

**TEXTO DE APOIO**

# **DINÂMICA DO NAVIO**

**Carlos Guedes Soares**

Edição Provisória  
Secção Autónoma de Engenharia Naval  
1996/97

# DINÂMICA DO NAVIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1-1</b>
1.1 Características dos Problemas Dinâmicos .....	1-2
1.2 Dedução das equações de equilíbrio a partir do Princípio de Hamilton.....	1-3
<b>2. COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE .....</b>	<b>2-1</b>
2.1 Características do Movimento.....	2-1
2.2 Oscilações Livres Sem Amortecimento.....	2-1
2.3 Oscilações Livres Com Amortecimento .....	2-4
2.3.1 Amortecimento Superior ao Crítico .....	2-5
2.3.2 Amortecimento crítico .....	2-5
2.3.3 Amortecimento inferior ao crítico .....	2-5
2.3.4 Decremento logarítmico .....	2-6
2.4 Oscilações Forçadas com Excitação Harmónica .....	2-7
<b>3. ARFAGEM DOS NAVIOS.....</b>	<b>3-1</b>
3.1 Arfagem em Águas Tranquilas.....	3-1
3.2 Arfagem num Sistema de Ondas Regulares .....	3-3
3.3 Balanço dos Navios .....	3-6
<b>4. COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE .....</b>	<b>4-1</b>
4.1 Oscilações Livres de Sistemas sem Amortecimento .....	4-2
4.2 Oscilações Livres de um Corpo Sujeito a Translação e Rotação .....	4-5
4.3 Modos Próprios de Oscilação.....	4-6
4.4 Resposta a uma Excitação Harmónica.....	4-8
<b>5. ARFAGEM E BALANÇO SÍNCRONOS .....</b>	<b>5-1</b>
5.1 Dedução das Equações do Movimento.....	5-1
5.2 Solução das Equações do Movimento .....	5-6
5.3 Determinação dos Coeficientes Hidrodinâmicos das Equações .....	5-8
<b>6. INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS .....</b>	<b>6-1</b>
6.1 Função Densidade de Probabilidade .....	6-1
6.2 Valor médio ou esperança matemática .....	6-4
6.3 Distribuições Conjuntas .....	6-9
6.4 6.4 Análise de Correlação.....	6-11
6.5 6.5 Função de Autocorrelação.....	6-14
6.6 6.6 Correlação Cruzada .....	6-17
6.7 6.7 Análise de Fourier .....	6-19
6.8 6.8 Função de Densidade Espectral.....	6-24
<b>7. REPRESENTAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO MAR.....</b>	<b>7-1</b>
7.1 Elevação da Superfície do Mar.....	7-1
7.2 Modelo Estocástico da Elevação da Superfície do Mar .....	7-3
7.3 Simulação Numérica do Mar Agitado .....	7-7
7.4 Modelos Teóricos de Espectros de Vagas .....	7-9

## 1. INTRODUÇÃO

A análise dinâmica como aqui é entendida, é o estudo da resposta de sistemas a excitações que variam no tempo. Esta variação pode ser da intensidade, da direcção ou do ponto de aplicação da excitação. A resposta também pode ser de diferentes tipos, incluindo deslocamentos, velocidades, acelerações, tensões, etc.

As excitações que provocam o comportamento dinâmico de sistemas ou estruturas podem classificar-se em periódicas e não periódicas. O caso mais simples de carga periódica é a harmónica simples, que varia sinusoidalmente no tempo. É o caso das ondas regulares, dos desequilíbrios em máquinas rotativas e da excitação provocada nos navios pelo hélice.

As solicitações não periódicas podem ter uma variação complexa no tempo mas são passíveis de representação por um somatório de componentes harmónicas simples com diferentes amplitudes e ângulos de fase. A resposta a este tipo de acções também se obtém pela sobreposição das respostas a cada uma das componentes harmónicas.

Outro tipo de carga não periódica é a de um impulso ou de impacto, como acontece por exemplo no catarrar do navio, no efeito de uma explosão submarina num navio ou inclusivamente na colisão de um navio com qualquer objecto.

Enquanto que as solicitações periódicas provocam uma resposta estacionária do sistema, as outras têm um carácter transiente. Em ambos os casos, a resposta de um sistema a uma excitação harmónica é o elemento básico no qual se baseia a construção de soluções para casos mais complexos.

A análise dos problemas dinâmicos pode ser determinística ou não, dependendo das características da excitação e do sistema em estudo. Se a variação temporal da excitação é completamente conhecida, embora sendo de carácter oscilatório ou mesmo irregular, pode considerar-se a excitação como estando prescrita e é possível conduzir uma análise determinística do sistema. Quando a variação temporal da excitação não é completamente conhecida mas é passível de definição em termos estatísticos então a excitação é aleatória e é necessário o recurso a métodos não-determinísticos de análise.

No caso dos navios a excitação fundamental é devida às ondas as quais têm em regra um carácter aleatório. Há situações de ondulação com uma única direcção e com um período constante que se assemelham a uma excitação harmónica, mas, estas ocorrem excepcionalmente e são casos particulares da agitação marítima.

O estudo da dinâmica aleatória tem por base as soluções determinísticas dos problemas pelo que o estudo destes assuntos deverá começar pela análise dinâmica de sistemas determinísticos, passar aos métodos de descrição de excitações aleatórias para finalmente se ocupar da resposta dos sistemas às excitações aleatórias.

Em regra procura-se descrever a resposta dos sistemas em termos de deslocamentos, o que no caso do navio descreve os seus movimentos. Em muitas situações interessa também conhecer as consequências dos movimentos em termos de tensões provocadas na estrutura. Este aspecto é o objecto da dinâmica estrutural e pode ser descrito a partir do conhecimento dos deslocamentos.

O estudo dos movimentos do navio pode ser feito com base no estudo da dinâmica dos corpos rígidos. O estudo da dinâmica estrutural do navio implica considerá-lo como um corpo flexível e quantificar as distorções elásticas da estrutura. Em regra os movimentos dos navios envolvem deslocamentos que são ordens de grandeza superiores às defleções da estrutura. Por isso as defleções estruturais normalmente não têm influência na excitação provocada pelos movimentos do navio, o que permite um estudo da dinâmica do navio baseado na hipótese que este é um corpo rígido. Já o inverso não é verdadeiro pois a solução do problema dos movimentos do navio é um pré-requisito para a definição da excitação que actua na estrutura.

A separação do estudo em dinâmica do navio compreendendo o comportamento como corpo rígido e em vibrações ou dinâmica estrutural do navio dedicando-se ao estudo de sistemas elásticos e contínuos reflecte exactamente as duas diferentes perspectivas.

A diferença fundamental entre os problemas dinâmicos e os estáticos reside na dependência dos primeiros na variável tempo. Assim é necessário satisfazer as equações de equilíbrio do sistema durante a sucessão de instantes que constituem a história da resposta do sistema em causa.

Para além disso, o movimento do sistema está associado a acelerações que produzem forças de inércia que se opõem ao movimento. Por isso a formulação do equilíbrio do sistema tem de ter em consideração não só as forças aplicadas, como no caso estático, mas também as forças de inércia as quais são por sua vez um resultado do movimento. Os problemas dinâmicos tornam-se estáticos quando as acelerações tendem para zero, eliminando assim as forças de inércia.

A solução de um problema dinâmico de um corpo flexível implica a necessidade de se conhecer a história do deslocamento e da aceleração dos vários pontos do corpo. Sendo o corpo contínuo, o seu equilíbrio dinâmico é representado por equações diferenciais às derivadas parciais, que incluem as variáveis do tempo e espaço.

Se no entanto o corpo for constituído por massas concentradas em pontos discretos, as forças de inércia desenvolvem-se só naquelas massas e o sistema pode ser representado pelos deslocamentos e acelerações das massas. Desta forma reduz-se um sistema contínuo a um sistema discreto, com um número de graus de liberdade iguais ao produto do número de massas pelo número de graus de liberdade de cada uma.

Esta representação de massas concentradas é adequada para sistemas que tenham uma boa proporção da sua massa distribuída por alguns pontos definidos. Nos casos em que a massa está distribuída, a alternativa é representar a curva da deformada por um somatório de funções de forma  $\phi_i(x)$  e da sua respectiva amplitude  $z_i(t)$ :

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) \cdot \phi_i(x)$$

As funções de forma são ortogonais, sendo frequentemente funções trigonométricas. Cada uma destas funções representa um sistema com um grau de liberdade o qual fica completamente definido com a história no tempo da sua amplitude  $z_i(t)$ .

Um método de discretização que se tem mostrado muito útil é o dos elementos finitos, o qual utiliza funções de forma em elementos discretos da estrutura, quer esta seja constituída por componentes ou seja contínua.

As equações do movimento podem ser estabelecidas a partir da formulação do equilíbrio do sistema, utilizando o princípio d'Alembert ou recorrendo a métodos energéticos como seja a utilização do princípio de Hamilton. No primeiro caso recorre-se à segunda lei de Newton que nos diz que a taxa de variação da quantidade de movimento de uma massa é igual à força  $f(t)$  que actua sobre ela:

$$f(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{dw}{dt} \right)$$

onde  $w$  é o deslocamento da massa. Na maioria dos problemas a massa não varia com o tempo pelo que resulta:

$$f(t) - m \frac{d^2w}{dt^2} = 0$$

O produto da massa pela aceleração é uma força de inércia que se opõe ao movimento, como resulta do sinal negativo na equação. O princípio d'Alembert é este conceito de substituir o efeito do movimento pela força de inércia que lhe está associada. Desta forma, ao estabelecer a equação do equilíbrio dinâmico, fica-se automaticamente com a equação diferencial do movimento do corpo.

Outra forma de estabelecer as equações de equilíbrio recorre ao princípio de Hamilton e ao cálculo de variações. Assim, a variação das energias cinética  $T$  e potencial  $V$  mais a variação do trabalho  $W$  feito pelas forças não conservativas tem de se anular durante o período de tempo entre  $t_1$  e  $t_2$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0$$

Este método não considera explicitamente as forças elásticas e de inércia que são vectoriais por natureza, utilizando antes a energia cinética e potencial que são grandezas escalares.

Note-se que o caso estático é a situação particular que ocorre quando a energia cinética se anula reduzindo-se a equação anterior ao princípio da energia potencial mínima.

## 2. COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

### 2.1 Características do Movimento

Um corpo ou um sistema pode ser sujeito a oscilações desde que tenha massa e elasticidade. A massa é responsável pelas forças de inércia que se criam com a aceleração do corpo. A elasticidade faz aparecer uma força que resulta do deslocamento. Um sistema de um grau de liberdade pode ainda incluir um dissipador, o qual gera forças que são proporcionais à velocidade do movimento do corpo.

Os sistemas lineares, quando perturbados relativamente à sua posição de repouso descrevem movimentos harmônicos que podem ser descritos por funções do tipo  $A \sin \omega t$  e  $A \cos \omega t$ , onde  $A$  é a amplitude do movimento,  $t$  é o tempo e  $\omega$  é a frequência circular do movimento. O movimento repete-se ao fim de um intervalo de tempo denominado período, durante o qual completa um ciclo. O número de ciclos por unidade de tempo é a frequência da vibração.

O movimento pode ser de oscilação livre quando não se fazem sentir forças exteriores. Neste caso ele oscila com a frequência natural. Havendo forças exteriores a condicionar o movimento, haverá oscilações forçadas que se dão na frequência das forças exteriores. A amplitude das oscilações forçadas depende da relação que existe entre a frequência de excitação e a frequência natural do sistema. Quando estas frequências coincidem, o sistema entra em ressonância, experimentando grandes amplitudes.

Os graus de liberdade de um sistema são iguais ao número mínimo de variáveis independentes que são necessárias para descrever o movimento. Assim, sistemas com um grau de liberdade podem ser idealizados por um conjunto de massa, dissipador e mola, sujeito a movimentos de translação, ou de rotação.

### 2.2 Oscilações Livres Sem Amortecimento

Considere-se o sistema simples de uma massa  $m$  suportada por uma mola com constante  $k$ . Na situação estática o peso do corpo,  $W = mg$  onde  $g$  é a aceleração da gravidade, provoca uma extensão da mola de  $\delta = W/k$ .

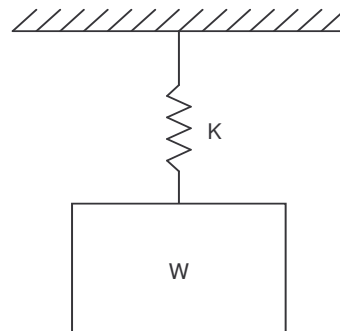


Figura 1

Escolhendo como origem das coordenadas a posição de equilíbrio estático, pode estabelecer-se a equação do movimento tendo em conta somente as forças e deslocamentos

dinâmicos. Assim, considerando positivos os vectores dirigidos para baixo, o equilíbrio de forças quando o corpo está fora da posição de equilíbrio estático, é dado pela segunda lei de Newton:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.1)$$

onde  $\ddot{x}$  é a segunda derivada de  $x$  em ordem ao tempo ou seja é a aceleração do movimento.

Introduzindo a expressão  $\omega_n^2 = k/m$  na equação (2.1) resulta em:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2.2)$$

Esta equação diferencial homogénea de segunda ordem tem a seguinte solução geral:

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t \quad (2.3)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes a determinar das condições iniciais do movimento. Considerando que o movimento se inicia na posição  $x_0$  com a velocidade inicial  $v_0$ , a solução geral (2.3) fica:

$$x = \frac{v_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t \quad (2.4)$$

Esta solução geral pode ser expressa de outra forma, introduzindo as novas variáveis  $X$  e  $\phi$  definidas por:

$$x_0 = X \operatorname{sen} \phi \quad (2.5a)$$

$$\frac{v_0}{\omega_n} = X \cos \phi \quad (2.5b)$$

Combinando estas duas expressões resulta em

$$X = \left[ x_0^2 + \left( v_0 / \omega_n \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.6a)$$

$$t_g \phi = \frac{\omega_n x_0}{v_0} \quad (2.6b)$$

Por outro lado a equação (2.5) transforma-se em:

$$x = X \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (2.7)$$

o que é outra forma da solução geral. Neste caso a amplitude da oscilação é  $X$  e  $\phi$  é a diferença de fase.

As equações (2.4) e (2.7) descrevem um movimento com um período  $T$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.8)$$

com uma frequência natural:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.9)$$

e com uma frequência circular:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.10)$$

Se se tomar em consideração que a deflecção estática da mola é  $\delta = W/k = mg/k$ , então a expressão (2.9) fica:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta}} \approx \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \text{ ciclos/seg} \quad (2.11)$$

substituindo  $g$  por  $9.81 \text{ m/s}^2$ .

Um método alternativo de obter a equação da frequência natural  $\omega_n$  consiste na aplicação do princípio da conservação da energia. Nas vibrações de um sistema não dissipativo, a energia cinética máxima

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \omega_n^2 X^2 \quad (2.12)$$

é igual à energia potencial máxima:

$$V_{\max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 = \frac{1}{2} k X^2 \quad (2.13)$$

Nestas expressões  $x_{\max}$  e  $\dot{x}_{\max}$  deduzem-se a partir da expressão (2.7). Igualando  $T$  a  $V$  resulta na equação (2.1).

A equação diferencial (2.1) e a sua solução (2.7) é também aplicável a um sistema que consista num corpo rígido capaz de rodar em torno de um eixo fixo e que seja mantido em posição por uma mola. Neste caso deve-se substituir  $m$  pelo momento de inércia da massa do corpo  $J$ , e  $x$  pelo seu deslocamento angular  $\theta$ , representando agora a constante da mola  $k$  o momento por unidade de rotação:

$$J\ddot{\theta} = -k\theta \quad (2.14)$$

O sistema com um grau de liberdade é uma idealização que é justificável em muitos casos. Estas aproximações dão excelentes resultados quando a massa do elemento elástico é pequena relativamente à massa que suporta e quando a deflecção do elemento elástico é grande relativamente às deformações que ocorrem no sistema. Neste caso a frequência natural de oscilação do sistema pode ser determinada com razoável precisão pelas expressões (2.8) e (2.9) desde que se adopte um valor correcto de  $k$ .



### 2.3 Oscilações Livres Com Amortecimento

Em todos os sistemas sujeitos a movimento há dissipação de energia que se associa com forças de dissipação. Há vários tipos de forças dissipativas, mas o mais comum é a dissipação viscosa que é proporcional à velocidade do movimento.

Este efeito pode ser esquematicamente representado por um amortecedor ligado à massa. A equação do movimento neste caso é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.15)$$

para as oscilações livres da massa. A força de dissipação é  $c\dot{x}$  e  $c$  é o coeficiente de amortecimento.

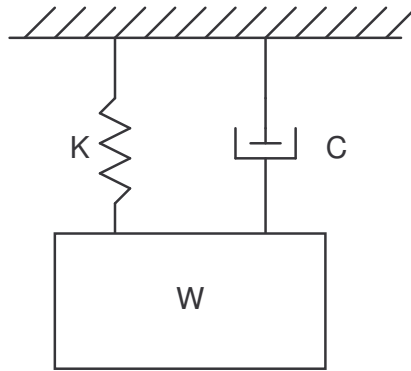


Figura 2

Considerando que a solução homogénea desta equação tenha a forma:

$$x = e^{st} \quad (2.16)$$

e substituindo (2.16) em (2.15) resulta em:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.17)$$

Desta forma a solução geral é dada por

$$x = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} \quad (2.18)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes a avaliar a partir das condições iniciais.

A característica da oscilação livre do sistema amortecido depende do valor numérico da raiz da expressão (2.17). Como valor de referência define-se um amortecimento crítico como o valor de  $c$  que anula a raiz:

$$C_c = 2\sqrt{km} = 2m \omega_n \quad (2.19)$$

O amortecimento real do sistema pode então ser representado em termos do amortecimento crítico, pelo factor de amortecimento  $\xi = c/C_c$ . Substituindo esta variável na expressão (2.17) resulta em:

$$s_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n \quad (2.20)$$

ficando desta forma o comportamento do sistema dependente do valor de  $\xi$ .

### 2.3.1 Amortecimento Superior ao Crítico

Neste caso  $\xi > 1$  e a raiz na expressão (2.20) é real e sempre menor do que  $\xi$  tornando  $s_1$  e  $s_2$  sempre negativos. O deslocamento  $x$  fica então dado pela soma de duas exponenciais amortecidas:

$$x = A \exp\left[\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n t\right] + B \exp\left[\left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n t\right] \quad (2.21)$$

Esta expressão representa um movimento não oscilatório, também denominado não periódico.

### 2.3.2 Amortecimento crítico

O caso de  $\xi = 1$  representa o estado de transição entre as duas condições analisadas anteriormente. Neste caso as raízes  $s_1$  e  $s_2$  tornam-se iguais a  $(-\omega_n)$ . A solução fica então:

$$x = \left[ x_0 + \left(\frac{v_0}{\omega_n} + x_0\right)\omega_n t \right] \exp(-\omega_n t) \quad (2.22)$$

quando as condições iniciais são  $x_0$  e  $v_0$ . A solução geral para qualquer caso é

$$x = (A + Bt) \exp(-\omega_n t) \quad (2.23)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes.

Este movimento é semelhante ao movimento aperiódico do primeiro caso, tendo no entanto o menor amortecimento possível para um movimento aperiódico. Por isso o corpo regressa à posição de equilíbrio no menor intervalo de tempo.

### 2.3.3 Amortecimento inferior ao crítico

Quando  $\xi < 1$  a raiz torna-se imaginária, podendo então representar-se a expressão (2.20) por:

$$s_{1,2} = \left(-\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}\right)\omega_n \quad (2.24)$$

A solução geral fica então

$$\begin{aligned} x &= \left[ A \exp\left(i\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n t\right) + B \exp\left(-i\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n t\right) \right] \exp(-\xi\omega_n t) = \\ &= X \cdot \text{sen}\left(\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n t + \phi\right) \cdot \exp(-\xi\omega_n t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

O movimento neste caso é oscilatório com amplitudes decrescentes. A expressão geral do movimento em função das condições iniciais de deslocamento  $x_0$  e velocidade  $v_0$  é dada por:

$$x = \left[ x_0 \cos \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \left( \frac{v_0}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} + \xi x_0 \right) \text{sen} \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t \right] \exp(-\xi \omega_n t) \quad (2.26)$$

### 2.3.4 Decremento logarítmico

A quantidade de amortecimento existente num sistema pode ser medido pela taxa de decremento da oscilação. Para isso define-se o decremento logarítmico  $\delta$  como o logaritmo natural da razão de dois máximos sucessivos de  $x$ , representados respectivamente por  $x_i$  e  $x_{i+1}$ :

$$\delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} \quad (2.27)$$

Quando na expressão (2.25),  $\text{sen}(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \phi) = 1$ , a curva de  $x$  é tangente à curva exponencial envolvente da oscilação, representada por  $X \exp(-\xi \omega_n t)$ . Na realidade o ponto de tangência é ligeiramente à direita do ponto de amplitude máxima mas a discrepância é desprezável e a amplitude no ponto de tangência pode ser considerado igual à amplitude máxima. Neste caso, o decremento logarítmico fica dado por:

$$\delta = \ln \frac{\exp(-\xi \omega_n t_i)}{\exp[-\xi \omega_n (t_i + T)]} = \ln \exp(\xi \omega_n T) = \xi \omega_n T \quad (2.28)$$

dado que dois máximos sucessivos estão separados no tempo pelo período  $T$ . Como na oscilação amortecida o período é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.29)$$

o decremento logarítmico fica:

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \approx 2\pi\xi \quad (2.30)$$

Um procedimento comum para calcular  $\xi$  é determinar o número de ciclos necessários para que a amplitude se reduza a metade do seu valor. Denominando por  $x_0$  a amplitude inicial  $x_n$  a amplitude após  $n$  oscilações, pode-se deduzir a seguinte expressão:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_0}{X_n} = 2\pi\xi \quad (2.31)$$

Esta expressão permite estimar o valor do amortecimento crítico a partir do decremento logarítmico. Note-se que utilizando-se diferentes valores para  $n$  deduzir-se-à diferentes

valores para  $\xi$ , que resultam das imprecisões das medições. O valor final de amortecimento será a média dos valores obtidos.

Para o caso particular  $x_n/x_0 = 1/2$  chega-se a:

$$\xi = 0,11/n \quad (2.32)$$

#### 2.4 Oscilações Forçadas com Excitação Harmónica

Considere-se agora o sistema de massa, mola e amortecedor considerado no parágrafo anterior sujeito agora a uma força harmónica representada por  $F_0 \sin \omega t$ . A equação diferencial do movimento resultante é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (2.33)$$

A solução desta equação é composta de duas partes. Uma é uma vibração livre na sua frequência natural, o que representa a solução da equação homogénea considerada na secção 2.3. A outra componente é uma solução particular do tipo da força aplicada. É um movimento oscilatório na frequência da força de excitação.

A oscilação livre é introduzida quando  $t = 0$  como um transiente que vai desaparecendo gradualmente devido ao efeito do dissipador. A oscilação remanescente é harmónica e tem uma frequência igual à da excitação, embora o deslocamento tenha um atraso de fase relativamente à força de excitação.

Considerando a solução particular como

$$x = X \sin(\omega t - \phi) \quad (2.34)$$

e substituindo-a em (2.33) conduz a:

$$m\omega^2 X \sin(\omega t - \phi) - c\omega X \sin\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) - k X \sin(\omega t - \phi) = F_0 \sin \omega t = 0 \quad (2.35)$$

A partir desta equação podem determinar-se as expressões para a amplitude e o ângulo de fase do movimento:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.36a)$$

e

$$\tan \phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (2.36b)$$

Portanto, a solução completa do problema de oscilação forçada, incluindo as solicitações livres é:

$$x = X \operatorname{sen}(\sqrt{1-\xi^2} \omega_n t - \phi) \exp(-\xi \omega_n t) + \frac{F_0 \operatorname{sen}(\omega t - \phi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.37)$$

Para generalizar os resultados é normalmente preferível trabalhar com variáveis adimensionais. Dividindo a amplitude da resposta  $X$  pela deflexão estática  $X_0 = F_0/k$  obtém-se a chamada amplificação dinâmica:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = |H(\omega)| \quad (2.38a)$$

e

$$\tan \phi = \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.38b)$$

onde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  é a frequência natural de um sistema sem amortecimento e  $\Lambda = \omega / \omega_n$  é o factor de sintonia.

Quando um sistema é excitado na sua frequência natural de oscilação entra em ressonância reduzindo-se a amplificação dinâmica a

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{2\xi} \quad (2.39)$$

e o desfasamento vem  $\phi = \pi/2$ .

### 3. ARFAGEM DOS NAVIOS

#### 3.1 Arfagem em Águas Tranquilas

Numa primeira aproximação vai-se estudar o movimento vertical de uma secção bidimensional a flutuar em águas tranquilas. O correspondente problema tridimensional é o da oscilação vertical de um cilindro com uma secção transversal igual à secção bidimensional considerada.

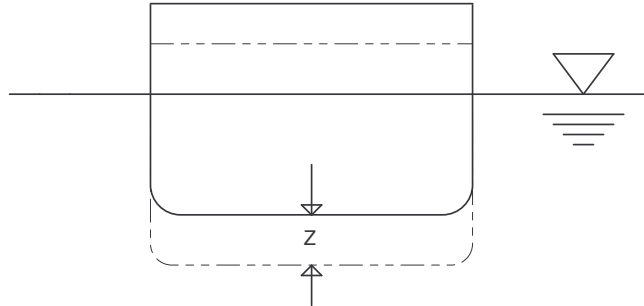


Figura 3

Considerando que o casco é vertical na zona da linha de flutuação, a variação do deslocamento do navio provocada por uma variação de imersão  $z$  é dada por  $\gamma Az$  onde  $\gamma$  é o peso específico da água e  $A$  é a área da figura de flutuação.

O movimento vertical do navio vai provocar um escoamento da água com a qual está em contacto. As acelerações provocadas na água criam forças hidrodinâmicas que se opõem ao movimento. Como estas forças são proporcionais à aceleração, o seu efeito pode ser representado por uma massa fictícia, denominada por massa acrescentada. Neste tipo de movimento, a massa acrescentada pode ser da mesma ordem de grandeza que o deslocamento do navio.

Havendo uma deslocação  $z$  da posição de equilíbrio, a equação do movimento resultante é dada por:

$$\rho(V + V_a)\ddot{z} + \gamma A z = 0 \quad (3.1)$$

onde  $V$  é o volume da carena,  $\rho V_a$  é a massa acrescentada,  $\rho$  é a densidade da água e  $\gamma = \rho g$  é o peso específico.

A solução daquela equação é

$$z = Z \sin(\omega_n t + \phi) \quad (3.2)$$

onde  $Z$  é a amplitude do movimento,  $\phi$  a diferença de fase e a frequência natural de arfagem é:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{gA}{V + V_a}} \quad (3.3)$$

O correspondente período de arfagem é:

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{V + V_a}{gA}} \quad (3.4)$$

Pode agora exprimir-se a aceleração vertical em função do período, combinando (3.1) e (3.4) :

$$\ddot{z} = \frac{gA}{V + V_a} z = -\frac{4\pi^2}{T_a^2} z \quad (3.5)$$

Esta equação mostra que pequenos períodos de arfagem provocam grandes acelerações e vice-versa. Note-se que a expressão (3.4) indica que o período de arfagem depende fundamentalmente do volume da carena, da área da figura de flutuação e da massa acrescentada a qual se relaciona com a geometria do navio. Por isso, as formas do navio acabam por ditar o valor do período de arfagem.

Para se saber o efeito da arfagem na distribuição dos momentos flectores no navio deve-se notar que a aceleração  $\ddot{z}$ , eq. (3.5), vai provocar uma força por unidade de comprimento de

$$F_d = \frac{w + w_a}{g} \frac{4\pi^2}{T_a^2} z \quad (3.6)$$

onde  $w$  é o peso do navio por unidade de comprimento e  $w_a/g$  é a massa acrescentada por unidade de comprimento.

A curva da impulsão vai ser alterada de  $\gamma B(x) z$  em cada secção transversal, onde  $B(x)$  é a boca na secção localizada na posição  $x$ :

$$\int_0^L \frac{w(x) + w_a(x)}{g} \frac{4\pi^2}{T_a^2} z dx = \int_0^L \gamma B(x) z dx \quad (3.7a)$$

ou

$$\frac{\gamma(V + V_a)}{g} \frac{4\pi^2}{T_a^2} \gamma A z \quad (3.7b)$$

O equilíbrio dos momentos estará satisfeito se o centro de flutuação estiver na mesma vertical do centro da carena acrescentada. De outra forma produz-se também um balanço longitudinal que será estudado mais adiante.

Embora o equilíbrio global (3.7b) seja satisfeito, a diferença entre os dois termos em cada secção, origina uma carga no casco cujas integrações sucessivas dão a distribuição do esforço transverso e do momento flector:

$$M_a(x_0) = \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} \frac{w(x) + w_a(x)}{g} \frac{4\pi^2}{T_a^2} z \, dx \, dx - \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} \gamma B(x) z \, dx \, dx \quad (3.8)$$

O momento flector total será a soma desta componente dinâmica com o momento estático que existe na posição de equilíbrio.

As oscilações verticais dos navios provocam ondas de superfície que se propagam a partir do navio. Essas ondas necessitam de energia para se propagar, a qual é fornecida pelo movimento do navio. Este fenómeno dissipador de energia actua como um amortecedor do movimento introduzindo mais um termo do tipo  $c\dot{z}$  na equação do movimento (3.1) que se transforma em:

$$\ddot{z} + \frac{c}{\rho(V + V_a)} \dot{z} + \frac{g A}{V + V_a} z = 0 \quad (3.9)$$

A solução desta equação é

$$z = Z \exp(-\xi \omega_n t) \cdot \text{sen}(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \phi) \quad (3.10)$$

onde  $\omega_n$  é dado por (3.3), e o factor de amortecimento é

$$\xi = \frac{c}{2\rho\sqrt{g A(V + V_a)}} \quad (3.11)$$

A frequência natural desta oscilação é

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.12)$$

e o período de arfagem com amortecimento passa a ser:

$$T_{ad} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{(1 - \xi^2)\omega_n}} = \frac{T_a}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.13)$$

onde  $T_a$  é dado pela equação (3.4). O amortecimento  $\xi$  vai assim aumentar o período de arfagem.

### 3.2 Arfagem num Sistema de Ondas Regulares

Considere-se agora o caso de um navio que se encontra em repouso inicialmente e que vai ser sujeito a um sistema de ondas regulares. Estando o navio fixo no espaço, a passagem das ondas provoca alterações do calado produzindo um efeito semelhante ao de uma força harmónica de excitação.

Deslocando-se um navio com uma velocidade  $V$  numa direcção que faz um ângulo  $\alpha$  com a direcção de propagação das ondas, o tempo que medeia entre a passagem de duas cristas sucessivas pelo mesmo ponto do navio denomina-se período de encontro  $T_E$ .



Considerando que o navio se move no sentido oposto ao da propagação das ondas, o período de encontro é dado por:

$$T_E = \frac{\lambda}{V_w + V \cos \alpha} \quad (3.14)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento das ondas  $v_w$  é a respectiva velocidade ( $v_w = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ ). Notando que o período das ondas é dado por  $T_w = \sqrt{2\pi\lambda/g}$  o período de encontro fica:

$$T_E = \frac{T_w}{1 + \frac{V \cos \alpha}{v_w}} \quad (3.15)$$

Note-se que o período de encontro é menor do que o período das ondas quando estas vêm dos sectores por ante a vante do través mas é maior do que  $T_w$  quando as ondas vêm dos sectores de ré pois nessa altura  $\cos \alpha$  torna-se negativo.

Considere-se que a altura da onda a meio navio é dada por

$$h(x, t) = h_0 \cos \frac{2\pi t}{T_E} \quad (3.16)$$

onde  $h_0$  é a amplitude da onda ou seja, metade da altura da onda é  $T_w$  é o período da onda. Então a altura da onda numa secção que esteja à distância  $x$  do meio navio é dada por

$$h(x, t) = h_0 \cos \left( \frac{2\pi t}{T_E} + \frac{2\pi x \cos \alpha}{\lambda} \right) \quad (3.17)$$

Para se calcular a força de excitação provocada pelas ondas considera-se o navio estacionário e a passagem das ondas como quase estática. Nestas circunstâncias, a cada momento a força vertical total é dada por

$$\begin{aligned} F_n &= \int_{-L/2}^{L/2} \gamma B(x) h_0 \cos \left( \frac{2\pi t}{T_E} + \frac{2\pi x \cos \alpha}{\lambda} \right) dx = \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \gamma B(x) h_0 \left( \cos \frac{2\pi t}{T_E} \cos \frac{2\pi x \cos \alpha}{\lambda} - \text{sen} \frac{2\pi t}{T_E} \cos \frac{2\pi x \cos \alpha}{\lambda} \right) dx \end{aligned} \quad (3.18)$$

Este integral depende da forma da superfície de flutuação, representada por  $B(x)$ . No caso de uma barcaça paralelipédica, com  $B(x) = B$ , obtém-se

$$F_h = \frac{\gamma B \lambda h_0}{\pi \cos \alpha} \cdot \text{sen} \frac{\pi L \cos \alpha}{\lambda} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T_E} \quad (3.19)$$

A análise desta expressão indica que a força vertical depende da direcção das ondas, sendo máxima quando  $\alpha = 0^\circ$ :

$$F_{h \max} = \gamma B h_0 L \cos \frac{2\pi t}{T_E} \quad (3.20)$$

expressão que se obtém notando que para pequenos ângulos o seno é igual ao próprio ângulo.

Outro factor que influencia a força de excitação é a razão entre o comprimento do navio e da onda. Quando as ondas são muito longas  $L/\lambda$  torna-se pequeno e a expressão (3.19) reduz-se à (3.20), a qual não depende da direcção das ondas. Se por outro lado  $L/\lambda$  é grande, as ondas são muito pequenas e a forma tende para zero.

Como se viu, a expressão (3.19) ou a correspondente ao caso mais geral, (3.18), podem ser representadas por

$$F_h = F_0 \cos \frac{2\pi t}{T_E} \quad (3.21)$$

desde que se escolha convenientemente a origem do tempo, e se defina  $H_0$  a partir de (3.18). A equação da arfagem forçada do navio pode ser então escrita:

$$\rho(V + V_a)\ddot{z} + C\dot{z} + \gamma Az = F_0 \cos \frac{2\pi t}{T_E} \quad (3.22)$$

A solução completa desta equação é

$$z = z_h + Z_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_E} - \phi\right) \quad (3.23)$$

onde  $z_h$  é a solução homogénea dada por (3.10). Depois de um tempo suficientemente longo só subsiste a oscilação forçada atrás expressa em função de  $Z_1$  e  $\phi$ .

Definindo o factor de sintonia como  $\Lambda = T_a/T_E$ , o desfasamento vem dado por

$$\tan \phi = \frac{2\xi\Lambda}{1 - \Lambda^2} \quad (3.24)$$

e a amplificação dinâmica é

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Lambda^2)^2 + (2\xi\Lambda)^2}} \quad (3.25)$$

onde o factor de amortecimento  $\xi$  é dado pela equação (3.11) e  $Z_0 = F_0/\gamma A$  é a sobreimersão provocada por uma força estática igual a  $F_0$  (eqn.3.21).

Combinando as expressões anteriores fica-se com a aceleração do navio:

$$\ddot{Z} = \frac{4\pi^2}{T_E^2} X \frac{Z_0}{\sqrt{(1 - \Lambda^2)^2 + (2\xi\Lambda)^2}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_E} - \phi\right) \quad (3.26)$$

a qual na ressonância ( $\Lambda = 1$ ) se transforma em:

$$\ddot{Z} = \frac{4\pi^2}{T_E^2} \frac{Z_0}{2\xi\Lambda} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_E} - \phi\right) \quad (3.27)$$

Note-se que esta aceleração não se torna infinita pela existência do amortecimento  $\xi$ . Com  $\Lambda = 1$ , a expressão (3.24) indica que  $\tan\phi = \infty$  ou  $\phi = 90^\circ$  ou seja, o navio tem a sua amplitude máxima de arfagem e a aceleração máxima um quarto de período depois da máxima força de excitação ter sido aplicada ao navio.

A força dinâmica de inércia associada com a aceleração fica assim desfasada da força estática devida à impulsão no navio. Por isso, para se determinar os esforços totais na estrutura é necessário tomar na devida consideração a diferença de fase entre as componentes quase estáticas e dinâmica da resposta.

Note-se finalmente que a velocidade do navio e a sua direcção relativamente às ondas influem no período de encontro  $T_E$  e portanto na resposta e sua amplificação.

### 3.3 Balanço dos Navios

O balanço dos navios, quer longitudinal quer transversal é também descrito por uma equação diferencial de segundo grau semelhante à da arfagem. Por essa razão não se irá apresentar um tratamento exaustivo do assunto indicando somente os resultados mais salientes.

Considere-se de momento o balanço longitudinal, ou cabeceio, o qual vai influenciar a distribuição longitudinal dos esforços. No âmbito da teoria metacêntrica, uma inclinação do navio vai criar um momento endireitante dado por

$$M_e = \gamma V \overline{GZ} = \gamma V \overline{GM} \theta \quad (3.29)$$

onde  $\overline{GZ}$  é o braço de estabilidade  $\overline{GM}$  é a altura metacêntrica.

A equação do balanço livre tanto transversal como longitudinal vem então:

$$\rho (V + V_a) k^2 \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + \gamma V \overline{GM} \theta = 0 \quad (3.30)$$

onde  $k$  é o raio de giração e  $J$  é o momento de inércia da massa do navio ( $J = \rho V k^2$ ), para o modo de balanço em causa.

A solução desta equação é:

$$\theta = \Theta \exp(-\xi \omega_n t) \cdot \text{sen}\left(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \phi\right) \quad (3.31)$$

onde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{gV\overline{GM}}{(V + V_a)k^2}} = \sqrt{\frac{g\overline{GM}}{k^2} \cdot \frac{V}{V + V_a}} \quad (3.32)$$

$$\xi = \frac{c}{2\rho k \sqrt{(V + V_a) V g GM}} \quad (3.33)$$

e  $\theta$  e  $\phi$  são a amplitude do movimento e o desfazamento respectivamente.

O período do balanço é:

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2\pi k}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sqrt{\frac{V + V_a}{V g GM}} \quad (3.34)$$

As expressões consideradas até aqui são válidas tanto para o balanço longitudinal como para o transversal desde que se considerem as variáveis apropriadas ou seja,  $\theta$  representa rotações transversais ou longitudinais, a altura metacêntrica será a transversal ou longitudinal, o momento de inércia será também transversal ou longitudinal e finalmente o coeficiente de amortecimento e a massa acrescentada  $V_a$  também serão diferentes.

O efeito produzido pelos movimentos é no entanto diferente na estrutura do navio. Relativamente a esforços desenvolvidos durante a flexão longitudinal do navio, é o balanço longitudinal que importa considerar.

Considerando-se a altura da onda a meio-navio dada por

$$h(x, t) = h_0 \cos \frac{2\pi t}{T_w} \quad (3.35)$$

onde  $h_0$  é a amplitude da onda  $T_w$  é o seu período a altura numa secção qualquer do navio vem dada por

$$h(x, t) = h_0 \cos \left( \frac{2\pi t}{T_E} + \frac{2\pi x \cos \alpha}{\lambda} \right) \quad (3.36)$$

onde  $T_E$  é o período de encontro entre o navio e a onda.

O momento inclinante produzido por este sistema de ondas, é dado por:

$$M_E = \int_{-L/2}^{+L/2} \rho g B(x) h_0 x \cos \left( \frac{2\pi t}{T_E} + \frac{2\pi x \cos \alpha}{\lambda} \right) dx \quad (3.37)$$

onde a origem dos  $x$  está no centro de flutuação. É este momento que vai provocar o balanço longitudinal do navio, sendo denominado momento de excitação.

Desenvolvendo aquela expressão, pode representar-se o momento por:

$$M_E = \int_{-L/2}^{+L/2} \rho g B(x) h_0 x \left( \cos \frac{2\pi t}{T_E} \cos \frac{2\pi x \cos \alpha}{\lambda} - \sin \frac{2\pi t}{T_E} \sin \frac{2\pi x \cos \alpha}{\lambda} \right) dx \quad (3.38)$$

A avaliação deste integral depende das formas do navio, nomeadamente da variação  $B$  ao longo do navio. Em regra a avaliação deste integral conduzirá a um resultado que se poderá exprimir numa expressão do tipo de:

$$M_E = M_0 \text{sen} \frac{2\pi t}{T_E} \quad (3.39)$$

desde que a origem do tempo se escolha de forma apropriada.

A equação do movimento forçado será:

$$\ddot{q} + \frac{c}{r(V+V_a)K^2} \dot{q} + \frac{g\overline{GM}}{K^2} \frac{V}{V+V_a} q = \frac{M_0}{r(V+V_a)K^2} \text{sen} \frac{2\pi t}{T_E} \quad (3.40)$$

A solução particular desta equação representa o movimento que subsiste em regime estacionário e é dada por:

$$\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{(1-\Lambda^2)^2 + (2\Lambda\xi)^2}} \text{sen} \left( \frac{2\pi t}{T_E} - \phi \right) \quad (3.41)$$

onde  $\theta_0$  é ângulo de inclinação estática e o desfasamento  $\phi$  dado por:

$$\text{tg}\phi = -\frac{2\xi\Lambda}{1-\Lambda^2} \quad (3.42)$$

Enquanto a arfagem está associada a uma aceleração vertical que é constante ao longo do navio, o balanço provoca uma aceleração que varia linearmente ao longo do navio. Numa dada secção a aceleração vertical é:

$$\backslash \quad (3.43)$$

A força de inércia associada a esta aceleração menos a força correspondente à variação da impulsão na secção define a carga dinâmica a que a estrutura vai estar sujeita. O momento flector induzido é obtido integrando aquela expressão duas vezes sucessivas, tal como se tinha feito no caso da arfagem:

$$M_d(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{w(x) + w_a(x)}{g} \cdot \frac{4\pi^2}{T_E} \cdot \frac{\theta_0}{\sqrt{(1-\Lambda^2)^2 + (2\xi\Lambda)^2}} \quad (3.44a)$$

$$\cdot x \left( \text{sen} \frac{2\pi t}{T_E} + \phi \right) dx dx - \int_0^x \int_0^x \gamma B(x) \quad (3.44b)$$

$$\cdot x \frac{\theta_0}{\sqrt{(1-\Lambda^2)^2 + (2\xi\Lambda)^2}} \text{sen} \left( \frac{2\pi t}{T_E} + \phi \right) dx dx \quad (3.44c)$$

O momento flector dinâmico tem uma variação harmónica no tempo, estando  $\phi$  graus desfasado relativamente à onda incidente.

#### 4. COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Os sistemas de dois graus de liberdade necessitam de duas coordenadas independentes para descrever o movimento. Muitas vezes estes sistemas são compostos por duas massas, embora também possa ser só um corpo com a liberdade de executar dois tipos distintos de movimentos.

Enquanto as oscilações harmônicas livres de um sistema de um grau de liberdade estão definidas pela sua frequência natural, tal não se passa num sistema com dois graus de liberdade. Neste caso há duas configurações fundamentais e duas frequências naturais de vibração que lhe estão associadas.

Considere-se um sistema genérico de duas massas ligadas por um sistema de mola e dissipador:

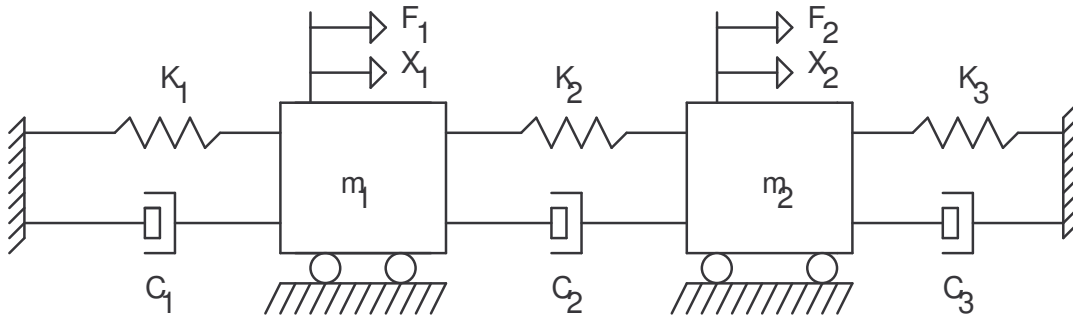


Figura 4

onde se indica também a origem das coordenadas para os deslocamentos  $x_1$  e  $x_2$  das massas  $m_1$  e  $m_2$ . O sistema fica completamente descrito pelos deslocamentos  $x_1$  e  $x_2$ . As equações do movimento das duas massas são:

$$F_1(t) - c_1 \dot{x}_1(t) - k_1 x_1(t) + c_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + k_2 [x_2(t) - x_1(t)] = m_1 \ddot{x}_1(t) \quad (4.1a)$$

$$F_2(t) - c_2 [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] - k_2 [x_2(t) - x_1(t)] - c_3 \dot{x}_2(t) - k_3 x_2(t) = m_2 \ddot{x}_2(t)$$

ou

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{x}_1(t) - c_2 \dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - c_2 \dot{x}_1(t) + (c_2 + c_3) \dot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3) x_2(t) &= F_2(t) \end{aligned} \quad (4.1b)$$

Estas duas equações estão dependentes na medida em que ambas contêm termos em  $x_1$  e  $x_2$  e nas suas derivadas. A solução do sistema de duas equações simultâneas resulta no movimento de massas.

Os termos de acoplamento são  $c_2 \dot{x}_2$  e  $k_2 x_2$  na primeira equação  $c_2 \dot{x}_1$  e  $k_2 x_1$  na segunda equação.

Em notação matricial podia representar-se as equações por

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2a)$$

ou

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\} \quad (4.2b)$$

A solução deste sistema é difícil porque as equações não são independentes. Os termos de acoplamento são os termos que não estão na diagonal das matrizes  $[c]$  e  $[k]$ . Quando estes termos são zero, o sistema está desacoplado. Na figura verifica-se que isto corresponde a ter dois sistemas de um grau de liberdade desligados um do outro.

#### 4.1 Oscilações Livres de Sistemas sem Amortecimento

Considere-se o caso simplificado de um sistema idêntico ao da figura mas sem nenhum dos três amortecedores. As equações do movimento podiam escrever-se:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Sendo as equações homogêneas, com soluções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , também as  $\alpha x_1(t)$  e  $\alpha x_2(t)$  serão soluções, sendo  $\alpha$  uma constante. Tem particular interesse a procura de soluções em que  $x_1$  e  $x_2$  descrevem o mesmo movimento no tempo. Neste caso a razão entre  $x_1$  e  $x_2$  mantém-se constante durante o movimento podendo-se dizer que o sistema assume uma dada configuração. Neste caso as soluções serão do tipo

$$x_1(t) = u_1 f(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = u_2 f(t) \quad (4.4a,b)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são amplitudes  $f(t)$  é uma função de tempo. Substituindo nas equações anteriores resulta em:

$$\begin{cases} m_1 u_1 \ddot{f}(t) + (k_{11} u_1 + k_{12} u_2) f(t) = 0 \\ m_2 u_2 \ddot{f}(t) + (k_{12} u_1 + k_{22} u_2) f(t) = 0 \end{cases} \quad (4.5a),(4.5b)$$

onde

$$k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{12} = k_{21} = -k_2 \quad \text{e} \quad k_{22} = k_2 + k_3. \quad (4.6 \text{ a-c})$$

Para que estas equações tenham soluções é necessário que

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{k_{11} u_1 + k_{12} u_2}{m_1 u_1} = \frac{k_{12} u_1 + k_{22} u_2}{m_2 u_2} = \lambda \quad (4.7)$$

onde  $\lambda$  é constante real. Assim, para haver um movimento síncrono é necessário haver solução para as equações:

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 \quad (4.8)$$

e

$$\begin{cases} (k_{11} - \lambda m_1)u_1 + k_{12}u_2 = 0 \\ k_{12}u_1 + (k_{22} - \lambda m)u_2 = 0 \end{cases} \quad (4.9a), (4.9b)$$

Se assumirmos que a função do tempo tem a forma

$$f(t) = Ae^{st} \quad (4.10)$$

e substituindo na equação 4.8 conduz a:

$$s^2 + \lambda = 0 \quad (4.11)$$

a qual tem duas raízes:

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \quad (4.12)$$

A solução da equação é então

$$f(t) = A_1 \exp\sqrt{-\lambda}t + A_2 \exp-\sqrt{-\lambda}t \quad (4.13)$$

Se  $\lambda$  fosse um número negativo os argumentos dos exponenciais eram iguais mas de sinais contrários. Neste caso, quando  $t \rightarrow \infty$ , um termo tendia para infinito e outro para zero, o que está em desacordo com a natureza física do movimento. Por isso,  $\lambda$  tem de ser sempre positivo. Neste caso pode-se representar por  $\lambda = \omega^2$ , e então:

$$s_{1,2} = \pm i\omega \quad (4.14)$$

donde a solução 4.13 pode escrever-se:

$$f(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \quad (4.15)$$

ou alternativamente:

$$f(t) = (A_1 + A_2) \cos \omega t + i(A_1 - A_2) \text{sen} \omega t \quad (4.16)$$

Definindo as constantes por:

$$A_1 + A_2 = C \cos \phi \quad \text{e} \quad i(A_1 - A_2) = C \text{sen} \phi \quad (4.17a,b)$$

a expressão (4.16) exprime-se por:

$$f(t) = C \cos(\omega t - \phi) \quad (4.18)$$

Para determinar os valores de  $\omega$  é necessário resolver o sistema de equações:

$$(k_{11} - \omega^2 m_1)u_1 + k_{12}u_2 = 0 \quad (4.19a)$$

$$k_{12}u_1 + (k_{22} - \omega^2 m_2)u_2 = 0 \quad (4.19b)$$



Estas duas equações algébricas homogêneas só têm solução se o determinante dos coeficientes de  $u_1$  e  $u_2$  for zero:

$$\det \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.20)$$

o que implica que:

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_{22} + m_2 k_{11}) \omega^2 + k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = 0 \quad (4.21)$$

Esta equação característica tem duas soluções:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 k_{22} + m_2 k_{11}}{m_1 m_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{m_1 k_{22} + m_2 k_{11}}{m_1 m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{m_1 m_2}} \quad (4.22)$$

Este resultado indica que só há dois modos nos quais o movimento é síncrono. Estes ocorrem às frequências naturais do sistema.

Sabendo as frequências naturais  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , podem determinar-se as razões  $r_1$  e  $r_2$  entre as coordenadas  $u_2$  e  $u_1$  para as duas frequências, recorrendo ao último sistema de equações:

$$r_1 = \left( \frac{u_2}{u_1} \right)_1 = - \frac{k_{11} - \omega_1^2 m_1}{k_{12}} = - \frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_1^2 m_2} \quad (4.23 \text{ a})$$

$$r_2 = \left( \frac{u_2}{u_1} \right)_2 = - \frac{k_{11} - \omega_2^2 m_1}{k_{12}} = - \frac{k_{12}}{k_{22} - \omega_2^2 m_2} \quad (4.23 \text{ b})$$

Estas duas razões entre coordenadas determinam a configuração do sistema quando ele executa oscilações harmónicas pelo que se denominam modos normais de vibração do sistema.

O primeiro modo de vibração é definido por  $\omega_1$  e  $r_1$  e o segundo por  $\omega_2$  e  $r_2$ . Pode demonstrar-se que o número de modos naturais de vibração de um sistema é igual ao número de graus de liberdade.

O movimento de cada um dos modos é

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) \quad (4.24a)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad (4.24b)$$

O movimento do sistema em qualquer instante momento é dado pela sobreposição dos dois modos:

$$\{x(t)\} = \{x(t)\}_1 + \{x(t)\}_2 \quad (4.25)$$

$$= C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad (4.25b)$$

#### 4.2 Oscilações Livres de um Corpo Sujeito a Translação e Rotação

Para além do sistema de duas massas e mola, outra possibilidade de ter um sistema com dois graus de liberdade, é ter uma barra sujeita a movimentos de translação e rotação. Considere-se o caso simplificado da situação indicada na figura:

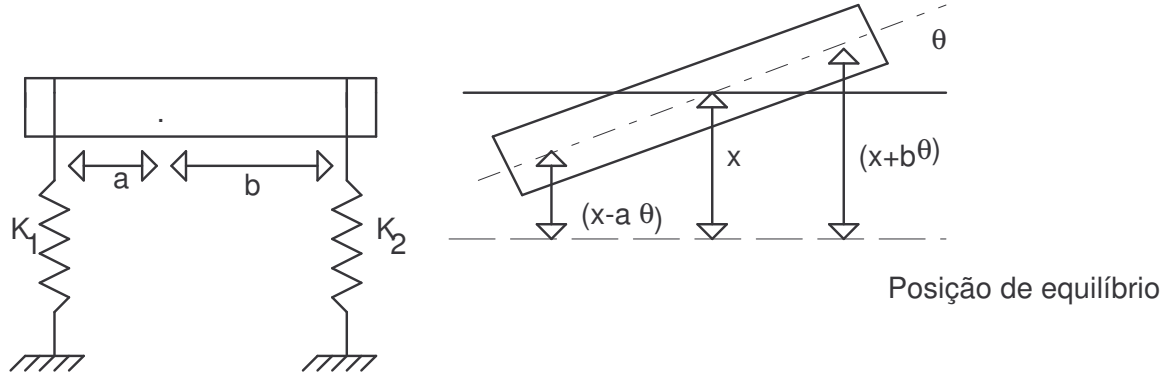


Figura 5

Este sistema de uma barra apoiada em duas molas pode ser uma representação adequada de um automóvel por exemplo ou até um modelo simplificado de um navio a flutuar em água.

A barra é considerada rígida com uma massa  $m$  e com o centro de massa  $C_m$  às distâncias  $a$  e  $b$  das molas  $k_1$  e  $k_2$ . O corpo tem um momento de inércia da massa de  $I_c$  relativamente ao centro  $C_m$ .

A posição do corpo fica completamente descrita pela translação  $x$  do seu centro e pela rotação  $\theta$  em torno de  $C_m$ . As duas equações do movimento reflectem o equilíbrio de forças verticais e do momento relativamente a  $C_m$ :

$$\begin{cases} -k_1(x-a\theta) - k_2(x+b\theta) = m\ddot{x} \\ k_1^a(x-a\theta) - k_2^b(x+b\theta) = I_c\ddot{\theta} \end{cases} \quad (4.26a) \quad (4.26b)$$

ou

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(k_1 a - k_2 b) \\ -(k_1 a - k_2 b) & k_1 a^2 + k_2 b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

Considere-se agora um ponto 0 tal que uma força vertical aplicada nesse ponto provoque só uma translação do corpo. Denominando por  $a_1$  e  $b_1$  distâncias de 0 a  $k_1$  e  $k_2$ , pode exprimir-se a condição de não rotação com o requisito de o momento ser nulo relativamente ao ponto 0, o qual se desloca a distância  $x_1$  da posição de equilíbrio:

$$k_1 x_1 a_1 = k_2 x_1 b_1 \quad (4.28)$$

o que implica que  $k_1 a_1 = k_2 b_1$

Substituindo esta condição e  $x_1 = x + (a_1 - a)\theta$  no sistema de equações

$$\begin{cases} -k_1(x_1 - a_1\theta) - k_2(x_1 + b_1\theta) = m[\ddot{x}_1 - (a_1 - a)\ddot{\theta}] \\ k_1(x_1 - a_1\theta)a_1 - k_2(x_1 + b_1\theta)b_1 = I_0\ddot{\theta} - m\ddot{x}_1 - m(a_1 - a)\ddot{\theta} \end{cases} \quad (4.29a)$$

em que  $I_0$  é o momento de inércia em relação ao novo centro, resulta em:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 - me\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)x_1 = 0 \\ -me\ddot{x}_1 + I_0\ddot{\theta} + (k_1 a_1^2 + k_2 b_1^2)\theta = 0 \end{cases} \quad (4.30a)(4.30b)$$

onde  $e = a_1 - a$  representa a excentricidade do ponto 0 relativamente ao centro de massa  $C_m$ . Na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} m & -me \\ -me & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 a_1^2 + k_2 b_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Enquanto no primeiro sistema de matrizes o acoplamento entre os sistemas ocorre na matriz de rigidez, no segundo é na matriz de massas. No primeiro caso, diz-se que há um acoplamento estático ou elástico e no segundo o acoplamento é dinâmico ou inercial.

Fica claro deste caso que o tipo de acoplamento que existe depende das ordenadas utilizadas para descrever o movimento e não é uma propriedade intrínseca do sistema.

### 4.3 Modos Próprios de Oscilação

Volte-se ao sistema de equações de (4.3) da secção 4.1 e considere-se que a solução geral (44 a - b) toma a forma de um somatório de duas soluções  $q(t)$ :

$$\begin{cases} x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) = r_1 q_1(t) + r_2 q_2(t) \end{cases} \quad (4.32ab)$$

onde as razões  $r_1$  e  $r_2$  são dadas pela expressão (4.23a, b) da secção 4.1.

Substituindo estas soluções no sistema (4.3) resulta em:

$$\begin{cases} m_1(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + k_{11}(q_1 + q_2) + k_{12}(r_1 q_1 + r_2 q_2) = 0 \\ m_2(r_1 \ddot{q}_1 + r_2 \ddot{q}_2) + k_{12}(q_1 + q_2) + k_{22}(r_1 q_1 + r_2 q_2) = 0 \end{cases} \quad (4.33a)(4.33b)$$

Multiplicando a primeira equação por  $m_1 m_2 r_2$  e a segunda por  $m_1$  e subtraindo a segunda da primeira, obtém-se:

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (r_2 - r_1) \ddot{q}_1 + (m_2 r_2 k_{11} + m_2 r_1 r_2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_1) q_1 + \\ + (m_2 r_2 k_{11} + m_2 r_2^2 k_{12} - m_2 r_2^2 k_{12} - m_1 k_{22} - m_1 k_{22} r_2) q_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação de (4.32) por  $m_2 r_1$  e a segunda por  $m_1$  e subtraindo a segunda da primeira, obtém-se:

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (r_1 - r_2) \ddot{q}_1 + (m_2 r_1 k_{11} + m_2 r_1^2 k_{12} - m_1 k_{12} - m_1 k_{22} r_1) q_1 + \\ + (m_2 r_1 k_{11} + m_2 r_1 r_2 k_{12} - m_2 k_{12} - m_1 k_{22} r_2) q_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Substituindo nestas duas últimas equações  $r_1$  e  $r_2$  pelas expressões indicadas pela expressão (4.23), resulta nas equações:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.36)$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as frequências naturais do sistema, dadas pelas expressões (4.22) da secção 2.

A particularidade destas equações, que as distingue do sistema (4.3), é que elas não são simultâneas mas sim independentes uma da outra. As soluções  $q_1$  e  $q_2$  que permitem este desacoplamento das equações do movimento são as coordenadas naturais ou principais, as quais definem os modos de vibração.

A solução de cada equação é:

$$q_i(t) = C_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad i = 1, 2 \quad (4.37)$$

Introduzindo agora as expressões (4.36) nas soluções (4.32) resulta na solução do movimento:

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \quad (4.38)$$

que é a sobreposição dos modos naturais de vibração. As constantes  $C_i$  e  $\phi_i$  dependem das condições iniciais do movimento.

Sabendo o deslocamento e velocidades iniciais, as constantes determinam-se especificando o sistema (4.37) para este caso:

$$x_1(0) = x_{10} = C_1 \cos \phi_1 + C_2 \cos \phi_2 \quad (4.39a)$$

$$x_2(0) = x_{20} = C_1 r_1 \cos \phi_1 + C_2 r_2 \cos \phi_2 \quad (4.39b)$$

$$\dot{x}_1(0) = v_{10} = C_1 \omega_1 \sin \phi_1 + C_2 \omega_2 \sin \phi_2 \quad (4.39c)$$

$$\dot{x}_2(0) = v_{20} = C_1 \omega_1 r_1 \sin \phi_1 + C_2 \omega_2 r_2 \sin \phi_2 \quad (4.39d)$$

Estas expressões podem-se transformar em relações do tipo

$$\begin{cases} C_1 \cos \phi_1 = \frac{1}{r_2 - r_1} (r_2 x_{10} - x_{20}) \\ C_1 \text{sen} \phi_1 = \frac{1}{r_2 - r_1} \frac{1}{\omega_1} (r_2 v_{10} - v_{20}) \end{cases} \quad (4.40)$$

a partir das quais se obtém:

$$C_1 = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{(r_2 x_{10} - x_{20})^2 + \frac{(r_2 v_{10} - v_{20})^2}{\omega_1^2}} \quad (4.41a)$$

$$C_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{(-r_1 x_{10} - x_{20})^2 + \frac{(r_1 v_{10} - v_{20})^2}{\omega_2^2}} \quad (4.41b)$$

$$\phi_1 = \text{tg}^{-1} \frac{r_2 v_{10} - v_{20}}{\omega_1 (r_2 x_{10} - x_{20})} \quad (4.41c)$$

$$\phi_2 = \text{tg}^{-1} \frac{r_1 v_{10} - v_{20}}{-\omega_2 (r_1 x_{10} + x_{20})} \quad (4.41d)$$

#### 4.4 Resposta a uma Excitação Harmônica

Considere-se o caso geral da equação de um sistema de dois graus de liberdade com todos os termos:

$$\begin{cases} m_{11} \ddot{x}_1 + m_{12} \ddot{x}_2 + c_{11} \dot{x}_1 + c_{12} \dot{x}_2 + k_{12} x_1 + k_{12} x_2 = f_1(t) \\ m_{12} \ddot{x}_1 + m_{22} \ddot{x}_2 + c_{12} \dot{x}_1 + c_{22} \dot{x}_2 + k_{12} x_1 + k_{22} x_2 = f_2(t) \end{cases} \quad (4.42)$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são as forças de excitação que se consideram harmônicas:

$$F_1(t) = F_1 e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad F_2(t) = F_2 e^{i\omega t} \quad (4.43a,b)$$

Considere-se agora que as soluções em regime estacionário também são harmônicas e têm a forma:

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_2 e^{i\omega t} \quad (4.44a,b)$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são em regra números complexos que dependem da frequência e dos parâmetros do sistema .

Substituindo as expressões das soluções nas equações do movimento, resulta em:

$$\begin{cases} (-\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11}) X_1 + (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) X_2 = F_1 \\ (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) X_1 + (-\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22}) X_2 = F_2 \end{cases} \quad (4.45a,b)$$

Chamando impedância à função definida por:

$$Z_{ij}(\omega) = -\omega^2 m_{ij} + i\omega c_{ij} + k_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.46)$$

pode escrever-se o sistema de equações de forma compacta como:

$$[Z(\omega)]\{X\} = \{F\} \quad (4.47)$$

A solução deste sistema obtém-se pré-multiplicando ambos os termos desta equação pelo inverso de  $[Z(\omega)]$ :

$$\{X\} = [Z(\omega)]^{-1}\{F\} \quad (4.48)$$

O inverso de  $[Z(\omega)]$  é dado por:

$$[Z(\omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega) - Z_{12}^2(\omega)} \begin{bmatrix} Z_{22}(\omega) & -Z_{12}(\omega) \\ -Z_{12}(\omega) & Z_{11}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Introduzindo (4.49) em (4.48) fica-se então com a solução do sistema :

$$X_1(\omega) = \frac{Z_{22}(\omega)F_1 - Z_{12}(\omega)F_2}{Z_{11}(\omega)Z_{22}(\omega) - Z_{12}^2(\omega)} \quad (4.50b)$$

Considere-se agora o caso simplificado do sistema tratado na secção 2, com duas massas e três molas.

Assuma-se ainda que  $F_2 = 0$ . Então as equações (4.50a - 4.50b) ficam:

$$X_1(\omega) = \frac{(k_{22} - \omega^2 m_2)F_1}{(K_{11} - \omega^2 m_1)(k_{22} - \omega^2 m_2) - k_{12}^2} \quad (4.51a)$$

$$X_1(\omega) = \frac{-k_{12}F_1}{(K_{11} - \omega^2 m_1)(k_{22} - \omega^2 m_2) - k_{12}^2} \quad (4.51b)$$

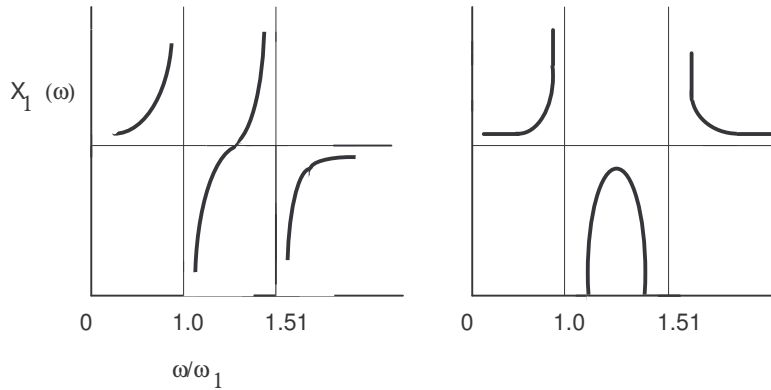


Figura 6

## 5. ARFAGEM E BALANÇO SÍNCRONOS

Até aqui estudou-se a arfagem e o balanço como movimentos independentes e únicos. Na realidade, quando um navio é sujeito à acção de um sistema de ondas, ele responde em ambos os graus de liberdade os quais estão em regra acoplados.

O acoplamento entre arfagem e balanço longitudinal resulta da não-simetria proa-popa que o navio exhibe. Já a simetria bombordo-estibordo faz com que a arfagem não esteja acoplada ao balanço transversal podendo assim ser estudada sem o ter em consideração.

Quando o navio é excitado por um sistema de ondas que incide obliquamente à sua direcção de propagação há uma desigual distribuição da impressão nos dois bordos do navio excitando-se também o balanço transversal.

Um estudo completo da dinâmica do navio terá de contemplar os seis graus de liberdade. No entanto são fundamentalmente a arfagem e o balanço longitudinal que contribuem para os esforços induzidos na estrutura. Além disso, os métodos e conceitos a aplicar aos restantes 4 graus de liberdade são essencialmente os mesmos que se aplicam a estes dois pelo que se estudarão aqui somente a arfagem e o balanço.

### 5.1 *Dedução das Equações do Movimento*

Considere-se o caso de um navio a mover-se com velocidade constante perpendicularmente a um sistema de ondas regulares monocromáticas. Desprezando a translação horizontal provocada pelo efeito das ondas, o movimento do navio fica descrito com as componentes da arfagem e do balanço longitudinal bem como da diferença de fase entre eles.

Para se estudar o movimento do navio, este considera-se como um corpo rígido sujeito a translações verticais e a rotações. A especificidade deste caso está na interacção que se cria com a água onde flutua. Várias teorias têm sido propostas para determinar as forças de excitação e as reacções desenvolvidas pela água, resistindo ao movimento do navio. Actualmente a teoria mais sofisticada que está a ser realmente aplicada é a teoria das faixas (strip theory).

A hipótese fundamental da teoria das faixas é considerar que o navio pode ser representado por um conjunto de secções transversais ao longo das quais o escoamento da água é essencialmente bidimensional.

O movimento do navio no seio da água torna necessário a utilização de eixos de referência diferentes para a água e para o navio. Como as partículas de água, não acompanham o movimento de avanço do navio, o escoamento da água tem de ser representado relativamente a eixos fixos. O escoamento da água, que é essencialmente vertical, dá-se em torno de um corpo que está continuamente a variar de forma, por força do seu movimento horizontal.

Em consequência do movimento horizontal do navio, é conveniente utilizar um sistema de eixos que se desloca à velocidade do navio para descrever os movimentos de arfagem e balanço.

O movimento do navio vai ser provocado pela acção das ondas ou seja pela variação das forças relativamente à posição de equilíbrio. Por isso no estudo dos movimentos desprezam-se as forças envolvidas no equilíbrio estático do navio.

Considere-se um sistema de eixos fixos  $x, y, z$  com a origem  $O$  num ponto de superfície livre da água. Considere-se agora o sistema fixo ao navio com os eixos  $x, y, z$  e com a origem  $O$  no ponto da superfície livre da água que está na vertical do centro de gravidade. As coordenadas  $x$  e  $\xi$  são positivas para vante e  $z$  é positivo para baixo.

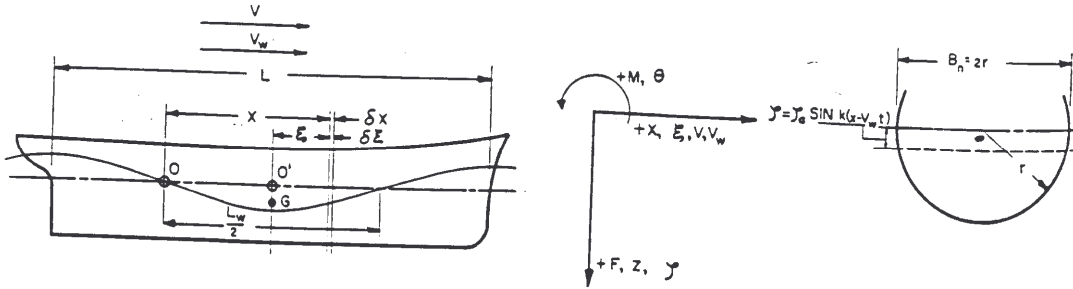


Figura 7

O movimento do navio fica descrito com a translação do centro de gravidade e pela rotação, considerada positiva quando a proa se eleva. Logo, o movimento vertical de uma secção qualquer que dista  $\xi$  do centro de gravidade é dada por  $z - \xi\theta$ , para ângulos pequenos.

A aplicação da teoria das faixas baseia-se também na hipótese do movimento relativo. Esta hipótese, considera que as forças que se desenvolvem numa dada secção podem ser referidas à posição instantânea do navio na água, a qual resulta do efeito combinado do movimento do navio e da elevação da superfície do mar. Represente-se a altura da superfície livre da água por

$$h = h_0 \text{ sen } k(x - V_w t) \tag{5.1}$$

onde  $h_0$  é a amplitude da onda,  $k$  o número da onda e  $V_w$  a velocidade da onda. O deslocamento vertical  $z_r$  da secção que está à distância  $\xi$  de  $O'$  é dado por:

$$z_r = z - \xi\theta - h \tag{5.2}$$

A velocidade relativa obtém-se diferenciando esta expressão em ordem ao tempo, tendo em consideração que num dado plano transversal depende do tempo:

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi} = -V \tag{5.3}$$

Então a velocidade relativa vertical vem:

$$\dot{z}_r = w_r = \dot{z} - (\xi\dot{\theta} - V\theta) - \dot{h} \tag{5.4}$$

Pode-se ter a noção física do efeito do termo em  $V\theta$  considerando o navio a deslocar-se a uma velocidade  $V$  com um caimento  $\theta$  positivo. Quando o navio passa por uma secção fixa no espaço, um observador via as secções deslocarem-se verticalmente para baixo.



A aceleração vertical obtém-se diferenciando a expressão anterior:

$$\dot{w}_r = \dot{z}_r = \ddot{z} - \xi\ddot{\theta} + 2V\dot{\theta} - \ddot{h} \quad (5.5)$$

Tendo as expressões para os deslocamentos, velocidades e acelerações é possível estabelecer a equação do equilíbrio de cada secção transversal, utilizando um método semelhante ao adoptado no estudo da arfagem do navio. Numa faixa de comprimento  $d\xi$ , a força vertical por unidade de comprimento pode ser representada esquematicamente por:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_i = m_i \ddot{z}_i + (a_i \dot{w}_r + b_i w_r) + c_i z_r, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.6)$$

onde identifica a faixa considerada,  $m_i$  é massa dessa secção,  $\ddot{z}_i$  é aceleração vertical da secção ou seja é  $(\ddot{z} - \xi\ddot{\theta})$ . Note-se que o primeiro termo representa as forças de inércia, o segundo as forças hidrodinâmicas e o último as forças hidrostáticas.

Recorde-se que no tratamento da arfagem tinha-se considerado a massa acrescentada  $a_i$  associada à massa da secção já que ambas eram proporcionais à mesma aceleração. No presente caso, enquanto a força de inércia do navio é proporcional à aceleração do navio, a força "de inércia" hidrodinâmica é proporcional à aceleração relativa.

As componentes hidrodinâmicas estão desfasadas de  $90^\circ$  já que uma é proporcional à aceleração e outra à velocidade relativa. A componente hidrostática representa a variação da impulsão devida ao deslocamento relativo. Por isso o coeficiente  $c_i$  relaciona-se com a área da secção transversal na vizinhança da linha de água, e pode ser aproximado por:

$$c_i = \gamma B_i \quad (5.7)$$

onde  $B_i$  é a boca do navio na secção.

A massa acrescentada que está indicada na equação (5.6) é uma grandeza que varia no tempo pois devido ao movimento relativo a secção imersa varia. A variação da massa acrescentada pode ser descrita recorrendo ao conceito da taxa de variação da quantidade de movimento  $(a_i w_r)$ :

$$\frac{d(a_i w_r)}{dt} = w_r \frac{da_i}{dt} + a_i \frac{dw_r}{dt} \quad (5.8)$$

onde neste caso  $a_i$  já representa a massa acrescentada correspondente à posição inicial da secção.

Utilizando a regra da diferenciação composta e a expressão (5.3) resulta em

$$\frac{d(a_i w_r)}{dt} = w_r V \frac{da_i}{d\xi} + a_i \dot{w}_r \quad (5.9)$$

onde o termo em  $V$  representa o efeito da velocidade do navio.

Introduzindo esta expressão em (5.6) resulta numa expressão mais precisa da força em cada secção:

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)_i = +m_i \ddot{z}_i + a_i \dot{w}_r + \left(b_i - V \frac{da_i}{d\xi}\right) w_r + c_i z_r \quad (5.10)$$

Recordando que a expressão (5.1) da elevação da superfície do mar resulta de um potencial de escoamento:

$$\phi = h_0 V_w e^{-kz} \text{sen } k(x - V_w t) \quad (5.11)$$

obtendo-se por diferenciação:

$$h = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.12)$$

e que a pressão hidrostática a uma profundidade  $z$  e dada por:

$$p = \rho g(z - h) \quad (5.13)$$

resulta que a pressão e as forças a ela associadas apresentam uma diminuição com a profundidade provocada pelo factor  $e^{-kz}$  da expressão (5.11).

Por isso, os valores correctos das variáveis correspondentes ao movimento relativo na expressão (5.9) deverão ser:

$$z_r = z - \xi \theta - h e^{-kz} \quad (5.14a)$$

$$w_r = \dot{z} - \xi \dot{\theta} + V \theta - \dot{h} e^{-kz} \quad (5.14b)$$

$$\dot{w}_r = \ddot{z} - \xi \ddot{\theta} + 2V \dot{\theta} - \ddot{h} e^{-kz} \quad (5.14c)$$

$$\ddot{z}_i = \ddot{z} - \xi \ddot{\theta} \quad (5.14d)$$

Para que haja satisfação das equações de equilíbrio em todo o navio é necessário integrar a expressão (5.9) ao longo do comprimento do navio e igualá-lo a zero. A integração é feita ao longo da ordenada  $x$  relativa aos eixos fixos, mas para os termos que não envolvam a elevação da superfície do mar a integração feita em ordem a  $\xi$  é sempre idêntica à integração em ordem  $x$  logo,

$$\int \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi = \int m_i \ddot{z}_i d\xi + \int a_i \dot{w}_r d\xi + \int b_i w_r d\xi - V \int \frac{da_i}{d\xi} w_r d\xi + \int c_i z_r d\xi = 0 \quad (5.15)$$

definem-se os seguintes termos :

$$a = \int a_i d\xi \quad (5.16a)$$

$$b = \int b_i d\xi \quad (5.16b)$$

$$c = \int c_i d\xi \quad (5.16c)$$

$$d = \int a_i \xi d\xi \quad (5.16d)$$

$$e = -\int b_i \xi d\xi + 2V \int a_i d\xi + V \int \frac{da_i}{d\xi} \xi d\xi \quad (5.16e)$$

$$h = -\int c_i \xi d\xi + V \int b_i d\xi \quad (5.16f)$$

para o que teve em conta que:

$$m = \int m_i d\xi \quad (5.17a)$$

$$\int \frac{da_i}{d\xi} d\xi = 0 \quad (5.17b)$$

$$\int m_i \xi d\xi = 0 \quad (\text{definição de centro de gravidade}) \quad (5.17c)$$

$$\int \frac{da_i}{d\xi} \xi d\xi = -a \quad (5.17d)$$

Os termos que contêm a elevação da superfície livre da água podem ser todos coligidos numa expressão que representa a força de excitação:

$$F_e = \int \ddot{h} e^{-kz} a_i d\xi + \int \dot{h} e^{-kz} \left( b_i - V \frac{da_i}{d\xi} \right) d\xi + \int h e^{-kz} c_i d\xi \quad (5.18)$$

A elevação da superfície do mar é dada pela expressão (a). No entanto, para um navio que se desloque na direcção da onda a frequência de encontro e a que corresponde à velocidade relativa ( $V_w - V$ ):

$$\omega_e = k(V_w - V) = \omega - \frac{\omega^2 V}{g} \quad (5.19)$$

onde  $k = 2\pi/L_w = \omega^2/g$ . Logo, substituindo  $x$  por  $(\xi + Vt)$  na equação resulta:

$$h = h_0 \text{sen}(k\xi - \omega_e t) \quad (5.20a)$$

e as sucessivas derivadas em ordem ao tempo levam a:

$$\dot{h} = -h_0 \omega_e \cos(k\xi - \omega_e t) \quad (5.20b)$$

$$\ddot{h} = -h_0 \omega_e^2 \text{sen}(k\xi - \omega_e t) \quad (5.20c)$$

Substituindo estas expressões em  $F_e$  resulta em:

$$F_e = h_0 e^{-kz} \int (-\omega_e^2 a_i + c_i) \text{sen}(k\xi - \omega_e t) d\xi - h_0 e^{-kz} \omega_e \int \left( b_i - V \frac{da_i}{d\xi} \right) \cos(k\xi - \omega_e t) d\xi \quad (5.21)$$

Note-se que  $F_e$  calcula-se a partir das expressões que já foram definidas anteriormente, desde que se saiba os valores de  $h_0$  e  $\omega_e$ . Representando o resultado do integral por:

$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t + \phi) \quad (5.22)$$

onde  $F_0$  é uma amplitude e  $\theta$  é um desfasamento relativamente à onda, exprime-se finalmente a equação do movimento por:

$$(m+a)\ddot{z} + b\dot{z} + cz + d\ddot{\theta} + e\dot{\theta} + h\theta = F_0 \cos(\omega_e t + \phi) \quad (5.23)$$

Da mesma forma como se procedeu ao equilíbrio das forças verticais para obter a equação anterior, pode também proceder-se ao equilíbrio dos momentos dessas forças para obter a outra equação do movimento:

$$(I_y + A)\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + C\theta + D\ddot{z} + E\dot{z} + Hz = M_0 \cos(\omega_e t + \phi) \quad (5.24)$$

onde  $I_y$  é o momento de inércia da massa do navio:

$$I_y = \int m_i \xi^2 d\xi \quad (5.25a)$$

e os restantes coeficientes são:

$$A = \int a_i \xi^2 d\xi \quad (5.25b)$$

$$B = \int b_i \xi^2 d\xi \quad (5.25c)$$

$$C = \int c_i \xi^2 d\xi - VE \quad (5.25d)$$

$$D = d \quad (5.25e)$$

$$E = -\int b_i \xi d\xi - Va \quad (5.25f)$$

$$H = \int c_i \xi^2 d\xi \quad (5.25g)$$

O momento de excitação  $M_0$  é o que resulta da avaliação dos integrais referentes  $F_0$  onde se introduziu a variável adicional  $\xi$ , representando o braço das forças.

### 5.2 Solução das Equações do Movimento

A solução das equações acopladas de arfagem e balanço podem obter-se na forma de números complexos, onde as amplitudes  $\bar{z}$  e  $\bar{\theta}$  dos movimentos são dadas por:

$$\bar{z} = \frac{\bar{M}Q - \bar{F}S}{QR - PS} \quad (5.26a)$$

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{F}Q - \bar{M}S}{QR - PS} \quad (5.26b)$$

onde os descaramentos  $\delta$  e  $\varepsilon$  vêm:

$$\bar{Z} = \text{Re}[Z_0 e^{i\delta}] = Z_0 \cos \delta \quad (5.27a)$$

$$\theta = \operatorname{Re}[\theta_0 e^{i\epsilon}] = \theta_0 \cos \epsilon \quad (5.27b)$$

$$\bar{F} = F_0 e^{i\sigma} \quad (5.27c)$$

$$\bar{M} = M_0 e^{i\sigma} \quad (5.27d)$$

e

$$P = -(m+a)\omega_c^2 + ib\omega_c + c \quad (5.28a)$$

$$Q = -d\omega_c^2 + ie\omega_c + h \quad (5.28b)$$

$$R = -D\omega_c^2 + iE\omega_c + H \quad (5.28c)$$

$$S = -(I_y + A)\omega_c^2 + iB\omega_c + C \quad (5.28d)$$

Esta solução diz respeito ao problema do navio incidindo perpendicularmente, às ondas mas pode ser generalizado à incidência oblíqua desde que se entre em linha de conta com o comprimento de onda efectivo, o qual é a projecção do comprimento da onda na direcção de avanço do navio. Neste caso a frequência de encontro passa a ser dada por:

$$\omega_c = \omega - \frac{\omega^2 V \cos \psi}{g} \quad (5.29)$$

onde  $\psi$  é o ângulo entre a proa do navio e a direcção de propagação da onda. A teoria que aqui foi exposta para descrever o movimento combinado de arfagem e o balanço longitudinal deve-se fundamentalmente a Korvin-Kroukovski e data de 1957. O cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos da equação do movimento foi apresentado inicialmente por Lewis em 1929, tendo havido melhoramentos por diversos autores durante os anos 60. A própria formulação das equações do movimento foi sendo actualizada durante esta década, fundamentalmente ao nível de melhoramentos na forma dos coeficientes da equação. As várias teorias actuais diferem fundamentalmente no modo como tomam em consideração o efeito da velocidade nos coeficientes das equações e como calculam os coeficientes hidrodinâmicos. De entre as existentes, a que terá talvez recebido mais aceitação de Salvesen, Tuck e Faltinsen, de 1970. Os melhoramentos que as novas teorias trouxeram, ficam no nível quantitativo, não alterando de maneira especial o panorama de resultados existentes.

De um modo geral pode dizer-se que os resultados destas equações relativas aos movimentos dos navios, são bastante precisos, em especial quando os coeficientes hidrodinâmicos são determinados a partir de ensaios experimentais. Noutros casos, a precisão do método depende da precisão com que são calculados os coeficientes hidrodinâmicos das equações de movimento.

A teoria das faixas permite quantificar o efeito de velocidade do navio e permite comparar casos com proporções substancialmente diferentes. No entanto, o efeito de mudanças de pormenor na forma das secções já não tem um reflexo sensível nos movimentos previstos pela teoria.

Por exemplo, nos casos em que há um declive acentuado das linhas do casco na zona da linha de água, a hipótese de que o casco é vertical torna-se incorrecta, o que dá mais

fiabilidade aos resultados para navios com grande coeficiente de finura total. Já há actualmente teorias que tomam em consideração este efeito bem como outros efeitos não-lineares, mas ainda não estão em uso generalizado.

Esta teoria é também utilizada para quantificar os esforços que solicitam o casco durante o movimento, embora a precisão destas previsões seja menor. As figuras que se juntam mostram comparações entre resultados teóricos e experimentais tanto no caso de movimentos como do momento flector vertical.

### 5.3 Determinação dos Coeficientes Hidrodinâmicos das Equações

As equações do movimento contêm termos em  $a_i$  e  $b_i$  que representam a massa adicionada e o coeficiente de amortecimento hidrodinâmico das secções transversais do navio.

A partir de considerações hidrodinâmicas envolvendo o potencial de escoamento, a massa acrescentada de um cilindro a flutuar é metade do valor para um cilindro totalmente submerso. Assim, será:

$$a_i = \frac{\rho\pi r_n^2}{2} = \frac{\rho\pi B_n^2}{8} \quad (5.30)$$

onde  $r_n$  é o raio da secção  $n$ , igual a metade da boca  $B_n$  nessa secção.

Para secções não curvas, pode exprimir-se a massa acrescentada por uma expressão semelhante afectada de um coeficiente  $C$  que reflecte a influência da diferente forma:

$$a_i = C \frac{\rho\pi B_n^2}{8} \quad (5.31)$$

Existem diferentes métodos para calcular  $C$ , não sendo o objectivo aqui analisá-los em detalhe.

Grim obteve o valor de  $C$  para várias formas geométricas representativas das secções transversais comuns em navios. Os resultados que se indicam na figura em anexo são função da razão boca/calado ( $B_n/T$ ) e do coeficiente de finura da secção transversal, ou seja de  $\beta_n = S_n/B_n T$ .

O coeficiente de dissipação hidrodinâmico  $b_i$  representa a força de amortecimento por unidade de velocidade vertical. Depende da frequência de encontro, que é igual à frequência das ondas irradiadas e da razão  $\bar{A}$  entre a amplitude das ondas irradiadas e a amplitude do movimento relativo vertical:

$$b_i = \rho g^2 \bar{A}^2 / \omega^3 e \quad (5.32)$$

A razão de ser destas dependências está no facto de a dissipação da energia hidrodinâmica se dar por via da formação e irradiação de ondas de superfície devidas ao movimento do corpo.

Os valores de  $\bar{A}$  podem também obter-se dos gráficos que se juntam, em função de  $B_n/T$  e de  $\beta_n$ .

## 6. INTRODUÇÃO AOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

O estudo dos processos estocásticos é essencial para uma adequada descrição do clima de agitação marítima e do comportamento dos navios sob o efeito das ondas.

Os estudos de mecânica e da dinâmica iniciam-se com a análise dos movimentos determinísticos. A diferença fundamental entre um movimento determinístico e um movimento aleatório consiste em que num movimento determinístico definido por  $x=f(t)$ , quando é dado  $t$  o valor de  $x$  fica determinado inequivocamente, enquanto que num movimento aleatório não é possível prever com exactidão o deslocamento  $x$ .

Num movimento aleatório o que se consegue descrever são as características estatísticas do movimento, ou seja, dada a variável independente  $t$  consegue-se quantificar qual a probabilidade que a amplitude do movimento esteja entre um dado valor  $x$  e um valor  $x + \Delta x$ .

Um processo estocástico envolve sempre uma variação de uma função no tempo. A diferença fundamental entre o processo estocástico e uma variável aleatória é exactamente esta dependência no tempo. Estes processos podem-se pensar como sendo funções que variam no tempo mas que têm uma intensidade que varia de forma aleatória.

Nos estudos introdutórios de probabilidades e estatística consideram-se as variáveis aleatórias e estudam-se os vários conceitos de funções densidade de probabilidade, das estatísticas descritivas e da forma como se caracterizam as variáveis aleatórias. Vai iniciar-se o estudo dos processos estocásticos revendo o mesmo tipo de conceitos no âmbito dos processos estocásticos.

### 6.1 Função Densidade de Probabilidade

Para se definir o conceito de uma função de densidade de probabilidade considere-se um movimento determinístico sinusoidal dado por:

$$x(t) = x_0 \text{ sen } \omega t \quad (6.1)$$

onde  $x_0$  é a amplitude do movimento e  $\omega$  é a sua frequência circular. Derivando esta expressão obtém-se:

$$dx = x_0 \omega \cos \omega t dt \quad (6.2)$$

$$dt = \frac{dx}{x_0 \omega \cos \omega t} \quad (6.3)$$

O movimento que se descreve por esta equação é um movimento determinístico. No entanto pretende-se caracterizar a probabilidade de que, num dado instante aleatório no tempo, a partícula que descreve o movimento se encontre entre o valor  $x$  e o valor  $x + \Delta x$ , ou seja, vai-se quantificar a probabilidade de que num ponto qualquer do tempo o deslocamento seja igual a  $x$ . Neste caso o factor aleatório é o ponto no tempo que se considera. Para isso vai-se utilizar as duas expressões de  $dx$  e  $dt$  que já foram deduzidas.

Partindo da equação fundamental da trigonometria e substituindo o valor de  $\sin t$  pelo que se obtém da equação (6.1) determina-se:

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \quad (6.4)$$

Substituindo esta expressão na equação (6.3) deduz-se finalmente a expressão de  $dt$  em função dos parâmetros do movimento:

$$dt = \frac{dx}{x_0 \omega \sqrt{1 - x^2/x_0^2}} \quad (6.5)$$

A proporção do tempo por ciclo em que  $x(t)$  se encontra entre  $x$  e  $x + dx$  é:

$$\frac{2dt}{T} = \frac{2dx}{\omega T \sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{dx}{\pi \sqrt{x_0^2 - x^2}} \quad (6.6)$$

onde se fez uso da equação (6.5).

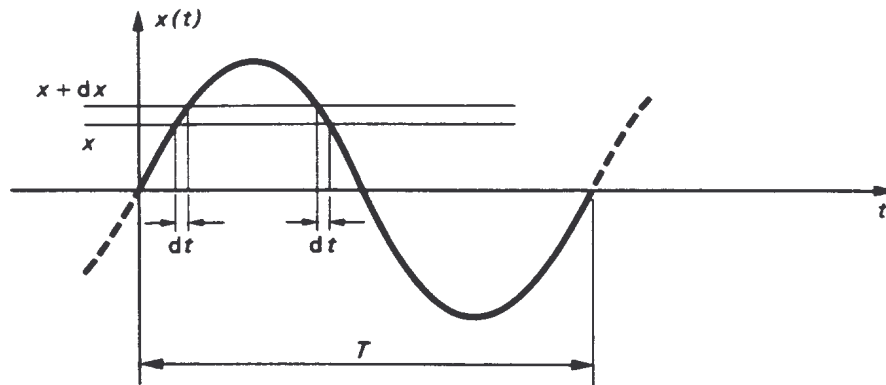


Figura 8



Como se pode deduzir observando a figura 1 esta proporção do tempo será igual a duas vezes o intervalo de tempo  $dt$  dividido pelo período  $T$  do movimento. O período é definido como o espaço de tempo que o movimento demora a repetir-se e portanto será igual a  $2\pi/\omega$ .

Considere-se um instante  $t_0$  qualquer tal que  $0 < t_0 \leq T$ . A probabilidade que  $x(t_0)$  se encontre entre  $x$  e  $x+dx$  depende da percentagem de tempo que  $x(t)$  está entre  $x$  e  $x+dx$  o que foi definido como sendo a equação (6.6). Assim esta probabilidade é dada por:

$$P[x \leq x(t_0) \leq x + dx] = \frac{2(dt)}{T} = \frac{dx}{\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}} \equiv p(x) = f_x(x)dx - x_0 < x < x_0 \quad (6.7)$$

onde  $f_x(x)$  é a função densidade de probabilidade.

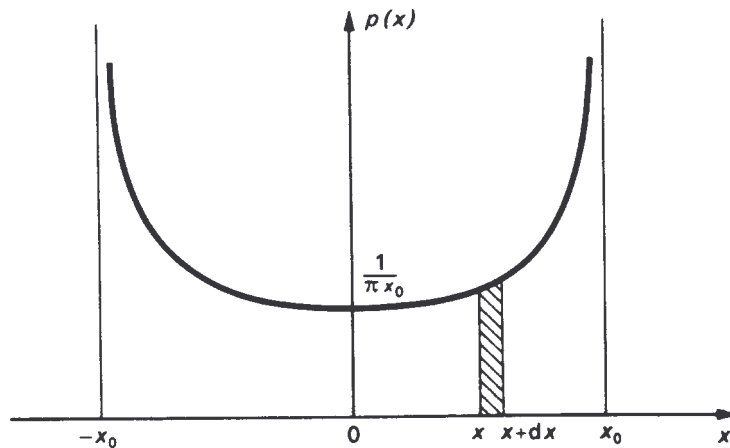


Figura 9

Esta função dada por (6.7) está indicada na figura 2 onde se pode observar que  $f_x(x)$  aumenta bastante quando  $x$  se aproxima de  $x_0$  o que é o resultado de numa onda sinusoidal a curva achatar-se perto dos extremos. Num movimento sinusoidal a variação do deslocamento com o tempo é bastante mais rápida perto dos valores em que o deslocamento é nulo do que perto da amplitude máxima do movimento o que aparece representado na figura 2.

Dado que a amplitude do movimento é  $x_0$  a probabilidade de o deslocamento se encontrar entre  $-x_0$  e  $+x_0$  tem que ser igual a 1:

$$P[-x_0 \leq x(t_0) \leq x_0] = \int_{-x_0}^{x_0} f_x(x) dx = 1 \quad (6.8)$$

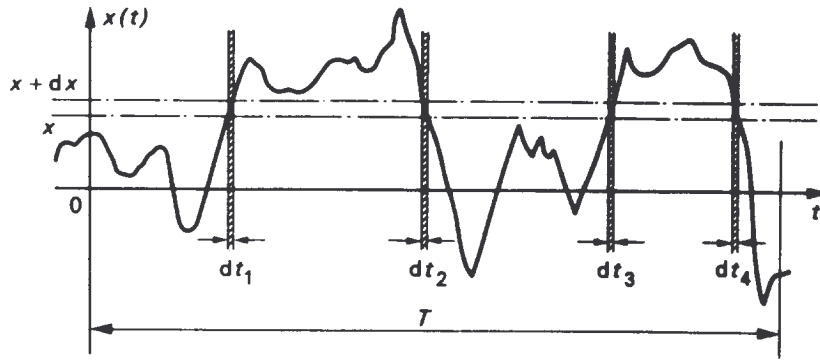


Figura 10

Considere-se agora que em vez de uma onda sinusoidal determinística se trata de um processo aleatório  $x(t)$  conforme se indica na figura 3. Neste caso, para quantificar a probabilidade de a amplitude estar entre  $x$  e  $x+dx$  é necessário somar os intervalos de tempo  $dt_1$ ,  $dt_2$ ,  $dt_3$  e  $dt_4$ :

$$f_x(x)dx = \frac{dt_1 + dt_2 + dt_3 + dt_4}{T} = \frac{\sum dt}{T} \quad (6.9)$$

Este tratamento implica que este sinal é irregular mas tem um período  $T$ , e portanto, a percentagem de tempo em que o sinal se encontra nestes valores será o quociente destes intervalos infinitesimais pelo período.

Uma forma equivalente de tratar este problema é através da digitalização do sinal, isto é, considerando que o movimento em vez de ser contínuo é constituído por uma sucessão de pontos separados entre si pelo intervalo  $t$  inferior aos valores de  $dt_i$  que se estavam a considerar.

Desta forma pode transformar-se o tempo que o movimento está numa dada faixa entre  $x$  e  $x+dx$  pelo número de pontos igualmente espaçados que se encontram nessa mesma faixa. Desta forma  $p(x)$  será o quociente entre o número de pontos que estão nessa faixa  $dn$  pelo número total de pontos  $N$  que se encontram no período  $T$ , isto é:

$$p(x) = dn/N \quad (6.10)$$

## 6.2 Valor médio ou esperança matemática

Pode definir-se o valor médio  $E[t]$  de um processo como sendo o valor tal que multiplicado por  $T$  é igual à área total sob a curva  $x[t]$ :

$$E[x]T = \int_0^T x(t)dt \quad (6.11)$$

Dividindo ambos os termos desta expressão por  $T$  obtém-se:

$$E[x] = \int_0^T x(t) \frac{dt}{T} = \int_{-x_0}^{x_0} x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad (6.12)$$

Nesta equação a expressão  $dt/T$  não é mais do que a função densidade de probabilidade já identificada na expressão (6.7). Substituindo esta expressão fica-se então com o integral entre  $-x_0$  e  $+x_0$ , o qual é igual ao integral entre  $-\infty$  a  $+\infty$ , já que o movimento é igual a zero para valores que não estejam compreendidos entre  $-x_0$  e  $+x_0$ .

Verifica-se assim que, a partir de considerações ligadas ao movimento, se veio obter a expressão da esperança matemática conforme se define para uma variável aleatória:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad (6.13)$$

Uma outra grandeza importante para a definição de um processo aleatório, é a sua variância. A variância define-se como o valor esperado do quadrado das diferenças entre o valor da variável e o seu valor médio, ou seja:

$$\sigma^2 = E\left[(x - E[x])^2\right] \quad (6.14)$$

Desenvolvendo o quadrado obtém-se:

$$\sigma^2 = E\left[x^2 - 2x E[x] + (E[x])^2\right] = E[x^2] - 2E[x]E[x] + (E[x])^2 \quad (6.15)$$

a qual se transforma em:

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 \quad (6.16)$$

Esta equação mostra que a variância é igual à média dos quadrados das amplitudes menos o quadrado da média. O valor médio do quadrado das amplitudes obtém-se aplicando a definição da esperança matemática que foi deduzida na equação (6.13), ou seja:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (6.17)$$

Define-se o desvio padrão como sendo a raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (6.18)$$

É de notar que este parâmetro tem as mesmas unidades do que a amplitude enquanto que a variância tem unidades iguais ao quadrado da amplitude.

Muitas funções de densidade de probabilidade ficam completamente descritas com o conhecimento destes dois parâmetros, ou seja, da média e do desvio padrão. Tal é o caso da distribuição normal que se irá analisar seguidamente.

A função distribuição da probabilidade obtém-se da função densidade de probabilidade através da integração:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(\xi) d\xi = \text{Pr ob}[-\infty \leq \xi \leq x] \quad (6.19)$$

Observando a expressão (6.13) e a expressão (6.17), verifica-se que há uma semelhança muito grande entre elas e as expressões que nos dão os valores do momento de uma função sendo a analogia dada pelo valor de  $x$  que representaria o braço dessa função. Por esta razão, estes parâmetros são normalmente designados por momentos estatísticos.

O momento de ordem  $i$  de uma dada distribuição é dado pelo produto da função densidade de probabilidade pela variável elevada à potência  $i$  integrado em todo o domínio de  $-\infty$  a  $+\infty$ :

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} X^i f_x(x) dx \quad (6.20)$$

Considere-se o exemplo de uma onda sinusoidal. Neste caso, introduzindo a equação (6.7) na (6.13) obtém-se:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = 0 \quad (6.21)$$

A expressão (6.17) toma a forma:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}} dx = \frac{x_0^2}{2} \pi \quad (6.22)$$

donde a variância é obtida pela equação (6.16):

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = \frac{x_0^2}{2} \quad (6.23)$$

levando finalmente ao desvio padrão:

$$\sigma = \frac{x_0}{\sqrt{2}} = .707 x_0 \quad (6.24)$$

Note-se que neste caso a variância é igual à média dos quadrados da variável, o que acontece sempre que o valor médio da variável é nulo.

Um outro exemplo que se pode considerar é o caso da distribuição normal ou de Gauss, em que a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (6.25)$$

onde  $m$  e  $\sigma$  são parametros cujo significado ficará claro mais adiante. Aplicando a definição de valor médio vem:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \quad (6.26)$$

enquanto a média dos quadrados é dada por:

$$E[x^2] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \quad (6.27)$$

Para resolver os dois integrais é conveniente proceder à seguinte transformação de variáveis:

$$y = x - m \quad (6.28)$$

que transforma a equação (6.26) em:

$$E[x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y+m) \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} dy \quad (6.29)$$

A resolução deste integral e do que resulta da equação (6.27) faz-se recorrendo aos seguintes resultados que se encontram em tabelas de integrais:

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \quad (6.30)$$

$$\int_0^{\infty} y \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} dy = \sigma^2 \quad (6.31)$$

$$\int_0^{\infty} y^2 \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma^3 \quad (6.32)$$

Fazendo uso das equações (6.30) e (6.31) a expressão (6.29) resulta em:

$$E[x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} 2 \left[ 0 + m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \right] = m \quad (6.33)$$

Retomando agora a expressão (6.27) e fazendo uso dos integrais (6.30) e (6.32) obtém-se:

$$\begin{aligned} E[x^2] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y^2 + 2my + m^2) \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} dy \quad (6.34) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} 2 \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma^3 + m^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma = \sigma^2 + m^2 \right] \end{aligned}$$

Estes resultados mostram que o parâmetro  $m$  é a média de  $X$  enquanto o valor médio dos quadrados é igual à soma de  $\sigma^2$  com  $m^2$  ou seja o  $\sigma$  não é mais do que o desvio padrão de  $X$ .

### 6.3 Distribuições Conjuntas

A função densidade de probabilidade conjunta ou de segunda ordem é definida por:

$$f_{X,Y}(x, y) dx dy = \text{Prob} [x \leq x(t_0) \leq x + dx \text{ e } y \leq y(t_0) \leq y + dy] \quad (6.35)$$

A probabilidade de  $x$  e de  $y$  estarem simultaneamente em dois intervalos pré definidos é dada por:

$$\text{Prob}[x_1 \leq x \leq x_2 \text{ e } y_1 \leq y \leq y_2] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (6.36)$$

A condição de normalização é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y} dx dy = 1 \quad (6.37)$$

A distribuição marginal obtém-se da distribuição conjunta por integração:

$$\begin{aligned} f_X(x) dx &= P[x \leq x(t_0) \leq x + dx \text{ e } -\infty \leq y(t_0) \leq \infty] \\ &= dx \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (6.38)$$

donde

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, \xi) d\xi \quad (6.39)$$

Analogamente se poderia obter a outra distribuição marginal:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi, y) d\xi \quad (6.40)$$

O valor médio de uma função  $g(x,y)$  de variáveis aleatórias obtém-se aplicando o mesmo princípio:

$$E[g(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (6.41)$$

A distribuição de  $x$  condicional na variável  $y$  é dada por:

$$f_{x|y} dx = \frac{f_{x,y}(x,y) dx dy}{dy \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(\xi,y) d\xi} = \frac{f_{x,y}(x,y) dx}{f_y(y)} \quad (6.42)$$

ou seja, pode definir-se a função de distribuição conjunta a partir das distribuições condicionais e marginais:

$$f_{x,y}(x,y) = f_{x|y}(x|y) f_y(y) \quad (6.43)$$

No caso em que  $x$  e  $y$  são estatisticamente independentes a expressão anterior reduz-se a:

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x) f_y(y) \quad (6.44)$$

Considere-se por exemplo o caso de duas ondas sinusoidais desfasadas definidas por:

$$x(t) = x_0 \text{ sen } \omega t \quad (6.45)$$

$$y(t) = x_0 \text{ sen } (\omega t + \delta) \quad (6.46)$$

onde  $\delta$  é um desfasamento aleatório. Um instante  $t_0$  arbitrário mas contido no intervalo  $0 \leq t_0 \leq 2\pi / \omega$  é definido pela função de densidade de probabilidade:

$$f_{T_0}(t_0) = \frac{\omega}{2\pi} \quad (6.47)$$

a qual satisfaz obviamente a condição de normalização:

$$\int_0^{2\pi/\omega} f_{T_0}(t_0) dt = 1 \quad (6.48)$$

Por outro lado, sendo também o desfasamento definido como uma variável aleatória distribuída uniformemente no intervalo de 0 a  $2\pi$ , a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f_{\Delta}(\delta) = \frac{1}{2\pi} \quad (6.49)$$

Sendo  $t$  e  $\delta$  independentes, a função de densidade de probabilidade conjunta é dada por:



$$f_{T_0, \Delta}(t_0, \delta) = f_{T_0}(t_0) \cdot f_{\Delta}(\delta) = \frac{\omega}{4\pi^2} dt_0 \text{ para } 0 \leq t_0 \leq \frac{2\pi}{\omega} \text{ e } 0 \leq \delta \leq 2\pi \quad (6.50)$$

$$f_{T_0, \Delta}(t_0, \delta) = f_{T_0}(t_0) \cdot f_{\Delta}(\delta) = 0 \text{ para outros valores} \quad (6.51)$$

O valor esperado do produto de  $x$  por  $y$  obtem-se substituindo (6.45), (6.46) e (6.50) na expressão (6.41):

$$\begin{aligned} E[xy] &= \int_0^{2\pi/\omega} dt_0 \int_0^{2\pi} d\delta x_0^2 \text{sen } \omega t_0 \text{sen}(\omega t_0 + \delta) \frac{\omega}{(2\pi)^2} \\ &= x_0^2 \frac{\omega}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}(\omega t_0) dt_0 \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}(\omega t_0 + \delta) d\delta = 0 \end{aligned} \quad (6.52)$$

O que resulta igual a zero pois:

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(\omega t_0 + \delta) d\delta = 0$$

Considere-se agora o valor médio do produto dos quadrados que se obtém da mesma forma:

$$\begin{aligned} E[x^2 y^2] &= x_0^4 \frac{\omega}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}^2(\omega t_0) dt_0 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\omega t_0 + \delta) d\delta = \\ &= x_0^4 \frac{\omega}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}^2(\omega t_0) dt_0 \cdot \pi = x_0^4 \frac{\omega}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi}{\omega} \cdot \pi \end{aligned} \quad (6.53a)$$

Neste caso obtem-se um valor diferente de zero:

$$E[x^2 y^2] = \frac{x_0^4}{4} \quad (6.53b)$$

#### 6.4 6.4 Análise de Correlação

Considere-se a população dos pares de valores das variáveis aleatórias  $x$  e  $y$ . Estas variáveis dizem-se correlacionadas quando há uma relação funcional aproximadamente linear entre elas.

Defina-se a origem dos eixos tal que  $E[x] = E[y] = 0$ . Neste caso,

$$y = mx \quad (6.54)$$

é uma recta que passa pela origem. Define-se o desvio entre o valor de  $y$  e o valor da recta correspondente ao valor  $x$  que está associado àquele  $y$ :

$$\Delta = y - mx \quad (6.55)$$

Aplicando agora a definição da equação (6.41), a média dos quadrados dos desvios é:

$$E[\Delta^2] = E[(y - mx)^2] = E[y^2] + m^2 E[x^2] - 2m E[xy] \quad (6.56)$$

O mínimo desta expressão verifica-se quando a derivada desta expressão relativamente a  $m$  é nula:

$$\frac{\partial}{\partial m} E[\Delta^2] = 0 \quad (6.57)$$

o que implica que:

$$0 = 2m E[x^2] - 2 E[xy] \quad (6.58a)$$

ou seja:

$$m = \frac{E[xy]}{E[x^2]} \quad (6.58b)$$

Quando as médias das variáveis  $x$  e  $y$  são zero resulta que

$$\sigma_x^2 = E[x^2] \text{ e } \sigma_y^2 = E[y^2] \quad (6.59)$$

e substituindo esta expressão e a (6.58b) na (6.59) obtem-se:

$$\frac{y}{\sigma_y} = \left\{ \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \frac{x}{\sigma_x} \quad (6.60)$$

Quando as variáveis não tem médias nulas, pode demonstrar-se que a expressão anterior toma antes a forma:

$$\frac{y - my}{\sigma_y} = \left\{ \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x - \sigma_y} \right\} \frac{x - m_x}{\sigma_x} \quad (6.61)$$

onde

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.62)$$

é o coeficiente de correlação, ou a covariância normalizada.

Veja-se novamente o exemplo de duas ondas sinusoidais desfasadas dadas por:

$$x(t) = x_0 \text{ sen } \omega t \quad (6.63a)$$

$$y(t) = y_0 \text{ sen}(\omega t + \phi) \quad (6.63b)$$

Note-se que agora as amplitudes das ondas são diferentes, contrariamente ao que acontecia nas expressões (6.45) e (6.46). Pretende-se calcular  $E[x(t_0) \cdot y(t_0)]$  onde  $t_0$  é definido como um ponto aleatório no intervalo  $[0, T]$  onde  $T$  é o período do movimento. Considera-se que  $T_0$  obedece a uma distribuição uniforme:

$$f_{T_0}(t_0) = \frac{\omega}{2\pi} \quad (6.64)$$

Aplicando agora a definição (6.41), resulta em:

$$\begin{aligned} E[x(t_0) \cdot y(t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_0 y_0 \cdot \text{sen } \omega t_0 \cdot \text{sen}(\omega t_0 + \phi) \cdot f_{T_0}(t_0) dt_0 = & (6.65) \\ &= x_0 y_0 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \text{sen } \omega t_0 \cdot \text{sen}(\omega t_0 + \phi) dt_0 = \\ &= x_0 y_0 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (\text{sen}^2 \omega t_0 \cos \phi + \text{sen } \omega t_0 \cos \omega t_0 \text{ sen } \phi) dt_0 = \\ &= x_0 y_0 \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{w}{2\pi} \cos \phi + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos \phi \end{aligned}$$

O coeficiente de correlação que resulta da expressão (6.62) é:

$$\rho_{xy} = \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y} = \cos \phi \quad (6.66a)$$

pois

$$\sigma_x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_y = \frac{y_0}{\sqrt{2}} \quad (6.66b)$$

Dois sinais estão perfeitamente correlacionados quando  $\phi = 0^\circ$  ou  $180^\circ$  ou seja quando  $\cos \phi = \pm 1$  e são independentes quando  $\phi = 90^\circ$  ou  $270^\circ$  o que implica que  $\cos \phi = 0$ .

### 6.5 Função de Autocorrelação

A função de autocorrelação de um processo é uma função do tempo. Num processo  $x(t)$  a função de autocorrelação é definida como a média do produto  $x(t) \cdot x(t+\tau)$  onde  $\tau$  é um desfasamento.

Um processo aleatório é estacionário quando as distribuições probabilística e os parâmetros estatísticos que os envolvem são independentes do tempo  $t$  e dependem só do desfasamento temporal  $\tau$ . Um processo é homogéneo quando é estacionário no espaço, isto é, as propriedades são independentes da localização. Finalmente um processo estacionário é *ergódico* quando as médias temporais são iguais às médias entre amostras.

Em processos ergódicos a autocorrelação pode ser determinada por médias feitas ao longo do tempo ou das amostras. No primeiro caso só depende de  $\tau$ :

$$R_x(\tau) = E [x(t) \cdot x(t + \tau)] \quad (6.67a)$$

mas como o processo é estacionário:

$$E x(t) = E [x(t + \tau)] = m \quad (6.67b)$$

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2(t + \tau) = \sigma^2 \quad (6.67c)$$

O coeficiente de correlação é:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{E[\{x(t) - m\}\{x(t + \tau) - m\}]}{\sigma^2} = & (6.68a) \\ \rho &= \frac{E[x(t) x(t + \tau)] - m E[x(t + \tau)] - m E[x(t)] + m^2}{\sigma^2} = \\ \rho &= \frac{R_x(\tau) - m^2}{\sigma^2}\end{aligned}$$

o que implica que

$$R_x(\tau) = \sigma^2 \rho + m^2 \quad (6.68b)$$

ou

$$-\sigma^2 + m^2 \leq R_x(\tau) \leq \sigma^2 + m^2 \quad (6.68c)$$

pois

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (6.68d)$$

Quando o desfasamento  $\tau$  tende para zero,

$$R_x(0) = E[x(t)^2] = E[x^2] \quad (6.69)$$

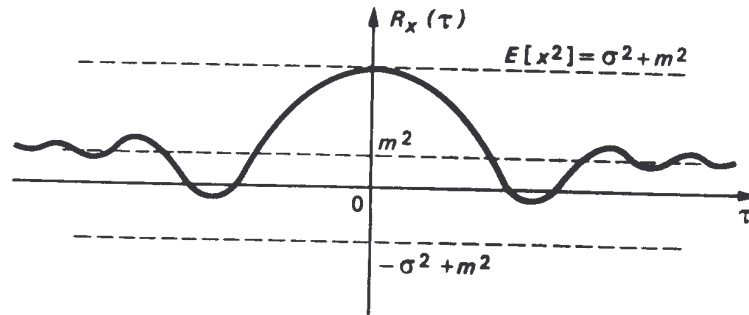
a função de autocorrelação tende para a média dos quadrados. No entanto, quando o desfasamento tende para infinito o coeficiente de correlação tende para zero e:

$$R_x(\infty) = m^2 \quad (6.70)$$

Como num processo estacionário  $R_x(\tau)$  depende só de  $\tau$ ,

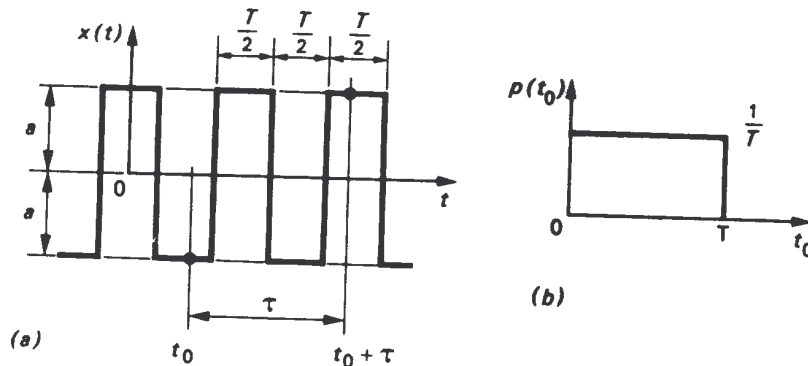
$$R_x(\tau) = E[x(t) x(t + \tau)] = E[x(t) x(t - \tau)] = R_x(-\tau) \quad (6.71)$$

ou seja a função de autocorrelação é uma função par ou seja é uma função simétrica relativamente à origem.



Como exemplo de aplicação considere-se a autocorrelação de uma onda quadrada de fase arbitrária. Sendo a fase arbitrária  $t_0$  será uniformemente distribuído no intervalo entre 0 e  $T$ . Logo,

$$R_x(\tau) = \int_0^T x(t_0) \cdot x(t_0 + \tau) \frac{1}{T} dt_0 \quad (6.72)$$

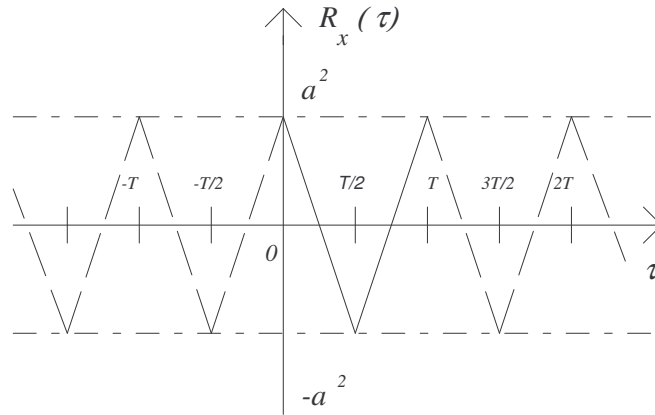


Para integrar esta expressão, ajusta-se a origem por forma a que  $t_0 = 0$  e integra-se em dois domínios da variável:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T/2-\tau} a^2 dt_0 + \frac{1}{T} \int_{T/2-\tau}^{T/2} -a^2 dt_0 + \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T-\tau} a^2 dt_0 + \frac{1}{T} \int_{T-\tau}^T -a^2 dt_0 = a^2 \left(1 - 4 \frac{\tau}{T}\right) \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq T/2 \quad (6.73)$$

Quando  $T/2 \leq \tau \leq T$  têm-se:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{T-\tau} (-a^2) dt_0 + \int_{T-\tau}^{T/2} a^2 dt_0 + \int_{T/2}^{3T/2-\tau} (-a^2) dt_0 + \int_{3T/2-\tau}^T a^2 dt_0 \right\} = a^2 \left(-3 + 4 \frac{\tau}{T}\right) \quad \text{para } \frac{T}{2} \leq \tau \leq T \quad (6.74)$$



### 6.6 6.6 Correlação Cruzada

A função de correlação cruzada é definida entre dois processos aleatórios estacionários:

$$R_{xy}(\tau) = E [x(t) y(t + \tau)] = E [x(t - \tau) y(t)] = R_{yx}(-\tau) \quad (6.75a)$$

$$R_{yx}(\tau) = E [y(t) x(t + \tau)] = E [y(t - \tau) x(t)] = R_{xy}(-\tau) \quad (6.75b)$$

Verifica-se aqui também que estas funções são pares devido aos processos serem estacionários.

Dado que

$$\rho_{xy} = \frac{E [(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (6.76)$$

as expressões anteriores transformam-se em:

$$R_{xy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}(\tau) + m_x m_y \quad (6.77a)$$

$$R_{yx}(\tau) = \sigma_y \sigma_x \rho_{yx}(\tau) + m_y m_x \quad (6.77b)$$

ou seja a função de correlação cruzada oscila entre dois limites:

$$-\sigma_x \sigma_y + m_x m_y \leq R_{xy} \leq \sigma_x \sigma_y + m_x m_y \quad (6.78)$$

Também neste caso se pode determinar os valores assimptóticos desta função quando o desfasamento tende para infinito:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau \rightarrow \infty) &= m_x m_y \\ R_{yx}(\tau \rightarrow \infty) &= m_y m_x \end{aligned} \quad (6.79)$$

Voltando ao exemplo de duas ondas sinusoidais vai determinar-se a função de correlação cruzada neste caso. Considere-se a onda:

$$x(t) = x_0 \text{sen}(\omega t + \theta)$$

onde o desfasamento  $\theta$  está distribuído uniformemente entre 0 e  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1/2\pi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ f(\theta) &= 0, & \text{noutros casos} \end{aligned}$$

Considere-se agora a outra onda que tem um desfasamento  $\theta$  constante, relativamente à primeira:

$$y(t) = y_0 \text{sen}(\omega t + \theta - \phi)$$

A função de correlação cruzada é dada por:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t) \cdot y(t + \tau)] = E[x_0 y_0 \text{sen}(\omega t + \theta) \cdot \text{sen}(\omega t + \omega\tau + \theta - \phi)] = \\ &= \int_0^{2\pi} x_0 y_0 \text{sen}(\omega t + \theta) \cdot \text{sen}(\omega t + \omega\tau + \theta - \phi) \frac{1}{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

Expandindo o seno da expressão em:

$$\text{sen}(\omega t + \omega\tau + \theta - \phi) = \text{sen}(\omega t + \theta) \cos(\omega\tau - \phi) + \cos(\omega t + \theta) \text{sen}(\omega\tau - \phi)$$

e substituindo na expressão anterior é possível resolver os integrais resultando em:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\omega\tau - \phi) = \sigma_x \sigma_y \cos(\omega\tau - \phi) \\ R_{yx}(\tau) &= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\omega\tau - \phi) = \sigma_x \sigma_y \cos(\omega\tau - \phi) \end{aligned}$$



Notando que os desvios padrões são dados por:

$$\sigma_x = x_0/\sqrt{2} \quad (6.86a)$$

$$\sigma_y = y_0/\sqrt{2} \quad (6.86b)$$

as funções de correlação normalizadas vêm dados por:

$$\rho_{xy}(\tau) = \cos(\omega\tau - \phi) \quad (6.87a)$$

$$\rho_{yx}(\tau) = \cos(\omega\tau + \phi) \quad (6.87b)$$

### 6.7 6.7 Análise de Fourier

Uma função periódica no tempo pode ser representada por uma série do tipo:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \quad (6.80)$$

onde os coeficientes da expansão são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (6.81a)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (6.81b)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (6.81c)$$

Estas expressões resultam da ortogonalidade das funções trigonométricas: multiplicando ambos os termos por  $\cos 2\pi nt / T$  e integrando de  $-T/2$  a  $T/2$ :

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt = \\ & = \int_{-T/2}^{T/2} a_0 \cos \frac{2\pi nt}{T} + \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \right) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt = \frac{T}{2} a_n \end{aligned} \quad (6.82)$$

pois

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi kt}{T} dt = 0 \quad \text{se } n \neq k \quad (6.83a)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi kt}{T} dt = T/2 \quad \text{se } n = k \quad (6.83b)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi nt}{T} \sin \frac{2\pi kt}{T} dt = 0 \quad (6.83c)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi nt}{T} \sin \frac{2\pi kt}{T} dt = 0 \quad \text{se } n \neq k \quad (6.83d)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi nt}{T} \sin \frac{2\pi kt}{T} dt = T/2 \quad \text{se } n = k \quad (6.83e)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} a_0 dt = Ta_0 \quad (6.84)$$

Substituindo os coeficientes na série, resulta para o caso de  $a_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \right\} \cos \frac{2\pi kt}{T} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \right\} \sin \frac{2\pi kt}{T} \end{aligned} \quad (6.85)$$

Definindo  $\omega_k = 2\pi k / T = \Delta \omega \cdot k$  e  $\Delta \omega = 2\pi / T$ ,

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum \left\{ \frac{\Delta \omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \omega_k t dt \right\} \cos \omega_k t + \\ & + \sum \left\{ \frac{\Delta \omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \omega_k t dt \right\} \sin \omega_k t \end{aligned} \quad (6.86)$$

Quando o período da função tende para infinito e se considera o caso contínuo onde os  $\Delta \omega$  se transformam em  $d\omega$  e os somatórios em integrais, a função toma a forma de:

$$\begin{aligned}
 x(t) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \, dt \right\} \cos \omega t + \\
 + \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \, dt \right\} \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{6.87}$$

Definam-se agora as componentes da transformada de Fourier de  $x(t)$ :

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \, dt \tag{6.88a}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \, dt \tag{6.88b}$$

e substituam-se estas expressões na anterior:

$$x(t) = 2 \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega + 2 \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega \tag{6.89}$$

obtém-se assim o integral de Fourier ou transformada inversa de Fourier, que permite reproduzir a função  $x(t)$  a partir das componentes da transformada de Fourier.

Em muitas situações torna-se mais simples utilizar a forma complexa da transformada de Fourier. Para se utilizar este tipo de variáveis recorde-se que:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{6.90}$$

e defina-se a transformada de Fourier também por um complexo:

$$X(\omega) = A(\omega) - i B(\omega) \tag{6.91}$$

Recorrendo a estas expressões é fácil ver-se que as transformadas de Fourier podem representar-se por:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} \, dt \tag{6.92}$$

No caso inverso nota-se que  $A(\omega)$  é uma função simétrica e  $B(\omega)$  anti-simétrica:

$$A(\omega) = A(-\omega) \tag{6.93a}$$

$$B(\omega) = -B(-\omega) \quad (6.93b)$$

Logo  $[A(\omega) \cos \omega t]$  e  $[B(\omega) \sin \omega t]$  são ambas simétricas, o que implica que os integrais entre  $-\infty$  e  $\infty$  são iguais ao dobro dos integrais entre 0 e  $\infty$ .

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad (6.94)$$

Como  $[A(\omega) \sin \omega t]$  e  $[B(\omega) \cos \omega t]$  são anti-simétricas, o integral entre  $-\infty$  e 0 é igual e de sinal contrário ao integral entre 0 e  $\infty$  pelo que o integral entre  $-\infty$  e  $\infty$  é igual a zero.

Logo pode-se somar estes integrais aos anteriores

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\omega) - i B(\omega)\} \{\cos \omega t + i \sin \omega t\} \, d\omega \end{aligned}$$

resultando na simples expressão:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \quad (6.95)$$

Para exemplificar a aplicação da transformada de Fourier, considere-se a função:

$$e^{-xt}, t \geq 0 \quad (6.96)$$

As componentes de Fourier são:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos \omega t \, dt \\ B(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin \omega t \, dt \end{aligned}$$

Integrando por partes em:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos \omega t \, dt = \\ & = \left[ -\frac{1}{\alpha} e^{-xt} \cos \omega t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\alpha} e^{-xt} \sin \omega t \, dt = \\ & = \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\alpha} e^{-xt} \sin \omega t \, dt = \\ & = \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} \left[ -\frac{1}{\alpha} e^{-xt} \sin \omega t \right]_0^{\infty} - \frac{\omega}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\alpha} e^{-xt} \cos \omega t \, dt = \\ & = \frac{1}{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\alpha} e^{-xt} \cos \omega t \, dt \end{aligned}$$

Daqui se deduz que:

$$\left( 1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{\alpha}$$

Analogamente se obtém o outro termo:

$$\left( 1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right) \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin \omega t \, dt = \frac{\omega}{\alpha^2}$$

e substituindo nas definições resulta em:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Daqui se deduz que a função  $x(t)$  é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \cos \omega t \, d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \sin \omega t \, d\omega$$

Note-se que na origem se obtém:

$$x(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \, d\omega = \frac{1}{\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

ou seja metade do valor real de  $x$  naquela descontinuidade.

Utilizando agora a representação complexa,

$$\begin{aligned} x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-x t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(x+i\omega)t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{-(x+i\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\alpha+i\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} - i \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2} = A - i B(\omega) \end{aligned}$$

### 6.8 Função de Densidade Espectral

A variação temporal de um processo estocástico não pode ser representada por uma série de Fourier porque não se verifica a condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (6.96)$$

o que impede a obtenção de valores finitos para os integrais de Fourier. No entanto a função de autocorrelação tende para zero quando  $\tau \rightarrow \infty$  e também dá informação quanto ao conteúdo de frequência do processo. A transformada de Fourier da função de autocorrelação é definida como sendo a função de densidade espectral que é dada por:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (6.97)$$

onde a função de autocorrelação é a transformada inversa:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6.98)$$

No limite quando o desfasamento tende para zero a função de autocorrelação é igual ao valor esperado dos quadrados do processo:

$$R_x(\tau = 0) = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (6.99)$$

ou seja, o valor médio dos quadrados de um processo estocástico é dado pela área sob a função densidade espectral. Num processo de média zero esta grandeza será a variância.

Na representação complexa tem-se:

$$S_x(\omega) = A(\omega) - i B(\omega) \quad (6.100)$$

onde

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau \quad (6.101a)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sen \omega\tau \, d\tau \quad (6.101b)$$

No entanto,  $R_x(\tau)$  é uma função simétrica relativamente a  $\tau$  e  $\sen \omega\tau$  é anti-simétrica, logo  $[R_x(\tau) \sen \omega\tau]$  é anti-simétrica e o integral desta função entre  $-\infty$  e  $0$  é igual e de sinal contrário ao integral entre  $0$  e  $+\infty$  pelo que o integral entre  $-\infty$  e  $+\infty$  vem igual a zero. Por isso  $B(\omega)$  será sempre igual a zero e a função de densidade espectral é sempre real:

$$S_x(\omega) = A(\omega) \quad (6.102)$$

Para além disso  $S_x(\omega)$  tem também propriedades que decorrem da função de autocorrelação isto é uma função simétrica e não-negativa.

A função de densidade espectral cruzada é a generalização deste conceito ao caso de duas variáveis. Define-se como a transformada de Fourier da função de correlação cruzada:

$$|S_{xy}(\omega)|^2 \leq S_x(\omega) \cdot S_y(\omega) \quad (6.103)$$

Pode demonstrar-se que o quadrado da função de densidade espectral cruzada é sempre inferior ao produto das funções de densidade espectral de cada variável:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau \quad (6.104)$$

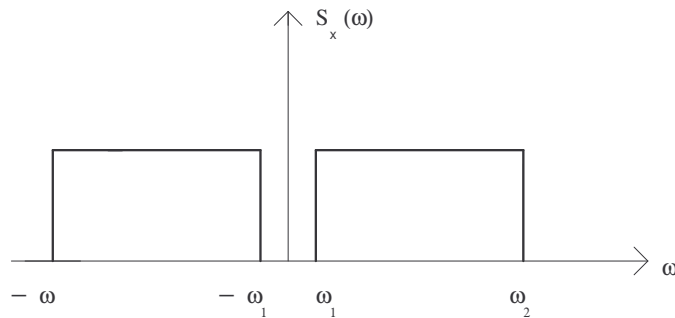
A relação entre estas funções depende do grau de correlação que existe entre os processos, o qual é medido pela função de coerência:

$$\rho_{xy^2}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega) \cdot S_y(\omega)} \quad (6.105)$$

Daqui se deduz que a função de densidade espectral cruzada se pode representar por:

$$S_{xy}(\omega) = \rho_{xy}(\omega) \cdot S_y(\omega) \quad (6.106)$$

Considere-se o exemplo de determinar a média dos quadrados e a autocorrelação de um processo com densidade espectral indicada na figura:



$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = 2 S_0 (\omega_2 - \omega_1) \quad (6.107)$$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \\ &= 2 \int_{+\omega_1}^{\omega_2} S_0 \cos \omega\tau = 2 S_0 \left[ \frac{1}{\tau} \text{sen } \omega\tau \right]_{\omega_1}^{\omega_2} = \\ &= \frac{2 S_0}{\tau} (\text{sen } \omega_2\tau - \text{sen } \omega_1\tau) = \frac{4 S_0}{\tau} \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \tau \cdot \text{sen}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tau \end{aligned} \quad (6.108)$$

Quando o limite inferior do espectro é igual a zero ( $\omega_1 = 0$ ), o espectro é constante e diz-se que representa o ruído branco. Nesta situação, o sinal contém todas as componentes da frequência e a expressão anterior transforma-se em:

$$R_x(\tau) = \frac{4 S_0}{\tau} \cos \frac{\omega_2 \tau}{2} \text{sen } \frac{\omega_2 \tau}{2} = 2 S_0 \frac{\text{sen } \omega_2 \tau}{\tau} \quad (6.109)$$

Como se viu anteriormente, os espectros podem ser caracterizados por parâmetros denominados momentos do espectro:

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S_x(\omega) d\omega \quad (6.110)$$



Em particular o momento de ordem zero é a variância do processo:

$$m_0 = \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^\infty x^2 f(x) dx = E[x^2] = R_x(0) \quad (6.111)$$

A partir das definições dos momentos espectrais é possível definir vários períodos característicos do processo. O período médio é definido por:

$$T_1 = 2\pi \frac{m_0}{m_1} \quad (6.112)$$

O período médio dos zeros ascendente é dado por:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \quad (6.113)$$

O período médio entre picos é:

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \quad (6.114)$$

Os vários períodos são normalmente diferentes e a relação entre elas depende do conteúdo de frequência do sinal o qual se pode medir pela largura de banda:

$$\varepsilon = \left[ 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \right]^{1/2} = \left[ 1 - \left( \frac{T_4}{T_2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.115)$$

Os momentos de ordens três e quatro do processo dão importantes informações relativamente à simetria e ao achatamento da função de densidade de probabilidade. Normalmente utiliza-se em vez daqueles momentos o coeficiente de simetria:

$$\gamma = \left( \frac{m_3}{m_0} \right)^{3/2} \quad (6.116)$$

é o coeficiente de achatamento:

$$\beta = \frac{m_4}{m_2} \quad (6.117)$$

Por exemplo, no caso de uma distribuição normal  $\gamma=0$  e  $\beta=3$ .

## 7. REPRESENTAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO MAR

Uma fotografia aérea da superfície do mar quando este está agitado mostra a irregularidade da elevação da superfície em qualquer direcção que se considere. Esta forma irregular da elevação da superfície do mar pode ser obtida através da sobreposição de várias ondas sinusoidais de diferentes frequências e fases. Vai-se começar por estudar as características de cada uma destas componentes.

### 7.1 Elevação da Superfície do Mar

Considere-se uma onda sinusoidal que se propaga numa direcção que não coincide necessariamente com os eixos  $x$  e  $y$  definidos no plano da superfície média das águas do mar. Denominando por  $\theta$  o ângulo entre o eixo  $x$  e a direcção de propagação das ondas, a altura da superfície do mar denominada por  $Z$  no ponto de coordenadas  $xy$  e o tempo  $t$  é dada pela equação:

$$Z(x, y, t) = a \cos(kx \cos \theta + ky \sin \theta - \omega t + \epsilon) \quad (7.1)$$

onde  $a$  é amplitude da onda,  $k$  é o número de onda, o qual é igual  $2\pi/\lambda$  onde  $\lambda$  o comprimento da onda,  $\omega$  é a frequência circular que é igual a  $2\pi f$  em que  $f$  é a frequência e  $\epsilon$  é o ângulo de fase.

Os eixos coordenados podem ser escolhidos por forma a que o eixo do  $x$  coincida com a direcção de propagação da onda. Neste caso a expressão (1) simplifica-se para:

$$Z(x, t) = a \cos(kx - \omega t + \epsilon) \quad (7.2)$$

Numa onda de superfície há uma relação fixa entre o número de onda  $k$  e a frequência  $f$  que é dada por:

$$\omega^2 = 4\pi^2 f^2 = gk \tanh kh \quad (7.3)$$

onde  $h$  é a profundidade da água.

Esta equação que é denominada a relação de dispersão é a que resulta da aplicação da condição de fronteira na superfície da água quando se resolve o problema do escoamento potencial associado a uma onda de superfície. Pode reescrever-se esta equação de forma a dar directamente o comprimento de onda em função de o período da onda  $T$ :

$$\lambda = \frac{g}{2\pi} T^2 \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \quad (7.4)$$

Esta equação transcendente permite-nos obter o valor do comprimento da onda dado a profundidade da água e o período da onda. No entanto a resolução desta equação tem que ser obtida numericamente através de um processo iterativo. Esta onda elementar que foi deduzida a partir da teoria potencial das ondas e que é válida para pequenas amplitudes propaga-se livremente sem interações com outras componentes das ondas. Ao propagar-se esta onda transporta uma energia  $E$  por unidade de superfície que é igual a:

$$E = \frac{1}{2} \gamma a^2 \quad (7.5)$$

onde  $\gamma$  é o peso específico ou o peso volúmico da água e  $a$  será a amplitude da onda.

Daí a interpretação de que a elevação da superfície do mar não é mais do que uma sobreposição linear de ondas progressivas é uma hipótese cuja verificação tem sido apoiada nos resultados das medições que se têm vindo a fazer. Para além disso, esta hipótese também tem sido verificada do ponto de vista teórico pois é possível reproduzir as medições da elevação da superfície do mar através do processo de sobreposição de componentes sinusoidais. Assim pode-se representar a superfície do mar de uma forma genérica variando no espaço e no tempo pela sobreposição de expressões do tipo de expressão (1) ou seja:

$$Z(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a \cos(k_i x \cos \theta_i + k_i y \sin \theta_i - \omega_i t + \epsilon_i) \quad (7.6)$$

Esta expressão que foi proposta por Longuet-Higgins em 1957, faz corresponder o índice  $i$  a cada onda que se propaga numa dada direcção com uma dada frequência.

Esta equação baseia-se em quatro condições:

1. As frequências  $\Delta\omega$  têm que estar densamente distribuídas entre 0 e  $\infty$ , de forma a que em cada intervalo, exista um número infinito de frequências  $\omega_i$ .
2. As direcções  $\theta_i$  também têm que ser distribuídas densamente entre  $-\pi$  e  $+\pi$ , por forma a que num intervalo  $\Delta\omega$ , exista um número infinito de ondas com direcções  $\theta_i$ .
3. Os ângulos de fase,  $\epsilon_i$  têm de ser distribuídos aleatoriamente e uniformemente entre 0 e  $2\pi$ .

Finalmente, embora se considerem ondas de alturas infinitesimais, a soma dos quadrados das suas amplitudes têm que ser um valor infinito. Isto é:

$$\sum_f^{f+\Delta f} \sum_0^{\theta+\Delta\theta} \frac{1}{2} a_i^2 = S(\omega, \theta) d\omega d\theta \quad (7.7)$$

Nesta expressão, a função  $S(\omega, \theta)$  é a função de densidade espectral direccional, ou seja é o espectro direccional das ondas. Comparando esta expressão com a equação (5), vê-se que a menos do factor  $\gamma$  esta função de densidade espectral está relacionada com a energia do sistema de ondas, e indica a forma como esta energia se distribui relativamente à frequência e à direcção da onda.

A equação (6) representa a elevação da superfície do mar numa área definida pelas coordenadas  $x$  e  $y$ . Quando se pretende obter o perfil da elevação da superfície das ondas, em função do tempo num ponto fixo no mar, tal como acontece num registo de um medidor de ondas, o perfil da onda é dado por:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \quad (7.8)$$

Neste caso, as amplitudes e os ângulos de fase têm significados diferentes daqueles que estão associados com a equação (6). Neste último caso, todas as ondas que têm a mesma frequência, embora se propaguem em direcções diferentes, são formadas e representadas com uma mesma frequência na expressão (8). Ou seja, nesta última expressão cada componente não representa uma realidade física, mas sim é o resultado de sobreposição de várias ondas. Mesmo assim, é possível somar os quadrados das amplitudes das ondas, num dado intervalo, obtendo um valor finito, a que se dá o nome de espectro de frequência ou espectro de variância da onda.

$$\sum_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} \frac{1}{2} a_i^2 = S(\omega) d\omega \quad (7.9)$$

## 7.2 Modelo Estocástico da Elevação da Superfície do Mar

A representação da elevação da superfície do mar que foi dada na secção anterior baseia-se nos conceitos da sobreposição de componentes sinusoidais e da análise de Fourier para a determinação dos coeficientes da série. Pode demonstrar-se que aquela representação é a que resulta da aplicação de um modelo estocástico à descrição da elevação da superfície do mar.

Considere-se um estado do mar e considere-se que era possível obter uma série de registos da elevação da superfície da onda em vários locais produzindo os registos  $Z_i$  indicados em:

$$Z(t) = \{Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_i(t), \dots\} \quad (7.10)$$

Se este processo estocástico for estacionário, isto quer dizer que as propriedades estocásticas como sejam a média e a variância são independentes do tempo. Neste caso a média e a função de autocorrelação seriam dadas por:

$$M_z \equiv E[Z(t)] = E[Z(0)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(t) \quad (7.11)$$

$$R_z \equiv E[Z(t+\tau) Z(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(t+\tau) Z_i(t) \quad (7.12)$$

O processo cujas estatísticas sejam independentes do tempo como está implícito nas expressões (7.11) e (7.12), é um processo fracamente estacionário. No entanto, se a função densidade de probabilidade de  $Z$  for normal, aquelas duas expressões são condições suficientes para tornar o processo estacionário no sentido restrito e neste caso todas as outras estatísticas do processo são também estacionárias.

A condição da estacionaridade foi imposta relativamente à variável tempo. Quando a variável independente é a coordenada espacial, o processo denomina-se homogéneo.

A elevação da superfície do mar é representada por um processo ergódico, o que implica que as estatísticas feitas ao longo do tempo para um registo específico sejam iguais à média que se obtenha do conjunto dos registos. Note-se que um processo estocástico ergódico é sempre estacionário mas o contrário não é necessariamente verdadeiro.

Se a função densidade de probabilidade da elevação da onda se descrever por uma distribuição normal, e se o processo não contiver funções periódicas, então o processo estocástico tem a propriedade de ser ergódico. Para este processo qualquer estatística do perfil da onda pode ser obtida ficando a média no tempo de um registo da elevação da superfície do mar. De facto, os procedimentos normais para se obter o espectro das ondas a partir dos registos baseiam-se nestas hipóteses.

A condição de que a elevação da superfície do mar seja um processo Gaussiano, implica que a probabilidade de o perfil da onda ter uma altura  $Z$ , seja dada por:

$$f_z(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \exp\left[-\frac{(Z - m_z)^2}{2 \sigma_z^2}\right] dz \quad (7.13)$$

na qual  $\sigma_z^2$  é a variância do processo a qual se obtém por uma média temporal dos registos.

Estas três condições em que se baseiam a representação estocástica da elevação da superfície do mar não foram ainda verificadas rigorosamente. Primeiro torna-se impossível coligir um verdadeiro conjunto de registos de ondas no mesmo estado do mar numa grande multiplicidade de posições. Em segundo lugar sabe-se que o processo físico de geração das

ondas envolve diferentes fases em que as ondas estão a ser geradas crescem, e depois diminuem de intensidade. Portanto, a hipótese de estacionaridade das propriedades só poderá ser válida em período de tempo relativamente curtos.

O que implica que esta hipótese será aplicável a durações da ordem dos minutos.

Finalmente a hipótese de que a elevação das ondas segue uma distribuição normal, embora aplicável em muitos casos sabe-se que não é verdadeira pelo menos para ondas de grande amplitude e para ondas em águas pouco profundas. Neste caso, a altura das cristas é diferente da das cavas e a distribuição deixa de ser simétrica como implica a distribuição normal. No entanto, esta hipótese do processo ser Gaussiano é fundamental para se poder decompôr a superfície irregular num número infinito de componentes que sejam sobrepostas linearmente.

Por isso, esta hipótese é normalmente feita e na realidade é aplicável a uma grande maioria das situações. Na análise de um processo que é estacionário e que para além disso é ergódico pode sempre transformar-se o processo real num outro em que o valor médio seja igual a zero, subtraindo o valor real da média. Em zonas costeiras, perto dos estuários de rios que são afectados pelas marés, este cuidado do ajustamento do valor médio terá sempre que existir. No entanto em mar alto é um problema de menor importância.

$$\sigma^2 = E[(z - m_z)^2] = R_z(\tau) \cos \omega \tau \quad (7.14)$$

Adoptando a representação da elevação da superfície do mar por um modelo de um processo estocástico de média zero, este processo fica totalmente descrito com o valor da variância. A variância é igual ao valor limite da função de autocorrelação (7.12), na situação limite do intervalo ser igual a zero. A função de densidade espectral pode obter-se da função de autocorrelação através do integral:

$$S(\omega) = 4 \int_0^\infty R_z(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau \quad (7.15)$$

onde  $|R_z(t)|$  é finito

As equações de Wiener-Khintchine permitem-se obter a função de autocorrelação a partir da função de densidade espectral como:

$$R_z(\tau) = \int_0^\infty S(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega \quad (7.16)$$

Substituindo a expressão (7.8) na (7.12), obtém-se a função de autocorrelação da elevação da superfície do mar dada por:

$$\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_i a_j \cos[\omega_i(t + \tau) + E_i] \cos[\omega_j t + E_j] dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty a_i a_j \left[ \cos(\omega_i t + E_i) \cos(\omega_j t + E_j) \cos \omega_i \tau - \right. \\
&\quad \left. - \sin(\omega_i t + E_i) \cos(\omega_j t + E_j) \sin \omega_i \tau \right] dt = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^\infty a_i^2 \cos \omega_i \tau
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Nesta equação fez-se uso das propriedades de ortogonalidade das funções trigonométricas para se obter o resultado final. Substituindo agora esta expressão na expressão (7.15) obtém-se a expressão da função de densidade espectral:

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= 2 \int_0^\infty \sum_{i=1}^\infty a_i^2 \cos(\omega_i \tau) \cos(\omega \tau) d\tau = \\
&= \sum_{i=1}^\infty a_i^2 \int_0^\infty [\cos(\omega_n + \omega)\tau + \cos(\omega_n - \omega)\tau] d\tau
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Esta expressão tem um integral que é dado por duas funções de  $\delta$  (didiraque) nas frequências  $\omega_n = \pm \omega$ .

Tomando só a solução em que a função de  $\delta$  é igual a uma frequência positiva fica-se restringido aos valores positivos da frequência. Neste caso a função de densidade espectral será dada por:

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2} a_i^2 \delta[\omega_n - \omega] \tag{7.19}$$

Nesta equação a função de  $\delta$  pode ser aproximada por  $1/d\omega$  para as frequências entre  $f$  e  $f+d\omega$  sendo zero no domínio exterior. Neste caso a expressão anterior reduz-se a:

$$S(\omega) = \frac{1}{d\omega} \sum_{\omega}^{\omega+d\omega} \frac{1}{2} a_i^2 \tag{7.20}$$

Esta expressão que agora se obteve está ligada à expressão (7.9), que se tinha obtido na secção anterior. Este método de obter a função densidade espectral a partir da função de autocorrelação é na realidade um dos métodos que se utilizam na prática para determinar o espectro das ondas a partir dos registos dos ondógrafos.

### 7.3 Simulação Numérica do Mar Agitado

Nas duas secções anteriores estudou-se a forma como a superfície do mar agitado se pode representar de uma forma resumida através do espectro. Descreveu-se ainda como é que a partir da representação da elevação da superfície do mar se obteve o espectro.

Interessa agora verificar como se pode proceder da forma inversa, ou seja, a partir do conhecimento do espectro da ondulação como se pode obter a forma da superfície do mar agitado.

A equação fundamental para a simulação é:

$$Z(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_{ij} \cos(k_i x \cos \theta_j + k_j y \sin \theta_j - \omega_i t + \varepsilon_{ij}) \quad (7.21)$$

a qual representa o somatório de  $N$  componentes direccionais e de  $M$  componentes ao longo da frequência. Nesta expressão as amplitudes  $a_{ij}$  são dadas por:

$$a_{ij}^2 = 2 S_z(\omega_i, \theta_j) \Delta\omega_i \Delta\theta_j \quad (7.22)$$

onde  $\Delta\omega_i$  representa a banda da frequência centrada na frequência  $\omega_i$  e  $\Delta\theta_j$  representa a largura da banda para a direcção  $j$  da ondulação. É importante notar que esta expressão que representa a elevação da superfície do mar poderia também representar qualquer outra das propriedades que lhe estão associadas, tais como a velocidade ou aceleração das partículas. Para isso bastaria que o espectro da equação (7.22) fosse o espectro correspondente.

Quando se pretende simular as propriedades da onda num ponto do espaço fixo é mais económico do ponto vista computacional utilizar uma expressão:

$$Z(t|x, y) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad (7.23)$$

a qual contém um único somatório ao longo do tempo. Nesta expressão os coeficientes são:

$$A_i = \sqrt{B_i^2 + C_i^2} \quad (7.24)$$

$$\phi_i = \text{tg}^{-1}(C_i/B_i) \quad (7.25)$$



onde os coeficientes  $B_i$  e  $C_i$  resultam do somatório ao longo das várias direcções que estão a ser consideradas:

$$B_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} \cos(k_i x \cos \theta_j + k_j y \sin \theta_j + \varepsilon_{ij}) \quad (7.26)$$

$$C_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} \sin(k_i x \cos \theta_j + k_j y \sin \theta_j + \varepsilon_{ij}) \quad (7.27)$$

Normalmente nas simulações, o intervalo de tempo que se utiliza é constante, o que implica que, o instante  $t_i = i \cdot \Delta t$ .

Nesta situação é possível reduzir bastante o tempo de computação, utilizando por exemplo as seguintes relações recursivas:

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \quad (7.28)$$

$$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta \quad (7.29)$$

Desta forma diminui-se significativamente o número de vezes que as equações  $\sin$  e  $\cos$  têm que ser avaliadas. Como guia para uma simulação, é de ter em conta que o número de componentes direccionais deverá ser superior a trinta enquanto que o número de componentes da frequência deve ser maior do que cinquenta talvez mais perto das duzentas.

É preciso ter algum cuidado na escolha das frequências  $\omega_i$  as quais devem ser escolhidas por forma a não ter harmónicas. um exemplo típico é um conjunto de frequências com um incremento constante. neste caso o perfil das ondas repete-se com um período igual a duas vezes o número de pontos. Ângulo de fase  $\varepsilon_{ij}$  é um ângulo aleatório mas uniformemente distribuído no domínio entre 0 e  $2\pi$ .

É possível simular um perfil de uma onda irregular unidimensional utilizando o mesmo princípio. Neste caso a equação será:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t - \varepsilon_i) \quad (7.30)$$

O caso da equação (7.23), é possível demonstrar que a amplitude  $A_i$ , segue a distribuição  $x^2$  com dois graus de liberdade. Assim na equação (7.30) a amplitude em  $(\dots a_i \dots)$  deveria de tomar o valor de.

$$a_i^2 = S(\omega_i) x_2^2 \Delta\omega_i \quad (7.31)$$

No entanto se não houver interesse em simular a variação estatística do perfil das ondas, então a distribuição de  $x^2$  pode ser substituída pelo seu valor esperado: Ou seja:

$$E[x_2^2] = 2 \quad (7.32)$$

#### 7.4 Modelos Teóricos de Espectros de Vagas

No final dos anos '50 e início dos anos '60 desenvolveu-se muito trabalho de análise de registos de ondulação e de determinação dos espectros de ondas. Nessa altura verificou-se que o espectro das ondas tinha uma forma constante pelo que vários autores propuseram diferentes expressões que representassem esse espectro.

Phillips em 1958 desenvolveu uma teoria que explicou a forma da cauda do espectro de um sistema de ondas completamente desenvolvido. As suas considerações basearam-se na análise do fenómeno físico e da energia que se dissipa pelo quebrar das ondas, a qual representa o limite superior do espectro de energia. A partir destas considerações, Phillips sugeriu que a cauda do espectro varia proporcionalmente à potência  $-5$  da frequência, isto é:

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \quad (7.33)$$

onde a constante  $\alpha$  se passou a denominar a constante Phillips e  $g$  é a aceleração da gravidade. Vários outros modelos foram propostos, muitos dos quais hoje em dia não têm mais do que um valor histórico. De qualquer forma, embora se tenha chegado à conclusão que nem todos eles são igualmente aplicáveis, é conveniente apresentar uma breve panorâmica de todos os modelos que foram sendo propostos para que se possa situar na literatura a relação entre os vários modelos.

Grande parte dos modelos que foram propostos segue uma formula geral que é dada por:

$$S(\omega) = B\omega^{-p} \exp(-C\omega^{-q}) \quad (7.34)$$

onde  $b$ ,  $c$ ,  $p$  e  $q$  são 4 parâmetros do espectro. Os modelos propostos estudam os valores para os parâmetros  $p$  e  $q$ , ficando o espectro uma função de 2 parâmetros. Normalmente descreve-se o estado do mar pela altura significativa das ondas,  $H_s$  e por um período médio das ondas  $T_0$ . Estes 2 parâmetros podem-se obter a partir dos momentos do espectro. O momento índice  $n$  do espectro é dada por:

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S(\omega) d\omega \quad (7.35)$$

e a altura significativa é dada por:

$$H_s = 4\sqrt{m_0} \quad (7.36)$$

enquanto que o período médio das ondas se obtém da:

$$T_0 = 2\pi m_0/m_1 \quad (7.37)$$

Pode demonstrar-se que a frequência do pico espectral, ou seja, a frequência onde o espectro tem a maior ordenada é dada por:

$$\omega_0 = \left(\frac{Cq}{p}\right)^{1/q} \quad (7.38)$$

Também se demonstra que o momento de ordem zero do espectro é dado por:

$$m_0 = \frac{B \Gamma[(p-1)/q]}{q C^{(p-1)/q}} \quad (7.39)$$

onde  $\Gamma$  é função de  $\gamma$ . Determinando também o primeiro momento por integração e substituindo-o bem como a expressão (7.39) nas expressões (7.36 e 7.37) é possível daí tirar as expressões para as constantes  $b$  e  $c$ , as quais sendo substituídas na forma geral a equação 7.34, conduzem a:

$$S(\omega) = \frac{q}{16\Gamma\left(\frac{p-1}{q}\right)} \Lambda^{p-1} H_s^2 \frac{\bar{\omega}^{p-1}}{\omega^{-p}} \exp\left\{-\Lambda^p \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^{-q}\right\} \quad (7.40)$$

onde:

$$\Lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-2}{q}\right)} \quad (7.41)$$

O primeiro modelo teórico de espectro foi proposto por Neumann em 1953, com a seguinte forma:

$$S(\omega) = B\omega^{-6} \exp\left[-2g^2/(\omega U_w)^{-q}\right] \quad (7.42)$$

onde  $U_w$  representa a velocidade do vento e  $B$  é uma constante dimensional. Neste espectro a frequência de pico é dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{g}{U_w} \quad (7.43)$$

e a altura significativa é dada por:

$$H_s^2 = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} B \left(\frac{U_w}{2g}\right)^5 \quad (7.44)$$

Destas duas expressões pode-se obter o valor de  $B$  e  $U_w$ , em função de  $H_s$  e  $\omega_0$ , o que substituído na expressão do espectro de Neumann, equação (7.42), vai dar:

$$S(\omega) = 1.466 H_s^2 \frac{\omega_0^5}{\omega^{-6}} \exp\left[-3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2}\right] \quad (7.45)$$

que depende dos dois parâmetros do estado do mar.

Podia-se ter partido da forma geral do modelo espectral, ou seja, da equação (7.40) e fazendo  $p=6$  e  $q=2$  obtem-se a expressão do espectro agora em termos de  $H_s$  e do período médio:

$$S(\omega) = 0.39 H_s^2 \frac{\bar{\omega}^5}{\omega^{-6}} \exp\left[-1.767\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^{-2}\right] \quad (7.46)$$

Comparando estas duas expressões, obtem-se a expressão entre o período de pico e do período médio:

$$\omega_0 = 0.767 \bar{\omega} \quad (7.47)$$

Bretschneider em 1959 propôs uma outra forma do espectro:

$$S(\omega) = 00.1687 H_s^2 \frac{\omega_s^4}{\omega^5} e^{-0.675(\omega_s/\omega)^4} \quad (7.48)$$

a qual é função do período significativo das ondas, que se define como o período médio das alturas significativas, isto é do terço das ondas de maior elevação. É possível mostrar que no espectro de Bretschneider a relação entre o período significativo e o período de pico é:

$$T_s = 0.946 T_0 \quad (7.49)$$

Em 1964 Pierson e Moskowitz propuseram uma fórmula que veio a ganhar aceitação universal para a descrição do estado do mar desenvolvido. Atinge-se um estado do mar desenvolvido quando o vento actua numa dada superfície do mar, numa duração infinita e com fetch também infinito, levando à saturação do fenómeno de transmissão de energia do vento para o mar e o sistema de ondas fica em equilíbrio. Neste caso basta um único parâmetro para descrever o estado do mar. O espectro de Pierson-Moskowitz é dado por:

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \exp\left[-0.74\left(\frac{\omega U_w}{g}\right)^{-4}\right] \quad (7.50)$$

onde  $\alpha = 0.0081$  e  $U_w$  é a velocidade do vento. Uma forma alternativa de representar este espectro, agora em termos de frequência de pico é:

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \exp\left[-1.25(\omega/\omega_0)^{-4}\right] \quad (7.51)$$

Pode demonstrar-se que a constante  $\alpha$  é dada por:

$$\alpha = \frac{5\sigma^2 \omega_0^4}{g^2} \quad (7.52)$$

onde  $\sigma^2$  é variância da elevação da superfície do mar. Substituindo esta expressão na equação (7.50), obtem-se a forma alternativa do espectro de Pierson-Moskowitz:

$$S(\omega) = 5\sigma^2 \frac{\omega^{-5}}{\omega_0^4} \exp\left[-1.25(\omega/\omega_0)^{-4}\right] \quad (7.53)$$

Pode também demonstrar-se que a relação entre a frequência de pico e a altura significativa é dada por:

$$\omega_0^2 = 0.161 g/H_s \quad (7.54)$$

A frequência média dos zeros ascendentes é definida como:

$$\omega_z = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (7.55)$$

Calculando o segundo momento do espectro, e avaliando a equação (7.55), pode demonstrar-se que a frequência média dos zeros ascendentes se relaciona com a frequência de pico através de:

$$\omega_0^2 = 0.710\omega_z \quad (7.56)$$

O International Ship Structures Congress (ISSC), que se reuniu em 1964, veio a propor uma ligeira alteração ao espectro de Pierson-Moskowitz, que ficou definido por:

$$S(\omega) = 0.1107 H_s^2 \frac{\bar{\omega}_s^4}{\omega^5} \omega^{-0.4427(\omega/\bar{\omega})} \quad (7.57)$$

o qual é dado em função do espectro médio definido a partir do momento de ordem zero e ordem um do espectro. Relação entre a frequência de pico e a frequência média para um espectro ISSC é então:

$$\bar{\omega} = 1.296\omega_0 \quad (7.58)$$

Este espectro foi definido em função do período médio e não em função de período de pico ou do período dos zeros ascendentes, porque os dados existentes de compilações estatísticas de ondulação, baseavam-se em observações visuais na altura da onda e do período médio. As comparações entre as observações visuais e as medições permitiu correlacionar a altura significativa das ondas com a altura observada. Por outro lado o período que se observava visualmente concluiu-se ser aproximadamente igual ao período médio que se obtém a partir dos momentos de ordem zero e de ordem um.

Dois anos mais tarde a International Towing Tank Conference (ITTC) reuniu-se e propôs ainda uma forma diferente para o espectro Pierson-Moskowitz, que era dado em função do período médio dos zeros acendentes. Note-se o espectro de Bretschneider e o espectro Pierson-Moskowitz, bem como qualquer uma das parametrizações propostas pelo ISSC ou

pelo ITTC, se podem reduzir à expressão geral equação (7.34) onde os expoentes são  $p=5$  e  $q=4$ .

Fundamentalmente as expressões diferem pela expressão do período médio que fazem referência. Comparando os espectros de Bretschneider com Pierson-Moskowitz, bem como as suas duas parametrizações propostas pelo ISSC e pelo ITTC verifica-se que todos eles se resumem à formula geral do espectro que é a equação (7.34), com o parâmetro  $p=5$ , conforme proposto por Phillips, e com o parâmetro  $q=4$ . Todos estes espectros descrevem estados dos do mar completamente desenvolvidos.

Em 1973 uma grande equipa de varios países estudou o espectro de estados do mar em desenvolvimento e veio a propor uma formula conhecida por JONSWAP, a qual não é mais do que uma modificação do espectro de Pierson-Moskowitz, que é afectado por um factor que o torna mais concentrado junto ao pico. O espectro de JONSWAP tem cinco parâmetros, e é dado por:

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \exp\left[-1.25(\omega/\omega_0)^{-4}\right] \gamma^{\exp\left[\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2 \omega_0^2}\right]} \quad (7.59)$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro de pico,  $\sigma$  é o parâmetros de forma que toma dois valores consoante se está para um lado ou para outro do período de pico:

$$\sigma_a = 0.07 \quad (7.59a)$$

$$\sigma_b = 0.09 \quad (7.59b)$$

Quando  $\gamma=1$  a expressão do espectro de JONSWAP reduz-se ao espectro de Pierson-Moskowitz. A análise dos espectros em diferentes graus de desenvolvimento, mostrou que o valor que o parâmetro pico toma está relacionado com o grau de desenvolvimento do espectro. Denominando o fetch ou seja a distância ao longo da qual o vento se faz sentir por  $X$ , é possível relacionar o período de pico através da expressão:

$$\omega_0 = 2\pi \left[ g/U_w X_0 \right]^{-0.33} \quad (7.60)$$

onde:

$$X_0 = gX/U_w^2 \quad (7.61)$$

O  $\alpha$  utilizado na expressão (7.58) é dado por:

$$\alpha = 0.076(X_0)^{-0.22} \quad (7.62)$$

o qual tem como limite superior o valor 0.0081 que corresponde a um espectro completamente desenvolvido, ou seja ao espectro de Pierson-Moskowitz. Infelizmente não é possível determinar de forma analítica os momentos do espectro de JONSWAP, pelo que não se pode relacionar os parâmetros também por uma forma analítica. Estudos numéricos levaram a duas expressões aproximadas que relacionam a altura significativa e o período de pico respectivamente com o parâmetro de pico  $\gamma$  e com o período médio dos zeros ascendentes:

$$H_s = (0.11661 + 0.01581\gamma - 0.00065\gamma^2)T_0^2 \quad (7.63)$$

$$T_0 = (1.49 - 0.102\gamma^2 - 0.0142\gamma^2 - 0.00079\gamma^3)T_z \quad (7.64)$$

Quando  $\gamma=1$  estas duas expressões dão respectivamente:

$$H_s = 0.1317 T_0^2 \quad (7.65)$$

$$T_0 = 1.4014 T_z \quad (7.66)$$

o que representa, relativamente ao espectro de Pierson-Moskowitz, um erro menor do que 1% para altura significativa e 0,1% para o período de zeros ascendentes. Uma outra proposta para o espectro em função da altura significativa e frequência de pico foi avançada por Goda em 1979:

$$S_\omega = \alpha^* H_s^2 \frac{\omega^{-5}}{\omega_0^{-4}} \exp\left[-1.25(\omega/\omega_0)^{-4}\right] \gamma^{\exp\left[-(\omega-\omega_0)^2(2\tau^2\omega_0^3)\right]} \quad (7.67)$$

onde:

$$\alpha^* = \frac{0.0624}{0.230 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}} \quad (7.68)$$

note-se que também expressão se reduz ao espectro de Pierson Moskowitz quando o  $\gamma = 1$ -