Teste de Matemática A

2021 / 2022

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

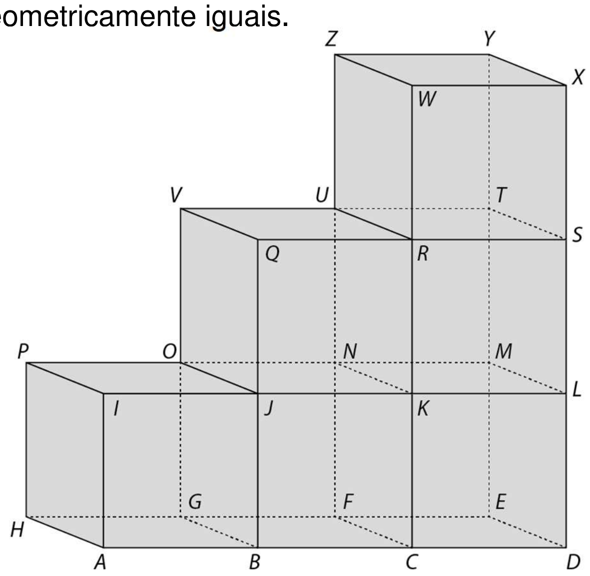
Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Observe a seguinte figura, constituída por cubos geometricamente iguais.



Considere as seguintes afirmações:

I. $A - 3\overrightarrow{LC} = X$

II. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{AG}$

III. $S - 2\overrightarrow{UZ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = C$

Acerca destas afirmações, pode afirmar-se que:

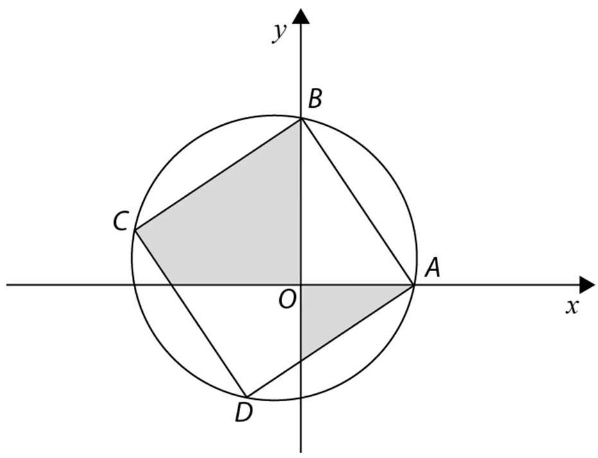
(A) são todas verdadeiras.

(B) apenas a afirmação I é falsa.

(C) apenas a afirmação II é falsa.

(D) apenas a afirmação III é falsa.

2. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência definida pela condição $x^2 + y^2 + x - y = 6$ e o quadrado $[ABCD]$.



Sabe-se, ainda, que:

- A é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox de abcissa positiva;
- B é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Oy de ordenada positiva;
- o ponto C pertence à circunferência e tem coordenadas $(-3,1)$.

2.1. Determine a equação cartesiana reduzida da circunferência.

2.2. Mostre que $A(2,0)$ e $B(0,3)$.

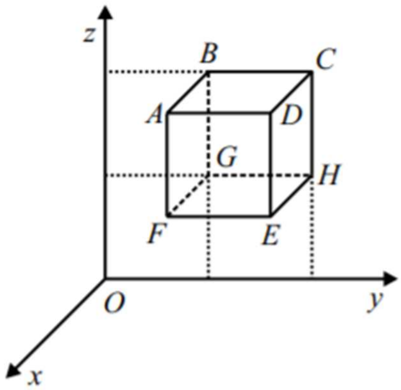
2.3. Defina por uma condição a região a sombreado (incluindo a fronteira).

2.4. Seja E um ponto pertencente à semirreta $\dot{A}D$.

Sabendo que o trapézio retângulo $[ABCE]$ tem área igual a 26 unidades quadradas, determine as coordenadas do ponto E.

3. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:



- cada aresta do cubo é paralela a um dos eixos coordenados;
- o vértice B tem coordenadas $(0, 3, 6)$;
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(3, 3, -3)$.

3.1. Mostre que as coordenadas do ponto E são $(3, 6, 3)$.

3.2. Qual das equações seguintes define a reta paralela à reta BE e que passa no ponto C?

(A) $(x, y, z) = (0,6,6) + k(3,3,3), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (-3,3,9) + k(1,1,-1), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (3,9,3) + k(-3,3,-3), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (6,12,6) + k(-1,-1,1), k \in \mathbb{R}$

3.3. Defina por uma condição cartesiana:

a) a reta HG;

b) o plano mediador de $[AF]$;

c) a face $[AFED]$;

d) o cubo $[ABCDEFGH]$.

3.4. Considere o ponto P de coordenadas $\left(k^2 - \frac{1}{4},\ 2k^2 + 5k,\ 2022\right)$.

Sabendo que o ponto P pertence à reta BG, o valor de k é igual a:

(A) -3 **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 3

3.5. Qual das condições seguintes define a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo?

(A) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}$

(B) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}$

(C) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$

(D) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$

3.6. Determine uma equação cartesiana do plano ACH.

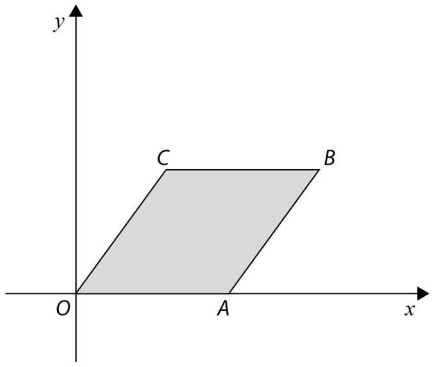
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

4. No referencial o.n. Oxy da figura está representado o paralelogramo $[OABC]$.

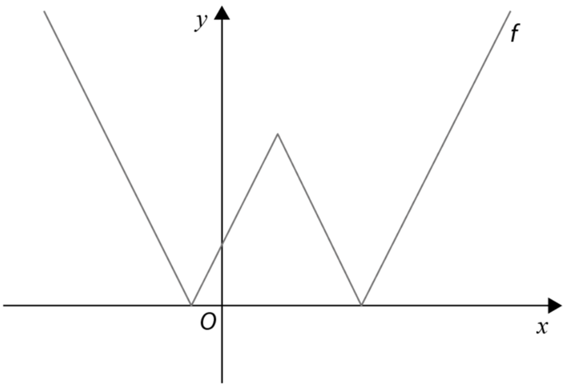
Sabe-se que:

- $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OC}$;
- o ponto A tem coordenadas $(2,0)$;
- a reta OB é definida por $y = \frac{1}{2}x$.

Determine as coordenadas do ponto C.



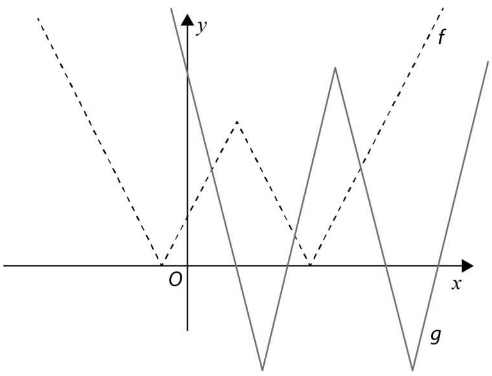
5. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura abaixo.



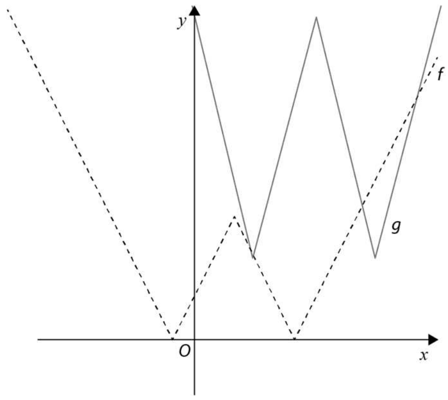
Seja g a função definida por $g(x) = 2f(x-2) - 2$.

Em qual das opções seguintes pode estar a representação gráfica da função g?

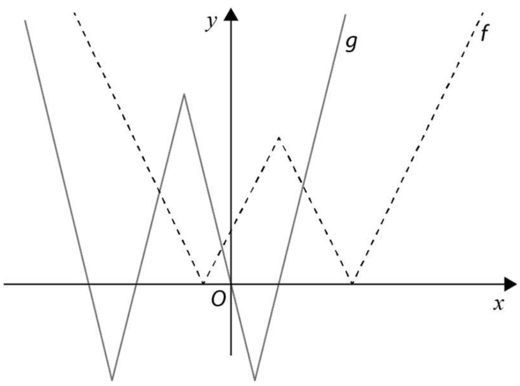
(A)



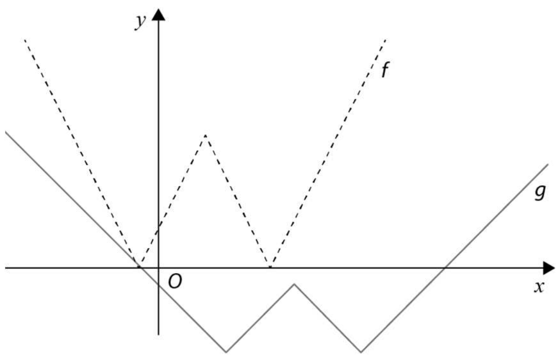
(B)



(C)



(D)



6. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

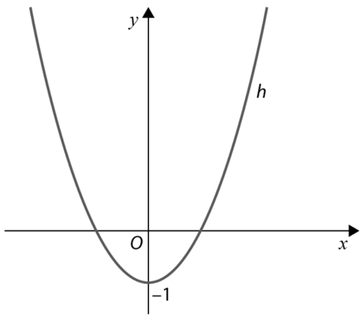
- f é ímpar;
- a tabela de sinal da função f é a seguinte:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

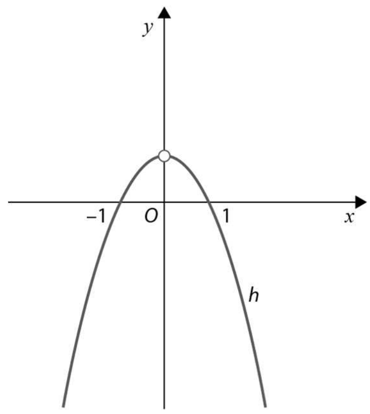
Considere a função real de variável real h definida por $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Nenhuma das representações gráficas a seguir apresentadas é a representação gráfica da função h.

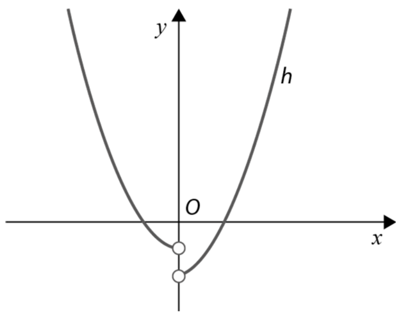
I.



II.



III.



Elabore uma composição na qual apresente, para cada uma das representações gráficas, uma razão pela qual essa representação não pode ser a representação gráfica da função h.

FIM

COTAÇÕES

Item																	
Cotação (em pontos)																	
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3. a)**	**3.3. b)**	**3.3. c)**	**3.3. d)**	**3.4.**	**3.5.**	**3.6.**	**4.**	**5.**	**6.**	**Total**
10	16	17	17	17	12	10	4	4	6	6	10	10	17	17	10	17	**200**

Teste N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (C)

I. $A - 3\overrightarrow{LC} = A + 3\overrightarrow{CL} = A + \overrightarrow{AX} = X$

A afirmação I é verdadeira.

II. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$

A afirmação II é falsa.

III. $S - 2\overrightarrow{UZ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = S + 2\overrightarrow{ZU} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} = S + \overrightarrow{SD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} = D + \overrightarrow{DC} = C$

A afirmação III é verdadeira.

2.

2.1. $x^2 + y^2 + x - y = 6 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

2.2. O ponto A é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox de abcissa positiva: $A(a, 0), a > 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm 5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Logo, $A(2, 0)$.

O ponto B é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Oy de ordenada positiva: $B(0, b), b > 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 6 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1 \pm 5}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Logo, $B(0, 3)$.

2.3. Reta BC

$\overrightarrow{BC} = C - B = (-3, 1) - (0, 3) = (-3, -2)$

$m_{BC} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

$BC: y = \frac{2}{3}x + 3$

Reta AD

$m_{AD} = m_{BC} = \frac{2}{3}$, pois AD e BC são retas paralelas.

$AD: y = \frac{2}{3}x + b$

Como o ponto $A(2,0)$ pertence à reta, vem que: $0 = \frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}$

$AD: y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

Reta CD

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,3) - (2,0) = (-2,3)$

$m_{CD} = m_{AB} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$, pois CD e AB são retas paralelas.

$CD: y = -\frac{3}{2}x + b$

Como o ponto $C(-3,1)$ pertence à reta, vem que: $1 = -\frac{3}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow 1 - \frac{9}{2} = b \Leftrightarrow -\frac{7}{2} = b$

$CD: y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

Assim, uma condição que define a região sombreada pode ser:

$$\left(x \leq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \ \wedge \ y \geq -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \ \wedge \ y \leq \frac{2}{3}x + 3\right) \vee \left(x \geq 0 \ \wedge \ y \leq 0 \ \wedge \ y \geq \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right)$$

2.4. $A_{[ABCE]} = 26 \Leftrightarrow \frac{\overline{BC} + \overline{AE}}{2} \times \overline{AB} = 26$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13} + \overline{AE}}{2} \times \sqrt{13} = 26$

$\Leftrightarrow \frac{13 + \sqrt{13} \times \overline{AE}}{2} = 26$

$\Leftrightarrow 13 + \sqrt{13} \times \overline{AE} = 52$

$\Leftrightarrow \sqrt{13} \times \overline{AE} = 39$

$\Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{39}{\sqrt{13}}$

$\Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{39\sqrt{13}}{13}$

$\Leftrightarrow \overline{AE} = 3\sqrt{13}$

Cálculos auxiliares

$\overline{AB}^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 13$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{13}$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = \sqrt{13}$.

$\overrightarrow{BC} = C - B =$

$= (-3,1) - (0,3)$

$= (-3,-2)$

$\overrightarrow{AE} = k \times \overrightarrow{BC}$, com $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$= k \times (-3,-2) =$

$= (-3k, -2k)$

$\|\overrightarrow{AE}\| = 3\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{9k^2 + 4k^2} = 3\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9k^2 + 4k^2}\right)^2 = \left(3\sqrt{13}\right)^2$

$\Leftrightarrow 9k^2 + 4k^2 = 117$

$\Leftrightarrow 9k^2 + 4k^2 = 117$

$\Leftrightarrow 13k^2 = 117$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{117}{13}$

$\Leftrightarrow k^2 = 9$

$\Leftrightarrow k = 3 \ \vee \ k = -3$

Como o ponto E pertence à semirreta $\dot{A}D$, então o vetor $\overrightarrow{AE}$ tem o mesmo sentido do vetor $\overrightarrow{BC}$, logo $k = 3$.

$\overrightarrow{AE} = (-9, -6)$

$E = A + \overrightarrow{AE} = (2, 0) + (-9, -6) = (-7, -6)$

3.

3.1. $E = B + \overrightarrow{BE} = (0, 3, 6) + (3, 3, -3) = (3, 6, 3)$

3.2. Opção (B)

Como o vetor de coordenadas $(3, 3, 3)$ não é colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$, então a equação da opção (A) não define a reta pedida.

O vetor de coordenadas $(1, 1, -1)$ é colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$. Averiguemos se o ponto C pertence à reta definida na opção (B):

$$(0, 6, 6) = (-3, 3, 9) + k(1, 1, -1) \Leftrightarrow (0, 6, 6) = (-3, 3, 9) + (k, k, -k)$$

$$\Leftrightarrow (0, 6, 6) = (-3 + k, 3 + k, 9 - k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -3 + k \\ 6 = 3 + k \\ 6 = 9 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 3 \\ k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow k = 3$$

O ponto C pertence à reta.

Assim, $(x, y, z) = (-3, 3, 9) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{R}$ define a reta paralela à reta BE que passa em C.

O vetor de coordenadas $(-3, 3, -3)$ não é colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$. Então, a equação apresentada na opção (C) não define a reta pedida.

O vetor de coordenadas $(-1, -1, 1)$ é colinear com o vetor $\overrightarrow{BE}$. Averiguemos se o ponto C pertence à reta definida na opção (D):

$$(0, 6, 6) = (6, 12, 6) + k(-1, -1, 1) \Leftrightarrow (0, 6, 6) = (6, 12, 6) + (-k, -k, k)$$

$$\Leftrightarrow (0, 6, 6) = (6 - k, 12 - k, 6 + k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 6 - k \\ 6 = 12 - k \\ 6 = 6 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ k = 6 \\ k = 0 \end{cases} \quad \text{Condição impossível}$$

O ponto C não pertence à reta.

Logo, a equação apresentada na opção (D) não define a reta paralela à reta BE que passa em C.

3.3.

a) $x = 0 \;\wedge\; z = 3$

b) $z = \frac{9}{2}$

c) $x = 3 \;\wedge\; 3 \leq y \leq 6 \;\wedge\; 3 \leq z \leq 6$

d) $0 \leq x \leq 3 \;\wedge\; 3 \leq y \leq 6 \;\wedge\; 3 \leq z \leq 6$

3.4. Opção (C)

$BG: x = 0 \wedge y = 3$

O ponto P pertence à reta BG se e somente se:

$$k^2 - \frac{1}{4} = 0 \;\wedge\; 2k^2 + 5k = 3 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \;\wedge\; 2k^2 + 5k - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(k = \frac{1}{2} \vee k = -\frac{1}{2}\right) \wedge\; k = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(k = \frac{1}{2} \vee k = -\frac{1}{2}\right) \wedge\; k = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(k = \frac{1}{2} \vee k = -\frac{1}{2}\right) \wedge\; \left(k = -3 \vee k = \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

O ponto P pertence à reta BG se e somente se $k = \frac{1}{2}$.

3.5. Opção (D)

O centro da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é o ponto médio do segmento de reta $[BE]$.

Determinemos as coordenadas do centro:

$$\left(\frac{0+3}{2}, \frac{3+6}{2}, \frac{6+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

O diâmetro da superfície esférica é igual a $\|\overrightarrow{BE}\|$.

$$\|\overrightarrow{BE}\| = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27}$$

Logo, o raio é igual a $\frac{\sqrt{27}}{2}$.

Assim, a equação reduzida da superfície esférica é:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

3.6. O plano ACH é o plano mediador do segmento de reta $[BD]$:

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 6y - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y - 6 = 0$$

4. $B\left(x, \frac{x}{2}\right), x > 0$

$\overrightarrow{AB} = \left(x, \frac{x}{2}\right) - (2, 0) = \left(x - 2,\ \frac{x}{2}\right)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + \frac{x^2}{4} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2}{4} - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 16x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x - 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \frac{16}{5}$$

$B\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

$C = B + \overrightarrow{AO} = \left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right) + (-2, 0) = \left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)$

5. Opção (A)

O gráfico de g resulta do gráfico de f segundo as seguintes transformações sucessivas:

- uma translação horizontal associada ao vetor de coordenadas $(2, 0)$;
- uma dilatação vertical de fator 2;
- uma translação vertical associada ao vetor de coordenadas $(0, -2)$.

Logo, apenas na opção (A) pode estar representado o gráfico da função g.

6. $D_h = D_f \cap \{x: x \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Assim, na opção I não pode estar representado o gráfico de h, já que, nesta opção, $h(0) = -1$.

Para $x \in]1, +\infty[, f(x) > 0$ e $x > 0$.

Logo, para $x \in]1, +\infty[$, tem-se que $\frac{f(x)}{x} > 0$, ou seja, para $x \in]1, +\infty[$, tem-se que $h(x) > 0$, o que exclui a representação gráfica da opção II.

Sabemos que a função f é ímpar, isto é, $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, h(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = h(x)$

Logo, a função h é par, o que exclui a representação gráfica da opção III onde o gráfico da função não apresenta uma simetria em relação ao eixo Oy.