em algumas teorias dos movimentos dos navios é utilizada uma forma mais simples desta condição fronteira, o que resulta

em coeficientes de acoplamento entre a arfagem e cabeceio que não satisfazem o requisito de simetria.

2.0.8 Descomposição do Potencial de Velocidade

No processo de linearização decompôs-se o potencial de velocidade Φ em potencial estacionário $\bar{\Phi}$ e potencial oscilatório $\tilde{\Phi}$. A parte estacionária foi ainda separada em escoamento uniforme $-Ux$ e escoamento estacionário perturbado Φ_s . Para a linearização das condições fronteira foi assumido que o escoamento oscilatório tal como os movimentos induzidos são de pequena amplitude. Por esta razão o potencial oscilatório $\tilde{\Phi}$ pode ser decomposto linearmente em componentes independentes associadas às: ondas incidentes, ondas difractadas devido à presença do casco no campo de ondas incidente e ondas radiadas devido aos movimentos oscilatórios do casco. Deste modo o potencial de velocidade oscilatório vem:

$$\tilde{\Phi} = \Phi^I + \Phi^D + \Phi^R \quad (3.48)$$

onde Φ^I é o potencial da onda incidente, Φ^D é o potencial de difracção e Φ^R é o potencial de radiação. O potencial de radiação pode ainda ser decomposto em contribuições de cada um dos seis movimentos oscilatórios:

$$\Phi^R = \sum_{j=1}^6 \Phi_j^R \quad (3.49)$$

Substituindo (3.48) em (3.47) obtém-se a condição fronteira no corpo em termos das componentes do potencial oscilatório:

$$\frac{\partial}{\partial n} (\Phi^I + \Phi^D) + \frac{\partial \Phi^R}{\partial n} = [\dot{\alpha} + (\nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla) \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} \cdot \nabla) \nabla \bar{\Phi}] \cdot \bar{n} \quad \text{em } S_0 \quad (3.50)$$

Uma vez que a condição fronteira é aplicada numa superfície não oscilatória S_0 , que pode ser considerada a superfície molhada no equilíbrio estático (ou pode incluir os efeitos estacionários de sobreimersão e caimento associados ao escoamento estacionário), então a condição fronteira (3.50) pode ser separada em duas condições associadas a dois problemas independentes:

$$\frac{\partial \Phi^R}{\partial n} = [\dot{\alpha} + (\nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla) \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} \cdot \nabla) \nabla \bar{\Phi}] \cdot \bar{n} \quad \text{em } S_0 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \Phi^D}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi^I}{\partial n} \quad \text{em } S_0 \quad (3.52)$$

A primeira condição está relacionada com o problema da radiação, onde o navio com velocidade de avanço é forçado a oscilar na ausência de ondas incidentes. A segunda condição está relacionada com o problema da difracção, onde o navio avança mas restringido na sua posição média, portanto sem movimentos oscilatórios.

A condição fronteira (3.51) é normalmente apresentada de uma forma mais compacta definindo os vectores \tilde{n} e \tilde{m} de um modo similar ao usado por Ogilvie e Tuck (1969):

$$\tilde{n} = \begin{cases} (n_1, n_2, n_3) = \vec{n} \\ (n_4, n_5, n_6) = \vec{r} \times \vec{n} \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\tilde{m} = \begin{cases} (m_1, m_2, m_3) = -\frac{(\vec{n} \cdot \nabla) \nabla \bar{\Phi}}{U} \\ (m_4, m_5, m_6) = -\frac{(\vec{n} \cdot \nabla) (\vec{r} \times \nabla \bar{\Phi})}{U} \end{cases} \quad (3.54)$$

onde \vec{r} é o vector de posição relativamente à origem do sistema de coordenadas.

A quantidade \tilde{m} esta relacionada com a taxa de variação, na vizinhança do casco, de um escoamento estacionário que passa pelo casco e tem velocidade unitária em infinito. Esta quantidade depende apenas da forma do casco.

Utilizando as expressões para os vectores \tilde{n} e \tilde{m} , a condição fronteira para o problema da radiação dada por (3.51) pode ser representada por:

$$\frac{\partial \Phi^R}{\partial n} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \Phi_j^R}{\partial n} = \sum_{j=1}^6 (\dot{\xi}_j n_j + \xi_j U m_j) \quad \text{em } S_0 \quad (3.55)$$

Os termos \tilde{m} contêm os efeitos de convecção do campo de velocidade estacionário devido à velocidade de avanço. Se o casco for assumido esbelto então a perturbação estacionária à volta do navio é pequena e $\Phi_s \cong 0$, pelo que o campo de velocidades estacionário vem dado por $\vec{V}_0 = \nabla \bar{\Phi} = (-U, 0, 0)$. Neste caso os termos \tilde{m} tornam-se mais simples e as correcções devido à velocidade estacionária na condição fronteira são devido apenas ao ângulo de ataque com o escoamento em infinito em cabeceio e guinada. Os termos \tilde{m} reduzem-se a:

$$\tilde{m} = \begin{cases} (m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 0) \\ (m_4, m_5, m_6) = (0, n_3, -n_2) \end{cases} \quad (3.56)$$

2.0.9 Problema de Condição Fronteira Linear

De uma forma resumida, pode-se dizer que para linearizar as condições fronteira na superfície livre e na superfície do corpo foi necessário restringir alguns parâmetros básicos que governam a solução do problema hidrodinâmico dos movimentos do navio em ondas, nomeadamente:

- O casco deve ser esbelto, ou seja B/L deve ser $O(\varepsilon)$.
- A amplitude das ondas incidentes deve ser pequena.
- Os movimentos oscilatórios do navio devem ser de pequena amplitude.

Com estas simplificações o problema “exacto” formulado na secção 3.4 consiste agora em determinar o potencial de velocidade do escoamento que obedece às seguintes condições:

Equação de Laplace..... $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$ (3.3)

Cond. front. linear na sup. Livre $\Phi_{tt} - 2U\Phi_{xt} + U^2\Phi_{xx} + g\Phi_z = 0$ em $z = 0$ (3.37a)

C. F. linear no corpo (radiação) $\frac{\partial \Phi_j^R}{\partial n} = \dot{\xi}_j n_j + \xi_j U m_j, j = 1, \dots, 6$ em S_0 (3.55)

C. F. linear no corpo (difracção) $\frac{\partial \Phi^D}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi^I}{\partial n}$ em S_0 (3.52)

Cond. de repouso no fundo $\nabla \Phi \rightarrow 0$ para $z \rightarrow -\infty$ (3.12a)

Condição de radiação para infinito apropriada.

Estas condições devem formar a base para uma teoria linear e consistente para o estudo da hidrodinâmica do comportamento de navios em ondas. No entanto os efeitos tridimensionais associados à interacção entre os escoamentos estacionário e oscilatório fazem com que mesmo o problema linear seja de solução muito complexa.

2.0.10 Pressão e Forças Hidrodinâmicas

A dinâmica do navio é governada por equações do movimento que representam o equilíbrio dinâmico entre as forças hidrodinâmicas exteriores que actuam no casco e as forças de inércia e gravíticas. Uma vez resolvido o problema de condição fronteira linear formulado na subsecção anterior, ou seja, uma vez determinado o potencial de velocidade, a pressão no casco pode ser calculada pela equação de Bernoulli. Finalmente a integração de pressões resulta nas forças hidrodinâmicas.

A equação de Bernoulli no sistema de referência que avança com a velocidade média do navio é:

$$p - p_a = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gz_0 + \frac{1}{2} U^2 \right) \quad (3.57)$$

onde p é a pressão no fluido, p_a é a pressão atmosférica e ρ é a massa específica do fluido. Substituindo a decomposição do potencial (3.17) na equação de Bernoulli, resulta em dois grupos de termos. Um dos grupos de termos é constante no tempo e representa a pressão constante associada ao escoamento estacionário (equação 3.58). O outro grupo de termos é oscilatório no tempo e representa a pressão associada ao escoamento oscilatório (equação 3.59).

$$\frac{p - p_a}{\rho} = -\frac{1}{2} \left(|\nabla \bar{\Phi}|^2 + U^2 \right) \quad (3.58)$$

$$\frac{p - p_a}{\rho} = - \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\Phi} + zg \right) \quad (3.59)$$

Os termos de $O(\varepsilon^2)$ em $\tilde{\Phi}$ são desprezados nas equações anteriores. O termo zg tem a ver com a pressão hidrostática e resulta numa força oscilatória pois será integrado na superfície molhada oscilatória. A força que actua no casco resulta da integração de pressões:

$$\bar{F} = -\frac{1}{2} \iint_{s_0} \left(|\nabla \bar{\Phi}|^2 + U^2 \right) \tilde{n} ds \quad (3.60)$$

$$\tilde{F} = -\iint_{s_0} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\Phi} \right) \tilde{n} ds - \rho g \iint_s (z\tilde{n}) ds \quad (3.61)$$

\bar{F} e \tilde{F} são respectivamente as forças hidrodinâmicas estacionária e oscilatória. De aqui para a frente interessa estudar apenas as forças dependentes do tempo. De acordo com o problema de condição fronteira linear formulado, os potenciais de velocidade oscilatórios são avaliados na superfície molhada média S_0 .

O primeiro integral na equação (3.61) pode ainda ser simplificado aplicando uma variação do teorema de Stokes derivada por Ogilvie e Tuck (1969):

Se $\tilde{\Phi}(x, y, z)$ for uma função escalar diferenciável, então a seguinte relação é válida:

$$\iint_{S_0} [-\Phi_1(\tilde{n} \cdot \nabla)\nabla\bar{\Phi} + (\nabla\bar{\Phi} \cdot \nabla\tilde{\Phi})\tilde{n}] ds = -\oint_{C_0} [\tilde{\Phi}(\bar{e}_z \cdot \nabla\bar{\Phi})\tilde{n}] d\ell \quad (3.61)$$

onde \bar{e}_z é o vector unitário na direcção do eixo-z no sistema de coordenadas 0 - x y z. C_0 é a intersecção da superfície S_0 com a linha de água média e o integral é seguido na direcção contrária dos ponteiros do relógio observando o navio de cima (ver figura 3.3).

Para os movimentos de arfagem e cabeceio o integral de linha no teorema desaparece se o navio tem os costados verticais na zona da linha de água ($n_3 = n_5 = 0$). Para os outros movimentos o valor do integral de linha é desprezável se o navio for esbelto ($\bar{e}_x \cdot \bar{n} \cong 0$).

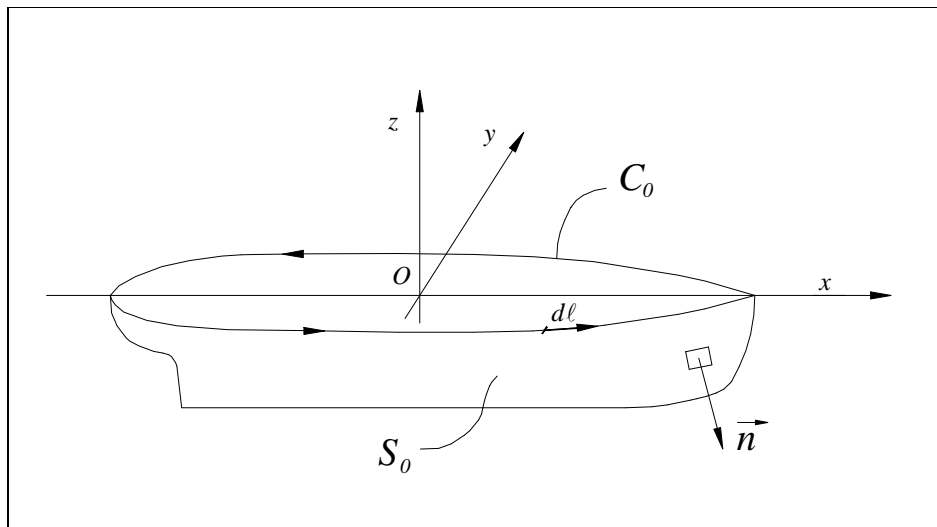


Figura 3.3 Variação ao teorema de Stokes

O objectivo de utilizar este teorema é converter o integral de superfície que inclui derivadas espaciais do potencial oscilatório $\tilde{\Phi}$, num integral de superfície que inclui apenas valores de $\tilde{\Phi}$. Deste modo evita-se o cálculo de derivadas de $\tilde{\Phi}$ em ordem às coordenadas espaciais. Introduzindo a expressão (3.62), sem o integral de linha que foi assumido igual a zero, na expressão (3.61) que dá a força hidrodinâmica resulta:

$$\tilde{F} = -\rho \iint_{s_0} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \tilde{n} - \tilde{\Phi} U \tilde{m} \right) ds - \rho g \iint_S (z \tilde{n}) ds \quad (3.63)$$

onde os vectores \tilde{n} e \tilde{m} foram definidos por (3.53) e (3.54).

Aplicando a decomposição do potencial oscilatório dado por (3.48) e (3.49) resulta em três grupos de forças hidrodinâmicas que têm a ver com o problema da excitação de onda, o problema da radiação e o problema hidrostático. As equações para estas forças são respectivamente:

$$F^E = -\rho \iint_{s_0} \left(\frac{\partial (\Phi^I + \Phi^D)}{\partial t} \tilde{n} - (\Phi^I + \Phi^D) U \tilde{m} \right) ds \quad (3.64)$$

$$F^R = -\rho \iint_{s_0} \left(\frac{\partial \Phi^R}{\partial t} \tilde{n} - \Phi^R U \tilde{m} \right) ds \quad (3.65)$$

$$F^H = -\rho g \iint_S (z \tilde{n}) ds \quad (3.66)$$

Observações Finais

Neste capítulo foi apresentada a formulação teórica para os problemas dos escoamentos estacionário e oscilatório em torno de um navio a avançar em ondas. O problema hidrodinâmico “exacto” no âmbito do escoamento potencial, é intratável devido não só às não-linearidades das condições fronteira no corpo e superfície livre, mas também porque a posição instantânea destas superfícies não é conhecida à partida. Assim as condições fronteiras foram linearizadas utilizando-se sistematicamente expansões e retendo apenas os termos de ordem 0 e 1. As linearizações assumem que o navio é esbelto e as ondas incidentes e movimentos oscilatórios do navio são de pequena amplitude.

Foi derivada uma condição fronteira linear para a superfície livre associada à perturbação estacionária do escoamento, no entanto também este problema ainda não tem uma solução prática, pelo que foi necessário assumir que o potencial da perturbação estacionário é de ordem superior e pode ser desprezado na condição fronteira linear do escoamento oscilatório.

A condição fronteira cinemática no corpo linearizada contem os termos \tilde{m} associados ao escoamento estacionário em torno do casco. Estes termos são simplificados assumindo de novo que o potencial de perturbação pode ser desprezado, ficando apenas o termo da velocidade do escoamento em infinito.

Foram também deduzidas expressões simplificadas para as forças hidrodinâmicas utilizando uma variação do teorema de Stokes. Aqui foi assumido que o navio é esbelto e tem os costados verticais em torno da linha de água.

3 SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

3.1 Introdução

Neste capítulo os problemas lineares de radiação e difracção formulados no capítulo 3, são resolvidos utilizando uma teoria de faixas. O problema de condição fronteira geral apresentado atrás, será restrito a escoamentos oscilatórios e harmónicos. Para o problema da radiação isto quer dizer que os movimentos forçados e as outras respostas, tais como pressões e forças hidrodinâmicas, são harmónicos no tempo. Para o problema da difracção, tanto as ondas incidentes como as respostas hidrodinâmicas são lineares e harmónicas no tempo.

As forças de radiação e difracção vão ser representadas em termos de coeficientes de massa acrescentada, de amortecimento e de força de excitação. Todos estes coeficientes são calculadas utilizando o método das faixas de Salvesen et al. (1970). A formulação não vai ser apresentada aqui em detalhe, pois está muito bem explicada na publicação referida. Faz-se no entanto a ponte entre a formulação apresentada no capítulo anterior e os resultados desta teoria de faixas. São indicados também os passos principais na dedução do método, pois assim permite perceber adequadamente as vantagens e principalmente as limitações desta teoria de faixas.

Basicamente em métodos de faixas o navio é dividido num número finito de faixas bidimensionais ao longo do seu comprimento. O casco do navio é representado de uma forma aproximada. Os coeficientes hidrodinâmicos associados a cada faixa são calculados resolvendo o problema de condição fronteira bidimensional para secções com a forma das secções transversais do navio que definem as faixas. Assume-se que o escoamento numa secção transversal não afecta o escoamento nas secções vizinhas. Os efeitos tridimensionais no escoamento resultam apenas do ângulo de ataque com o escoamento estacionário em infinito em cabeceio e guinada.

3.2 Forças de Radiação

3.2.1 Simplificação do Problema de Condição Fronteira

As forças de radiação que resultam do movimento oscilatório forçado de um navio esbelto a avançar com velocidade média constante, são dadas pela equação (3.65) e dependem do potencial de velocidade de radiação. O problema de condição fronteira linear que é necessário resolver para determinar o potencial de velocidade foi apresentado na secção (3.5.5).

O potencial de velocidade foi decomposto em componentes independentes (equações 3.48 e 3.49). A componente de radiação é:

$$\Phi^R = \sum_{j=1}^6 \xi_j^a \phi_j^R \quad (4.1)$$

onde ξ_j^a é a amplitude real do movimento oscilatório no modo j e ϕ_j^R é o potencial de radiação para um movimento oscilatório de amplitude unitária no modo j .

Posto isto o problema de condição fronteira linear para a radiação é:

$$\text{Equação de Laplace..... } \phi_{xx}^R + \phi_{yy}^R + \phi_{zz}^R = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{Cond. front. linear na sup. Livre } \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi^R + g \phi_z^R = 0 \text{ em } z = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{C. F. linear no corpo (radiação) } \frac{\partial \phi_j^R}{\partial n} = i \omega n_j + U m_j, \quad j = 1, \dots, 6 \text{ em } S_0 \quad (4.4)$$

$$\text{Cond. de repouso no fundo } \nabla \phi^R \rightarrow 0 \text{ para } z \rightarrow -\infty \quad (4.5)$$

$$\text{Condição de radiação para infinito... } \frac{\partial \phi^R}{\partial r} - i \frac{\omega^2}{g} \phi^R = 0 \text{ quando } |r| \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância ao corpo, ω é a frequência de oscilação, e as componentes do vector \tilde{m} são dadas por (3.56).

Dada a condição de fronteira (4.4), convém separar o potencial de radiação numa componente independente da velocidade de avanço ϕ_j^0 e a outra dependente da velocidade de avanço ϕ_j^U :

$$\phi_j^R = \phi_j^0 + \frac{U}{i\omega} \phi_j^U \quad (4.7)$$

Esta nova representação do potencial de velocidade resulta em duas condições cinemáticas na superfície do casco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j^0}{\partial n} &= i\omega n_j \\ \frac{\partial \phi_j^U}{\partial n} &= i\omega m_j \end{aligned} \quad \text{em } S_0 \quad (4.8)$$

Utilizando o vector \tilde{m} definido por (3.56) conclui-se que:

$$\begin{aligned} \phi_j^U &= 0 \quad \text{para } j=1,2,3,4 \\ \phi_5^U &= \phi_3^0 \\ \phi_6^U &= -\phi_2^0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

O aspecto importante destas últimas expressões é que deste modo é possível representar os potenciais de radiação em função de termos independentes da velocidade de avanço, ou seja:

$$\begin{aligned} \phi_j^R &= \phi_j^0 \quad , \quad \text{para } j=1,2,3,4 \\ \phi_5^R &= \phi_5^0 + \frac{U}{i\omega} \phi_3^0 \\ \phi_6^R &= \phi_6^0 - \frac{U}{i\omega} \phi_2^0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Note-se que até este momento a geometria do navio foi assumida esbelta, mas ainda não foram introduzidas simplificações próprias da teoria de faixas. De facto as simplificações introduzidas até aqui são comuns a quase todos os métodos dos painéis para os quais são conhecidos resultados numéricos. No âmbito deste trabalho e para evitar os problemas numéricos e computacionais associados aos métodos dos painéis, vão ter que ser assumidas mais simplificações no escoamento em torno do casco. Um método numérico robusto e fiável para o cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos do

navio, vai ser essencial para a aplicação da teoria no domínio do tempo a ser descrita no próximo capítulo.

Vão ser utilizadas duas hipóteses da teoria de faixas. Na primeira assume-se que a boca do casco é bastante inferior ao comprimento, logo o vector unitário normal à superfície tem uma componente na direcção longitudinal x (n_1) que é muito inferior às componentes nas direcções y e z (n_2 e n_3). Se n_1 for aproximadamente zero, então as componentes do vector unitário vêm:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \\ n_2, n_3, n_4 &= N_2, N_3, N_4 \\ n_5 &= -xN_3 \\ n_6 &= xN_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde N_2, N_3, N_4 são as componentes do vector unitário bidimensional e normal à secção transversal do navio na abcissa x . Este vector está contido em planos y - z .

Deste modo a condição fronteira cinemática no corpo que os potenciais de radiação independentes da velocidade têm que satisfazer é:

$$\frac{\partial \phi_j^0}{\partial N} = i\omega N_j, \quad j = 2, 3, 4 \quad \text{em } c_0 \quad (4.12)$$

Esta é uma condição fronteira bidimensional a ser satisfeita no contorno de cada secção transversal c_0 ao longo do comprimento do navio.

Utilizando a dependência harmónica do potencial de velocidade, a condição fronteira na superfície livre (4.3) para os potenciais de radiação independentes da velocidade, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi_j^0 + g \frac{\partial}{\partial z} \phi_j^0 = 0 \quad \text{em } z=0 \quad (4.13)$$

Para remover os efeitos tridimensionais desta condição fronteira, assume-se que a frequência de encontro é elevada de tal modo que:

$$\omega \phi_j^0 \gg U \frac{\partial}{\partial x} \phi_j^0 \quad (4.14)$$

e assim a derivada na direcção- x pode ser desprezada. A condição fronteira bidimensional na superfície livre vem:

$$-\omega^2 \phi_j^0 + g \frac{\partial}{\partial z} \phi_j^0 = 0 \quad \text{em } z=0 \quad (4.15)$$

A última hipótese requer que o comprimento de onda seja relativamente pequeno comparativamente ao comprimento do navio, o que parece uma restrição muito severa. No entanto, pelo menos para os movimentos verticais do navio, na gama de frequências baixas as forças de impulsão são dominantes e uma previsão menos correcta das forças de radiação não é relevante.

Resumindo as condições que os potências de radiação independentes da velocidade devem satisfazer são as seguintes:

Equação de Laplace..... $\phi_{yy}^R + \phi_{zz}^R = 0$ (4.16)

Cond. front. linear na sup. Livre $-\omega^2 \phi_j^R + g \frac{\partial}{\partial z} \phi_j^R = 0$ em $z=0$ (4.15)

C. F. linear no corpo (radiação) $\frac{\partial \phi_j^R}{\partial N} = i\omega N_j$, $j = 2,3,4$ em C_0 (4.12)

Cond. de repouso no fundo $\nabla \phi^R \rightarrow 0$ para $z \rightarrow -\infty$ (4.5)

Condição de radiação para infinito... $\frac{\partial \phi^R}{\partial r} - i \frac{\omega^2}{g} \phi^R = 0$ quando $|r| \rightarrow \infty$ (4.6)

Este é o problema de condição fronteira bidimensional para um cilindro de secção arbitrária a oscilar na superfície livre de um fluido. O símbolo ϕ^0 , que representa em termos gerais um potencial com características tridimensionais e independente da velocidade, foi substituído por ϕ^R que representa o potencial de radiação bidimensional associado a movimentos oscilatórios de amplitude unitária.

3.2.2 Cálculo das Forças de Radiação

Forças bidimensionais - Cilindro

As forças de radiação que actuam num navio esbelto a avançar com velocidade média constante e a oscilar na superfície livre são dadas pela expressão (3.65), ou

representando separadamente as várias componentes da força de radiação dadas pelas contribuições dos seis modos do movimento oscilatório harmónico vem:

$$F_k^R = -\rho \iint_{S_0} \sum_{j=1}^6 \xi_j \phi_j^R (i\omega n_k - Um_k) ds \quad , \quad k=1,\dots,6 \quad (4.17)$$

onde o índice k representa a direcção da força e ϕ_j^R é o potencial de radiação para o movimento oscilatório de amplitude unitária no modo j .

Para o caso do problema bidimensional das oscilações forçadas de um cilindro, a expressão (4.17) pode ser simplificada retirando o termo dependente da velocidade e introduzindo a normal bidimensional. Deste modo a força de radiação na direcção k induzida por um movimento oscilatório na direcção j de amplitude unitária é:

$$f_{kj}^{R_{2D}} = -i\omega\rho \int_{c_0} \phi_j^R N_k ds \quad , \quad k,j=2,3,4 \quad (4.18)$$

onde a integração é feita ao longo do contorno da secção transversal c_0 .

A força dada pela expressão (4.18) pode ser dividida em parte real e imaginária:

$$f_{kj}^{R_{2D}} = -\omega\rho \operatorname{Re} \left\{ i \int_{c_0} \phi_j^R N_k ds \right\} - \omega\rho \operatorname{Im} \left\{ i \int_{c_0} \phi_j^R N_k ds \right\} \quad , \quad k,j=2,3,4 \quad (4.19)$$

ou de uma forma mais compacta:

$$f_{kj}^{R_{2D}} = \omega^2 a_{kj} - i\omega b_{kj} \quad , \quad k,j=2,3,4 \quad (4.20)$$

onde as constantes a_{kj} e b_{kj} , designadas respectivamente por massa acrescentada e coeficiente de amortecimento, são dadas por:

$$a_{kj} = -\frac{\rho}{\omega} \operatorname{Re} \left\{ i \int_{c_0} \phi_j^R N_k ds \right\} \quad , \quad k,j=2,3,4 \quad (4.21a)$$

$$b_{kj} = \rho \operatorname{Im} \left\{ i \int_{c_0} \phi_j^R N_k ds \right\} \quad , \quad k,j=2,3,4 \quad (4.21b)$$

A expressão (4.20) dá a força de radiação para movimentos oscilatórios unitários. Para movimentos de amplitude arbitrária vem:

$$F_{kj}^{R_{2D}} = \xi_j^A (\omega^2 a_{kj} - i\omega b_{kj}), \quad k,j=2,3,4 \quad (4.22)$$

onde ξ_j^A é a amplitude complexa do movimento no modo j .

Finalmente a descrição no tempo da força de radiação bidimensional é dada por:

$$\text{Re}\{F_{kj}^{R_{2D}} e^{i\omega t}\} = -a_{kj} \ddot{\xi}_j(t) - b_{kj} \dot{\xi}_j(t) \quad (4.23)$$

onde o movimento oscilatório é:

$$\xi_j(t) = \text{Re}\{\xi_j^A e^{i\omega t}\} \quad (4.24)$$

Deste modo tem-se a força de radiação dada por duas componentes. A primeira está em fase com aceleração do movimento e é equivalente a uma inércia para os movimentos de translação e a um momento de inércia para os movimentos de rotação. A interpretação física deste termo tem a ver com a massa de fluido que é acelerada juntamente com o corpo. O coeficiente de massa acrescentada representa uma massa de fluido “equivalente” que tem a aceleração do corpo.

O segundo termo está em fase com a velocidade e representa uma força de amortecimento, proporcional ao coeficiente de amortecimento. Este termo de amortecimento está relacionado com a geração e radiação de ondas pelo facto do corpo estar a oscilar junto à superfície livre.

Forças tridimensionais - Navio

Volta-se agora à expressão (4.17) que representa as forças de radiação que actuam num navio esbelto, a avançar com velocidade média constante e com oscilações harmónicas na superfície livre. A força de radiação na direcção k devido a um movimento oscilatório de amplitude unitária na direcção j é:

$$f_{kj}^R = -i\omega\rho \iint_{S_0} \phi_j^R n_k ds + U\rho \iint_{S_0} \phi_j^R m_k ds, \quad k, j=1, \dots, 6 \quad (4.25)$$

Esta expressão é semelhante à deduzida por Salvesen et al. (1970), excepto no aspecto em que os termos relacionados com os extremos do navio (termos dos extremos) não estão aqui incluídos. Os termos dos extremos resultam da aplicação do teorema de Stokes para navios com painel de popa. Neste trabalho foi decidido não incluir estes termos, porque:

- A sua interpretação física não é clara.
- A sua necessidade é questionável (Newman, 1978).
- Este termo é relevante apenas em navios com painéis de popa grandes por baixo da linha de água. Neste caso os efeitos viscosos, que são desprezados nesta formulação, são importantes.
- Finalmente, a experiência do autor mostra que em navios onde os termos de extremos tomam valores relevantes, os valores assintóticos dos movimentos verticais para frequências baixas são errados. Na restante gama de frequências, os termos de extremos “parecem piorar” os resultados. Em relação a este último aspecto, não foi feito um estudo sistemático que permita tirar conclusões definitivas.

Relembrando que o potencial de radiação foi representado em termos de potenciais independentes da velocidade de avanço (equação 4.10), então as forças de radiação podem também ser expressas em termos de componentes independentes da velocidade de avanço. Estas componentes independentes da velocidade de avanço são:

$$f_{kj}^0 = -i\omega\rho \iint_{S_0} \phi_j^0 n_k ds, \quad k, j=1, \dots, 6 \quad (4.26)$$

Combinando (4.25) com (4.26), (4.10) e (3.56) consegue-se obter expressões para as forças de radiação do navio a avançar com movimento oscilatório, em termos de componentes independentes da velocidade. Para os movimentos de arfagem e cabeceio vem:

$$f_{33}^R = f_{33}^0 \quad (4.27)$$

$$f_{35}^R = f_{35}^0 + \frac{U}{i\omega} f_{33}^0 \quad (4.28)$$

$$f_{53}^R = f_{53}^0 - \frac{U}{i\omega} f_{33}^0 \quad (4.29)$$

$$f_{55}^R = f_{55}^0 + \frac{U^2}{\omega^2} f_{33}^0 \quad (4.30)$$

Note-se que até aqui não foram introduzidas quaisquer simplificações da teoria de faixas na formulação das forças hidrodinâmicas. Apenas o casco foi assumido esbelto, mas esta hipótese é admitida também por outras formulações mais gerais. Em outras teorias

das faixas, a hipótese de escoamento bidimensional é assumida logo no início do desenvolvimento da formulação.

Nesta altura é necessário assumir que boca é bastante inferior ao comprimento do navio de tal modo que $ds \cong d\zeta dx$, onde ds é um elemento de superfície do casco, dx é ao longo do comprimento do navio e $d\zeta$ é ao longo do contorno da secção transversal c_0 . Deste modo os termos de radiação independentes da velocidade vêm:

$$f_{kj}^0 = -i\omega\rho \int_L \int_{c_0} \phi_j^0 n_k d\zeta dx, \quad k,j=2,3,4 \quad (4.31)$$

Introduzindo as normais bidimensionais definidas pela equação (4.11) e utilizando a condição fronteira no corpo (4.8), resulta em qualquer secção transversal a seguinte relação entre o potencial associado ao cabeceio e potencial do cilindro em arfagem: $\phi_5^0 = -x\phi_3^R$. Combinando todos estes resultados, as forças de radiação independentes da velocidade para os movimentos verticais do navio, vêm finalmente em função da força de radiação associada ao movimento de arfagem de cilindros com a forma das secções transversais do navio (equação 4.18):

$$f_{33}^0 = \int_L f_{33}^{R2D} dx \quad (4.32)$$

$$f_{35}^0 = f_{53}^0 = -\int_L x f_{33}^{R2D} dx \quad (4.33)$$

$$f_{55}^0 = \int_L x^2 f_{33}^{R2D} dx \quad (4.34)$$

ou em termos dos coeficientes de massa acrescentada a_{33} e amortecimento b_{33} bidimensionais:

$$f_{33}^0 = \omega^2 \int_L a_{33} dx - i\omega \int_L b_{33} dx = \omega^2 A_{33}^0 - i\omega B_{33}^0 \quad (4.35)$$

$$f_{35}^0 = f_{53}^0 = -\left[\omega^2 \int_L x a_{33} dx - i\omega \int_L x b_{33} dx \right] = \omega^2 A_{35}^0 - i\omega B_{35}^0 = \omega^2 A_{53}^0 - i\omega B_{53}^0 \quad (4.36)$$

$$f_{55}^0 = \omega^2 \int_L x^2 a_{33} dx - i\omega \int_L x^2 b_{33} dx = \omega^2 A_{55}^0 - i\omega B_{55}^0 \quad (4.37)$$

onde A_{kj}^0 e B_{kj}^0 são as partes independentes da velocidade de avanço dos coeficientes de massa acrescentada e amortecimento do navio.

Introduzindo as expressões anteriores em (4.27) a (4.30) e separando os termos em fase com a aceleração dos termos em fase com a velocidade, resulta nas forças de radiação no navio para movimentos oscilatórios unitários, em função dos coeficientes hidrodinâmicos do navio:

$$f_{kj}^R = \omega^2 A_{kj} - i\omega B_{kj} \quad (4.38)$$

onde os coeficientes hidrodinâmicos são:

$$\begin{aligned} A_{33} &= \int a_{33} dx \\ B_{33} &= \int b_{33} dx \\ A_{35} &= -\int x a_{33} dx - \frac{U}{\omega^2} B_{33}^0 \\ B_{35} &= -\int x b_{33} dx + U A_{33}^0 \\ A_{53} &= -\int x a_{33} dx + \frac{U}{\omega^2} B_{33}^0 \\ B_{53} &= -\int x b_{33} dx - U A_{33}^0 \\ A_{55} &= \int x^2 a_{33} dx + \frac{U^2}{\omega^2} A_{33}^0 \\ B_{55} &= \int x^2 b_{33} dx + \frac{U^2}{\omega^2} B_{33}^0 \end{aligned} \quad (4.39a-h)$$

As integrações são executadas ao longo do comprimento do navio.

Os coeficientes de massa acrescentada e amortecimento bidimensionais, a_{33} e b_{33} , são calculados por um método de transformação conforme utilizando multi-parâmetros. O potencial de velocidade do movimento oscilatório vertical de cilindros é representado por uma soma de fontes, cada uma satisfazendo a condição fronteira na superfície livre e sendo multiplicada por um coeficiente de modo a satisfazer a condição fronteira na superfície do corpo.

3.3 Forças de Excitação

Para obter as forças de excitação é necessário resolver o problema hidrodinâmico do navio a avançar com velocidade constante através de um campo de ondas incidentes, estando o navio restringido na sua posição média, portanto sem movimentos oscilatórios. De acordo com o problema linearizado, a força de excitação é dada pela equação (3.64). Esta expressão mostra que a força de excitação tem duas partes. Uma está associada ao potencial de onda incidente e é geralmente denominada de força de “Froude-Krilov”, como homenagem aos investigadores que deram os primeiros passos no cálculo dos movimentos do navio em ondas. Esta é uma força do tipo impulso. A outra parte das forças de excitação tem a ver com a perturbação do potencial da onda incidente devido à presença do navio e é chamada de força de difracção. As forças de excitação são harmónicas no tempo.

Utilizando as características harmónicas dos potenciais, separando as duas partes da força de excitação e decompondo ainda em componentes nas várias direcções do sistema de coordenadas vem:

$$F_K^I = -\rho \iint_{S_0} (i\omega n_k - Um_k) \Phi^I ds, \quad k=1, \dots, 6 \quad (4.40)$$

$$F_k^D = -\rho \iint_{S_0} (i\omega n_k - Um_k) \Phi^D ds, \quad k=1, \dots, 6 \quad (4.41)$$

onde se relembra que Φ^I e Φ^D representam respectivamente os potências da onda incidente e de difracção.

3.3.1 Força de Froude-Krilov

De acordo com a teoria das ondas lineares, o potencial de onda incidente para uma onda a propagar-se com uma direcção arbitrária relativamente ao sistema de coordenadas é:

$$\Phi^I(x, y, z, t) = \frac{ig\zeta_a}{\omega_0} \left(e^{ik_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} \right) \left(e^{k_0 z} \right) \left(e^{i\omega t} \right) \quad (4.42)$$

onde ζ_a é a amplitude de onda, $k_0 = \omega_0^2 / g$ é o número de onda, ω_0 é a frequência de onda e β é ângulo entre o vector de velocidade do navio e o vector de velocidade de

propagação das ondas. A convenção para o ângulo β é de zero graus para ondas de proa (ver figura 4.1).

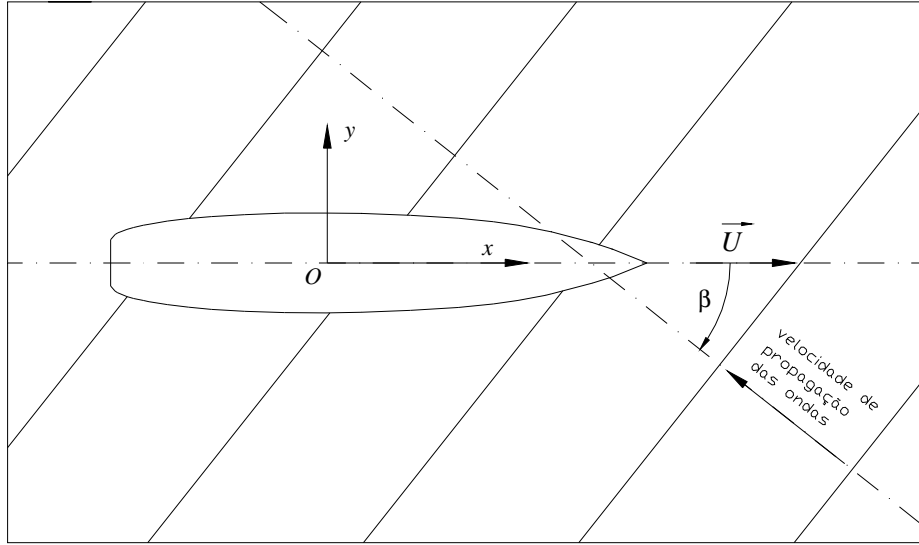


Figura 4.1 Convenção para o ângulo de rumo relativamente às ondas

A relação entre as frequências de onda e de encontro ω é dada por:

$$\omega_0 = \omega - k_0 U \cos \beta \quad (4.43)$$

O potencial de velocidade pode alternativamente ser representado por:

$$\Phi^I(x, y, z, t) = \zeta_a \varphi^I(y, z) e^{ik_0 x \cos \beta} e^{i\omega t} \quad (4.44)$$

$$\varphi^I(y, z) = \frac{ig}{\omega_0} e^{k_0 z} e^{ik_0 y \sin \beta} \quad (4.45)$$

onde $\varphi^I(y, z)$ é a amplitude complexa do potencial de onda incidente devido a uma onda unitária, que actua em secções transversais do casco.

Com as últimas expressões para o potencial incidente, utilizando (4.43), assumindo a simplificação geométrica da teoria de faixas ($ds \cong dx d\zeta$) e utilizando as normais bidimensionais (expressões 4.11), chega-se às equações finais para as forças de Froude-Krilov em cada uma das direcções do sistema de coordenadas:

$$F_1^I = 0 \quad (4.46)$$

$$F_k^I = \zeta_a \int_L (e^{ik_0 x \cos \beta} f_k^I) dx, \quad k=2,3,4 \quad (4.47)$$

$$F_5^I = -\zeta_a \int_L (e^{ik_0 x \cos \beta} x f_3^I) dx \quad (4.48)$$

$$F_6^I = \zeta_a \int_L (e^{ik_0 x \cos \beta} x f_2^I) dx \quad (4.49)$$

onde f_k^I representa a força de Froude-Krilov bidimensional devido a ondas de amplitude unitária:

$$f_k^I = -i\omega_0 \rho \int_{C_0} \{\varphi^I(y, z) N_k\} d\zeta, \quad k=2,3,4 \quad (4.50)$$

Estas forças são simples de calcular pois o potencial de onda incidente é conhecido à partida. As primeiras tentativas para o cálculo dos movimentos verticais do em ondas (Froude, 1861 e Krilov, 1896), consideraram apenas esta componente das forças de excitação, assumindo portanto que o navio não perturba a onda incidente. Na prática esta hipótese é válida apenas se o comprimento das ondas for muito superior ao comprimento do navio. Na gama de comprimentos de onda onde os movimentos têm geralmente amplificação dinâmica, é necessário considerar os efeitos da perturbação do potencial incidente, ou seja os efeitos de difracção. É também interessante notar que a amplitude das forças de Froude-Krilov é independente da velocidade do navio.

3.3.2 Forças de Difracção

Há duas hipóteses para o cálculo das forças de difracção. Para a primeira é necessário resolver o problema de condição fronteira formulado na secção 3.5.5 em ordem ao potencial de difracção. O problema é semelhante ao problema da radiação, para o qual já foi apresentada a solução, com a diferença de que a condição fronteira no corpo é agora dada por (3.52).

Existe ainda uma dificuldade acrescida que é o facto de formalmente a equação de Laplace, a que devem satisfazer Φ^I e Φ^D , não ter solução única quando as ondas são de proa.

A alternativa ao cálculo directo do potencial de difracção é utilizar as chamadas relações de Haskind-Newman. Newman (1962, 1965) estudou as relações de Haskind

para os casos do navio sem velocidade e com velocidade de avanço. Estas relações permitem representar as forças de difracção em termos dos potenciais de radiação, o que é conseguido através do teorema de Green. O teorema de Green diz o seguinte:

Se φ e ϕ são duas soluções da equação de Laplace num certo volume de fluido cercado por uma superfície fechada S_T , estes potenciais estão relacionados do seguinte modo:

$$\iint_{S_T} \left[\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] = 0 \quad (4.51)$$

onde \bar{n} é o vector normal à superfície e que aponta para o fluido.

Combinando as expressões (4.8) com a equação (4.41), que dá a força de difracção na direcção- k , resulta:

$$F_k^D = - \iint_{S_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\Phi_k^0 - \frac{U}{i\omega} \Phi_k^U \right) \Phi^D ds, \quad k=1, \dots, 6 \quad (4.52)$$

onde se relembra que Φ_k^0 e Φ_k^U são respectivamente as partes do potencial de radiação independente e dependente da velocidade de avanço.

Para utilizar o teorema de Green substitui-se na expressão (4.46):

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_k^0 - \frac{U}{i\omega} \Phi_k^U \\ \varphi &= \Phi^D \end{aligned} \quad (4.53)$$

Todos estes potenciais (Φ_k^0 , Φ_k^U e Φ^D) satisfazem a equação de Laplace, a condição fronteira linear na superfície livre, a condição de radiação em infinito e a condição de repouso no fundo. Aplicando o teorema de Green à superfície $S_T = S_0 + S_F + S_\infty$ (ver figura 4.2), para o que se substitui (4.53) em (4.51), resulta na força de difracção representada em termos dos potenciais de radiação e da onda incidente:

$$F_k^D = \rho \iint_{S_0} \left(\Phi_k^0 - \frac{U}{i\omega} \Phi_k^U \right) \frac{\partial \Phi^D}{\partial n} ds, \quad k=1, \dots, 6 \quad (4.54)$$

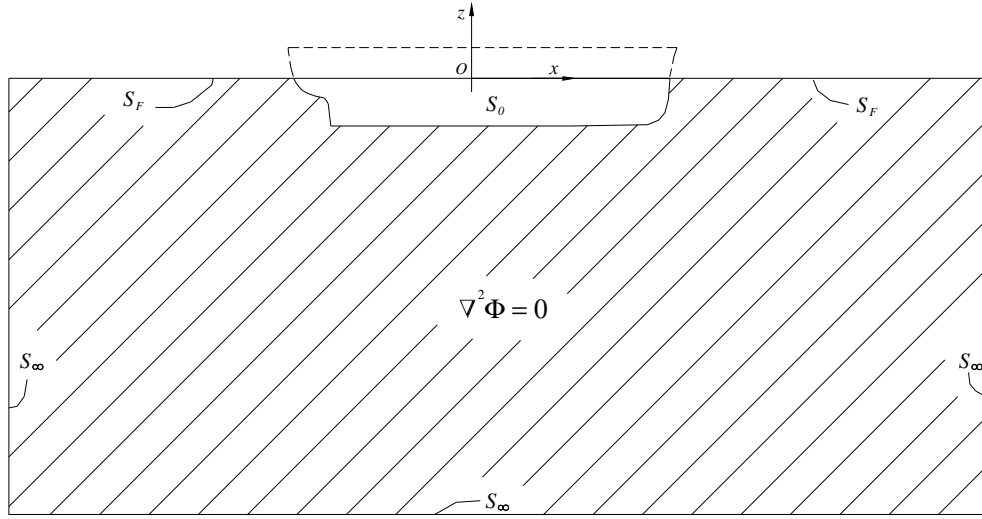


Figura 4.2 Aplicação do teorema de Green

No passo final para obter expressões para as forças em termos de quantidades bidimensionais, é necessário seguir um procedimento semelhante ao utilizado na formulação das forças de radiação. Resumidamente: utilizam-se as relações (4.9) para representar os potenciais de radiação dependentes de U em termos de potenciais independentes de U . De seguida usa-se a simplificação geométrica $ds \cong dx d\zeta$ para simplificar os integrais de superfície e representam-se as componentes do vector normal em termos da normal bidimensional (expressões 4.11). Deste modo as forças de difracção vêm finalmente dadas por:

$$F_1^D = 0 \quad (4.55)$$

$$F_k^D = \zeta_a \int_L \left(e^{ik_0 x \cos \beta} f_k^D \right) dx, \quad k=2,3,4 \quad (4.56)$$

$$F_5^D = -\zeta_a \int_L \left\{ e^{ik_0 x \cos \beta} \left(x f_3^D + \frac{U}{i\omega} f_3^D \right) \right\} dx \quad (4.57)$$

$$F_6^D = \zeta_a \int_L \left\{ e^{ik_0 x \cos \beta} \left(x f_2^D + \frac{U}{i\omega} f_2^D \right) \right\} dx \quad (4.58)$$

onde f_k^D são as forças de difracção seccionais para ondas incidentes de amplitude unitária:

$$f_k^D = \omega_0 \rho \int_{C_0} \left\{ (iN_3 - N_2 \sin \beta) e^{ik_0 y \sin \beta} e^{k_0 z} \varphi_k^R \right\} ds, \quad k=2,3,4 \quad (4.59)$$

onde se relembra que φ_k^R é o potencial de radiação bidimensional associado a movimentos oscilatórios de amplitude unitária e N_2, N_3 são as componentes da normal bidimensional às secções transversais do casco. O cálculo do potencial de radiação bidimensional, φ_k^R , é feito pelo método de transformação conforme descrito na secção 4.2.

A principal vantagem na utilização das relações de Haskind-Newman para calcular as forças de difracção tem a ver com a redução do esforço computacional. A grande parte do esforço computacional nos cálculos de comportamento do navio no mar, está associado à solução do problema de condição fronteira, para cada frequência e modo de oscilação que é necessário considerar. Utilizando as relações de Haskind-Newman reduz-se basicamente o esforço de computação para metade.

3.4 Forças de Restituição

As forças de restituição resultam da combinação das forças hidrostáticas com o peso do navio. As forças hidrostáticas resultam da integração do termo hidrostático da equação de Bernoulli na superfície molhada do casco. Por seu lado a pressão hidrostática depende apenas da posição vertical do ponto “molhado” do casco relativamente ao sistema de coordenadas. As forças hidrostáticas foram deduzidas na secção 3.5.6 e são dadas pela expressão (3.66). Decompondo a expressão (3.66) em forças segundo cada uma das direcções do sistema de coordenadas vem:

$$F_k^H = -\rho g \iint_S (zn_k) ds, \quad k=1, \dots, 6 \quad (4.60)$$

Assumindo de novo pequenos deslocamentos angulares de modo a ser possível desprezar os termos de ordem superior, obtém-se a seguinte expressão para a coordenada-z de qualquer ponto na superfície molhada do casco:

$$z = z' + \xi_3 + y' \xi_4 - x' \xi_5 \quad (4.61)$$

onde (x', y', z') são as coordenadas do mesmo ponto representado no sistema de referência fixo no navio.

Introduzindo esta expressão na equação (4.60) e assumindo algumas simplificações chega-se às forças hidrostáticas linearmente proporcionais aos deslocamentos. As simplificações são: a pressão hidrostática é calculada até a linha de água média, os movimentos angulares são pequenos e os costados do navio são verticais em torno da linha de água. Com estas hipóteses o integral em (4.60) pode ser desenvolvido e finalmente as únicas forças diferentes de zero para navios com plano longitudinal de simetria são:

$$F_3^H = \rho g \nabla_0 - \rho g A_{wl} \xi_3 + \left\{ \rho g \iint_{A_{wl}} x ds \right\} \xi_5 \quad (4.62)$$

$$F_4^H = \rho g \nabla_0 y_{B_0} - \rho g \left\{ \nabla_0 (z_{B_0} - z_G) + \iint_{A_{wl}} y^2 ds \right\} \xi_4 \quad (4.63)$$

$$F_5^H = -\rho g \nabla_0 x_{B_0} + \left\{ \rho g \iint_{A_{wl}} x ds \right\} \xi_3 - \rho g \left\{ \nabla_0 (z_{B_0} - z_G) + \iint_{A_{wl}} x^2 ds \right\} \xi_5 \quad (4.64)$$

onde ∇_0 é o volume do casco imerso na condição de equilíbrio estático, A_{wl} é a área de flutuação no equilíbrio estático, e $(x_{B_0}, y_{B_0}, z_{B_0})$ são as coordenadas do centro deste volume. Combinando com estas equações a força e momentos devido ao peso do navio obtêm-se as forças de restituição:

$$F_1^B = F_2^B = F_6^B = 0 \quad (4.65)$$

$$F_3^B = -C_{33} \xi_3 - C_{35} \xi_5 \quad (4.66)$$

$$F_4^B = -C_{44} \xi_4 \quad (4.67)$$

$$F_5^B = -C_{53} \xi_3 - C_{55} \xi_5 \quad (4.68)$$

onde C_{kj} são os coeficientes de restituição dados por:

$$C_{33} = \rho g A_{wl}$$

$$C_{35} = C_{53} = -\rho g \iint_{A_{wl}} x ds \quad (4.69a-d)$$

$$C_{44} = \rho g V_0 \overline{GM}_T$$

$$C_{55} = \rho g V_0 \overline{GM}_L$$

e \overline{GM}_T , \overline{GM}_L representam respectivamente as alturas metacéntricas transversal e longitudinal.

3.5 Equações do Movimento

As equações do movimento resultam do equilíbrio dinâmico entre as forças exteriores (neste caso são forças hidrodinâmicas) e as forças de inércia associadas à massa do navio. As forças hidrodinâmicas foram representadas em termos de teoria de faixas nas secções anteriores. As forças de inércia serão descritas agora resumidamente.

A segunda lei de Newton diz que uma força (ou momento) está associada a uma alteração da velocidade de um corpo. Esta é a força de inércia que tem a ver com a inércia da massa. Matematicamente, se ρ_B for a massa específica do corpo, que depende da posição no espaço, a força de inércia associada à massa é dada pela taxa de variação do momento linear:

$$F^M = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_B} \rho_B (\dot{\eta} + \dot{\Omega}' \times r) dV \quad (4.70)$$

O momento de inércia é dado pela taxa de variação do momento angular:

$$M^M = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_B} \rho_B r \times (\dot{\eta} + \dot{\Omega}' \times r) dV \quad (4.71)$$

onde a velocidade de um elemento de massa do navio no sistema de referência que avança com a velocidade média $X = (x, y, z)$ é $\vec{v} = \dot{\eta} + \dot{\Omega}' \times \vec{r}$. Recordar-se que $\dot{\eta}$ é a velocidade de translação oscilatória representada em $X = (x, y, z)$, $\dot{\Omega}'$ é a velocidade angular representada em $X' = (x', y', z')$ e \vec{r} é o vector de posição no sistema de referência $X' = (x', y', z')$. As integrações são no volume do corpo V_B .

A massa específica é invariável no tempo. Assumindo pequenos deslocamentos angulares, chega-se à seguinte representação para a força de inércia na direcção- k :

$$\{F_k^M\} = [M_{kj}] \{\ddot{\xi}_j\}, \quad k, j = 1, \dots, 6 \quad (4.72)$$

onde $[M_{kj}]$ é a matriz dos coeficientes de inércia ou matriz de massa do sistema e $\{\ddot{\xi}_j\}$ é o vector das acelerações. Se o navio tiver simetria lateral, ou seja em relação ao plano $x' - z'$ e se o centro de gravidade estiver em $(0, 0, z'_G)$, então a matriz de massa é:

$$[M_{kj}] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz'_G & 0 \\ 0 & m & 0 & -mz'_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -mz'_G & 0 & I_{44} & 0 & -I_{46} \\ mz'_G & 0 & 0 & 0 & I_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{64} & 0 & I_{66} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

onde m é a massa do navio e os coeficientes de momento de inércia I_{kj} são calculados por:

$$I_{44} = \iiint_{V_B} \rho_B (y'^2 + z'^2) dv \quad I_{46} = I_{64} = \iiint_{V_B} \rho_B (x'z') dv \quad (4.74a-d)$$

$$I_{55} = \iiint_{V_B} \rho_B (x'^2 + z'^2) dv \quad I_{66} = \iiint_{V_B} \rho_B (x'^2 + y'^2) dv$$

Voltando às equações do movimento, o equilíbrio dinâmico de forças (e momentos) em cada uma das direcções do sistema de coordenadas pode ser representado em termos dos coeficientes de: inércia, massa acrescentada, amortecimento e restituição:

$$\sum_{j=1}^6 \{(M_{kj} + A_{kj})\ddot{\xi}_j + B_{kj}\dot{\xi}_j + C_{kj}\xi_j\} = F_k^E, \quad k=1, \dots, 6 \quad (4.75)$$

Para navios com simetria lateral as matrizes dos coeficientes simplificam-se e em consequência o sistema de seis equações acopladas (4.75) reduz-se a dois sistemas de três equações desacoplados entre si. Um dos conjuntos de equações representa os movimentos acoplados de avanço, arfagem e cabeceio e o outro representa o abatimentos, balanço e guinada. De acordo com a teoria de faixas, sendo o navio esbelto não há forças oscilatórias na direcção longitudinal, logo este movimento não existe.

As soluções das equações diferenciais lineares de segunda ordem (4.75) são movimentos do tipo harmónico:

$$\xi_j(t) = \text{Re}\{\xi_j^A e^{i\omega t}\} = \xi_j^a \cos(\omega t - \theta_j) \quad (4.76)$$

onde ξ_j^A é a amplitude complexa do movimento, ξ_j^a é a amplitude real e θ_j é o ângulo de fase que representa o atraso da resposta no tempo.

Para os movimentos de arfagem e cabeceio as equações do movimento tomam a seguinte forma:

$$\begin{cases} [M + A_{33}(\omega)]\ddot{\xi}_3 + B_{33}(\omega)\dot{\xi}_3 + C_{33}\xi_3 + A_{35}(\omega)\ddot{\xi}_5 + B_{35}(\omega)\dot{\xi}_5 + C_{35}\xi_5 = F_3^E(t) \\ A_{53}(\omega)\ddot{\xi}_3 + B_{53}(\omega)\dot{\xi}_3 + C_{53}\xi_3 + [I_{55} + A_{55}(\omega)]\ddot{\xi}_5 + B_{55}(\omega)\dot{\xi}_5 + C_{55}\xi_5 = F_5^E(t) \end{cases} \quad (4.77)$$

3.6 Esforços Dinâmicos

Nesta secção apresenta-se a formulação para os esforços dinâmicos lineares, em navios a avançar com velocidade constante e com rumo arbitrário relativamente a ondas harmónicas. Os esforços incluem os esforços de corte horizontal e vertical, os momentos flectores horizontal e vertical e o momento torçor. A força axial no sentido longitudinal não é considerada na teoria de faixas.

O esforço de corte dinâmico V_k numa secção transversal do navio, é a diferença entre a força de inércia e a soma das forças exteriores hidrodinâmicas na parte do navio para vante da secção em estudo:

$$V_k = I_k - R_k - E_k - B_k, \quad k = 2,3 \quad (4.78)$$

Do mesmo modo os momentos dinâmicos são dados pela diferença entre os momentos de inércia e a soma dos momentos exteriores para vante da secção em estudo:

$$M_k = I_k - R_k - E_k - B_k, \quad k = 4,5,6 \quad (4.79)$$

Nas equações (4.78) e (4.79) as várias contribuições para os esforços dinâmicos são: I_k para as forças (momentos) de inércia, R_k para as forças (momentos) de radiação, E_k para as forças (momentos) de excitação e B_k para as forças (momentos) de restituição.

A convenção para a nomenclatura dos esforços e seus sentidos positivos é representada na figura 4.3. Os índices $k = 2,3$ estão associados respectivamente aos esforços de corte

horizontal e vertical, e $k = 4,5,6$ estão associados respectivamente ao momento torçor e momentos flectores vertical e horizontal.

Embora a formulação que aqui se apresenta possa ser generalizada para todos os cinco esforços dinâmicos mencionados, os passos principais da sua dedução e as equações finais são apresentadas apenas para os esforços verticais, nomeadamente o esforço vertical de corte e o momento flector vertical. Apenas os esforços verticais são investigados neste trabalho, pois as não-linearidades estudadas estão associadas principalmente com estes esforços.

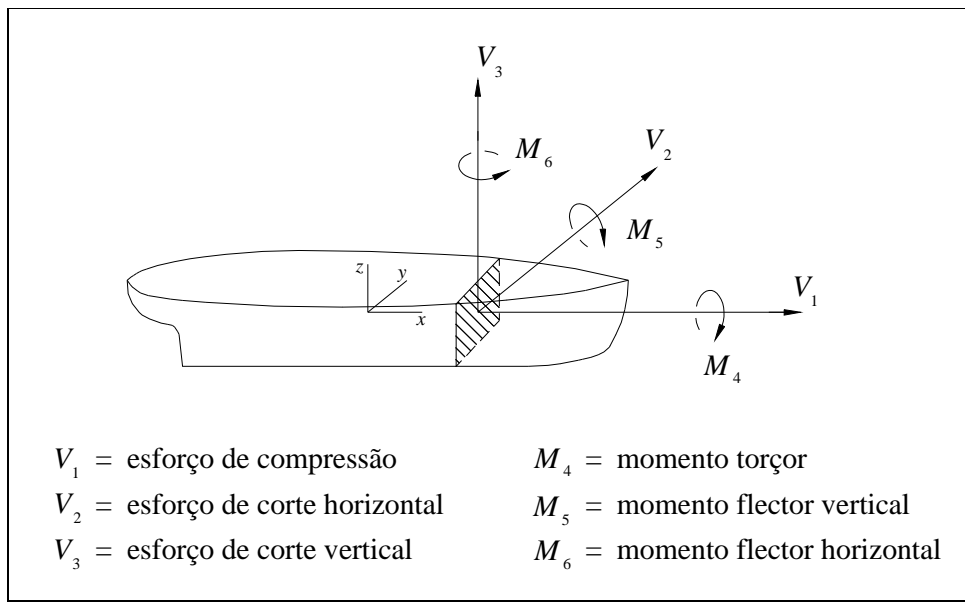


Figura 4.3 Convenção para os sentidos dos esforços dinâmicos

Voltando às expressões (4.78) e (4.79), para os casos do esforço de corte vertical e momento flector vertical vêm:

$$V_3 = I_3 - R_3 - E_3 - B_3 \quad (4.80)$$

$$M_5 = I_5 - R_5 - E_5 - B_5 \quad (4.81)$$

Contribuição de Inércia

As contribuições de inércia são dadas pelo integral ao longo do comprimento do navio (L^*) para vante da secção transversal em estudo (x^*), das massas seccionais por unidade de comprimento, m , multiplicadas pelas acelerações seccionais:

$$I_3 = \int_{L^*} m(\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5)dx \quad (4.82)$$

$$I_5 = -\int_{L^*} m(x-x^*)(\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5)dx \quad (4.83)$$

Contribuição de Radiação

Relembra-se agora a expressão que dá a força de radiação no casco devido ao movimento oscilatório do navio nos seis graus de liberdade (4.17). Combinando as equações (4.17) e (4.25) vem:

$$F_k^R = \sum_{j=1}^6 \xi_j \left\{ -i\omega\rho \iint_{S_0} \phi_j^R n_k ds + U\rho \iint_{S_0} \phi_j^R m_k ds \right\}, \quad k=1,\dots,6 \quad (4.84)$$

Para o cálculo da contribuição para os esforços da força de radiação associada aos movimentos oscilatórios do navio, considera-se na equação (4.84) apenas a superfície do casco para vante da secção em estudo S_0^* :

$$R_k = \sum_{j=1}^6 \xi_j \left\{ -i\omega\rho \iint_{S_0^*} \phi_j^R n_k ds + U\rho \iint_{S_0^*} \phi_j^R m_k ds \right\}, \quad k=1,\dots,6 \quad (4.85)$$

Assumindo de novo a simplificação geométrica da teoria de faixas $ds \cong dx d\zeta$, a equação anterior simplifica-se para:

$$R_k = \sum_{j=1}^6 \xi_j \left\{ -i\omega\rho \int_{L^*} \int_{c_0} \phi_j^R n_k d\zeta dx + U\rho \int_{L^*} \int_{c_0} \phi_j^R m_k d\zeta dx \right\}, \quad k=1,\dots,6 \quad (4.86)$$

onde L^* é o comprimento do casco para vante da secção onde se pretende calcular os esforços e c_0 é o contorno da secção molhada média em cada posição longitudinal- x .

Agora, tal como foi feito para a simplificação das forças de radiação, pode-se usar as hipóteses da teoria de faixas para representar as equações (4.86) em termos de quantidades bidimensionais. Estas hipóteses resultam em potenciais de radiação ϕ_j^R representados em termos de potenciais de radiação bidimensionais dados pela relações (4.10) e resultam em componentes do vector \tilde{n}^* bidimensionais dadas por (semelhante a 4.11):

$$\begin{aligned}
n_1 &= 0 \\
n_2, n_3, n_4 &= N_2, N_3, N_4 \\
n_5 &= -(x - x^*)N_3 \\
n_6 &= (x - x^*)N_2
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Combinando as expressões (4.10) e (4.87) com (4.86) resulta em contribuições de radiação para o esforço de corte vertical e momento flector vertical, expressas em função de forças de radiação seccionais e bidimensionais:

$$R_3 = \int_{L^*} \left(\xi_3 - x\xi_5 + \frac{U}{i\omega} \xi_5 \right) f_{33}^{R_{2D}} dx + \frac{U}{i\omega} \left[\left(\xi_3 - x\xi_5 + \frac{U}{i\omega} \xi_5 \right) f_{33}^{R_{2D}} \right]_{x=x^*} \tag{4.88}$$

$$R_5 = - \int_{L^*} (x - x^*) (\xi_3 - x\xi_5) f_{33}^{R_{2D}} dx + \frac{U}{i\omega} \left(-\xi_3 + x\xi_5 - \frac{U}{i\omega} \xi_5 \right) \int_{L^*} f_{33}^{R_{2D}} dx \tag{4.89}$$

onde a força de radiação para oscilações verticais de secções bidimensionais $f_{33}^{R_{2D}}$ se obtém da expressão (4.18):

$$f_{33}^{R_{2D}} = -i\omega\rho \int_{c_0} \varphi_3^R N_k ds \tag{4.90}$$

Estas forças de radiação podem também ser representadas em termos de coeficientes de massa acrescentada e amortecimento bidimensionais (equação 4.20):

$$f_{33}^{R_{2D}} = \omega^2 a_{33} - i\omega b_{33} \tag{4.91}$$

os quais podem ser introduzidos em (4.88) e (4.89) para se obter finalmente as contribuições de radiação para os esforços verticais, em função dos coeficientes hidrodinâmicos bidimensionais associados às secções transversais do navio:

$$\begin{aligned}
R_3 = - \int_{L^*} & \left\{ a_{33} (\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5) + b_{33} (\dot{\xi}_3 - x\dot{\xi}_5) - \frac{U}{\omega^2} b_{33} \ddot{\xi}_5 + U a_{33} \dot{\xi}_5 \right\} dx \\
& - \left[U a_{33} (\dot{\xi}_3 - x\dot{\xi}_5) - \frac{U}{\omega^2} b_{33} (\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5) - \frac{U^2}{\omega^2} (a_{33} \ddot{\xi}_5 + b_{33} \dot{\xi}_5) \right]_{x=x^*}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}
R_5 = - \int_{L^*} & (x - x^*) \left\{ a_{33} (\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5) + b_{33} (\dot{\xi}_3 - x\dot{\xi}_5) \right\} dx \\
& + \int_{L^*} \left\{ U a_{33} (\dot{\xi}_3 - x\dot{\xi}_5) - \frac{U}{\omega^2} b_{33} (\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5) - \frac{U^2}{\omega^2} (a_{33} \ddot{\xi}_5 + b_{33} \dot{\xi}_5) \right\} dx
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Rearranjando estas expressões, os esforços podem ser representados em termos de contribuições separadas dos movimentos de arfagem e cabeceio, respectivamente R_{kj} , $k, j = 3, 5$:

$$\begin{aligned} R_{kj} &= -\ddot{\xi}_j A_{kj}^*(\omega) - \dot{\xi}_j B_{kj}^*(\omega) \\ &= \xi_j^\Lambda e^{i\omega t} [\omega^2 A_{kj}^* - i\omega B_{kj}^*], \quad k, j = 3, 5 \end{aligned} \quad (4.94)$$

onde os coeficientes dependentes da frequência A_{kj}^* e B_{kj}^* são dados por:

$$\begin{aligned} A_{33}^* &= \int_{L^*} a_{33} dx - \frac{U}{\omega^2} b_{33}^* \\ B_{33}^* &= \int_{L^*} b_{33} dx + U a_{33}^* \\ A_{35}^* &= -\int_{L^*} a_{33} x dx - \frac{U}{\omega} \int_{L^*} b_{33} dx - \frac{U^2}{\omega^2} a_{33}^* + \frac{U}{\omega^2} b_{33}^* x^* \\ B_{35}^* &= -\int_{L^*} b_{33} x dx + U \int_{L^*} a_{33} dx - U a_{33}^* x^* - \frac{U^2}{\omega^2} b_{33}^* \quad (4.95a-h) \\ A_{53}^* &= -\int_{L^*} (x - x^*) a_{33} dx + \frac{U}{\omega^2} \int_{L^*} b_{33} dx \\ B_{53}^* &= -\int_{L^*} (x - x^*) b_{33} dx - U \int_{L^*} a_{33} dx \\ A_{55}^* &= -\int_{L^*} (x - x^*) x^* a_{33} dx - \frac{U}{\omega^2} x^* \int_{L^*} b_{33} dx + \frac{U^2}{\omega^2} \int_{L^*} a_{33} dx \\ B_{55}^* &= \int_{L^*} (x - x^*) x^* b_{33} dx + U x^* \int_{L^*} a_{33} dx + \frac{U^2}{\omega^2} \int_{L^*} b_{33} dx \end{aligned}$$

onde as integrações são ao longo do comprimento do navio para vante da secção transversal x^* e a_{33}^* e b_{33}^* correspondem à secção x^* . As expressões (4.94) e (4.95a-h) serão utilizadas para deduzir os esforços verticais no domínio do tempo.

Contribuição de Excitação

As forças de excitação globais foram deduzidas na secção 4.3 e são decompostas em duas partes independentes. A parte de Froude-Krilov é representada pelas equações (4.46) a (4.50) e a parte de difracção pelas equações (4.55) a (4.59). A força e o momento de excitação na parte do casco para vante da secção transversal x^* podem ser obtidos: somando as duas partes da força de excitação, integrando para vante de x^* e substituindo o braço da força seccional x por $(x - x^*)$:

$$E_k = \zeta_a \int_{L^*} \left\{ e^{ik_0 x \cos \beta} (f_k^I + f_k^D) \right\} dx + \zeta_a \left(\frac{U}{i\omega} f_k^D \right)_{x=x^*}, \quad k=2,3,4 \quad (4.96)$$

$$E_5 = -\zeta_a \int_{L^*} \left\{ e^{ik_0 x \cos \beta} \left[(x - x^*) (f_3^I + f_3^D) + \frac{U}{i\omega} f_3^D \right] \right\} dx \quad (4.97)$$

$$E_6 = \zeta_a \int_{L^*} \left\{ e^{ik_0 x \cos \beta} \left[(x - x^*) (f_2^I + f_2^D) + \frac{U}{i\omega} f_2^D \right] \right\} dx \quad (4.98)$$

onde as forças seccionais de Froude-Krilov e difracção para ondas unitárias são dadas por (4.50) e (4.59).

Contribuição de Restituição

A contribuição das forças de restituição para o esforço de corte vertical e momento flector vertical, resulta da variação com os movimentos verticais do navio das forças hidrostáticas para vante da secção x^* :

$$B_3 = -\rho g \int_{L^*} b(\xi_3 - x\xi_5) dx \quad (4.99)$$

$$B_5 = \rho g \int_{L^*} b(x - x^*)(\xi_3 - x\xi_5) dx \quad (4.100)$$

onde b é a boca seccional, que se assume constante em torno da linha de água média.

3.7 Comentários Finais

Neste capítulo apresentada-se uma solução linear no domínio da frequência, para o problema dos movimentos e esforços estruturais induzidos em navios a avançar com velocidade constante e rumo arbitrário relativamente a ondas regulares e sinusoidais.

Enquanto no capítulo 3 foi formulado o problema hidrodinâmico linear e tridimensional, no presente capítulo este problema foi resolvido assumindo ondas incidentes harmónicas, logo como consequência da linearização o escoamento em torno do casco é também harmónico.

Para simplificar os efeitos tridimensionais no escoamento assumiram-se duas simplificações da teoria de faixas. Na primeira assume-se que o comprimento do navio é bastante superior à boca e imersão, logo no cálculo das forças os integrais de superfície podem ser decompostos em dois integrais, um ao longo dos contornos das secções transversais e o outro ao longo do comprimento do navio. Seguindo a mesma hipótese de navio esbelto, as seis componentes do vector \tilde{n} podem ser representadas em termos das componentes do vector bidimensional normal aos contornos das secções transversais.

A segunda hipótese da teoria de faixas é utilizada para remover os efeitos tridimensionais da condição fronteira na superfície livre. Neste caso assume-se que a frequência de encontro é elevada, o que implica que as ondas devem ser de comprimento relativamente pequeno. Esta parece uma restrição muito severa, no entanto na prática na gama de frequências baixas, ou seja para ondas compridas, as forças hidrostáticas e de Froude-Krilov são dominantes e alguma imprecisão no cálculo das forças de radiação ou difracção afecta pouco os resultados finais.

De facto é reconhecido que a presente teoria de faixas faz previsões bastante boas dos movimentos verticais para navios convencionais. Quanto ao movimento de balanço, o amortecimento viscoso é relevante pois neste caso o amortecimento invíscido é relativamente pequeno. A qualidade das previsões está dependente da estimativa destes efeitos viscosos.

No caso dos movimentos no plano horizontal de abatimento e guinada não existem forças de restituição, logo uma estimativa bastante correcta dos coeficientes hidrodinâmicos e forças de difracção é bastante importante. Para estes modos de movimento as previsões da teoria de faixas são menos boas.

Quanto aos esforços dinâmicos verticais, em termos gerais pode-se dizer que as previsões são razoáveis para navios com coeficientes de finura total elevados, ou seja navios “cheios” e com os costados verticais ao longo do comprimento do navio. Para

navios com coeficientes de finura baixos e amuras bastante inclinadas (como por exemplo os porta-contentores), pode-se dizer que a teoria de faixas linear falha na previsão de alguns efeitos não-lineares bastante importantes. Para melhorar este tipo de previsões apresenta-se nos próximos capítulos uma teoria de faixas no domínio do tempo nova, onde são introduzidos alguns efeitos não-lineares.

4 REFERÊNCIAS

Newman, J. N., 1962, “The Exciting Forces on Fixed Bodies in Waves”, *Journal of Ship Research*, pp. 10-17.

Newman, J. N., 1965, “The Exciting Forces on a Moving Body in Waves”, *Journal of Ship Research*, pp. 190-199.

Ogilvie, T. F., and Tuck, E. O., 1969, “A Rational Strip Theory for Ship Motions”, Part 1, Report No. 013, Department Naval Architects Marine Engineers, University of Michigan, Ann Arbor.

Salvesen, N., Tuck, E. O., and Faltinsen, O., 1970, “Ship motions and sea loads”, *Transactions Society Naval Architects Marine Engineers*, Vol. 78, pp 250-287.

Sommerfeld, A., 1949, “Partial Differential Equations in Physics”, *Pure and Applied Mathematics*, Vol. 1, Academic Press, pp. 182-200.

Timman, R. and Newman, J. N., 1962, “The Coupled Damping Coefficients of Symmetric Ships”, *Journal of Ship Research*, Vol. 5, No. 4.