www.esffranco.edu.pt

(2022/2023)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 3

3.º Período 01/06/2023 Duração: 100 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Num saco, estão dez bolas de ténis, indistinguíveis ao tato, sendo quatro delas verdes.

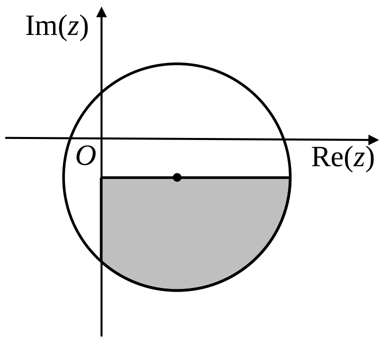
Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as dez bolas do saco.

Determine a probabilidade de bolas verdes serem extraídas consecutivamente (umas a seguir às outras).

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Na figura ao lado, está representada uma região do plano complexo.

Qual das condições seguintes pode definir, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, a região a sombreado, incluindo a fronteira?



(A) $|z-2+i| \leq 3 \ \wedge \ \text{Re}(z) \geq 0 \ \wedge \ \text{Im}(z+i) \geq 0$

(B) $|z-2+i| \leq 3 \ \wedge \ \text{Re}(z) \geq 0 \ \wedge \ \text{Im}(z+i) \leq 0$

(C) $|z+2-i| \leq 3 \ \wedge \ \text{Re}(z) \geq 0 \ \wedge \ \text{Im}(z+i) \leq 0$

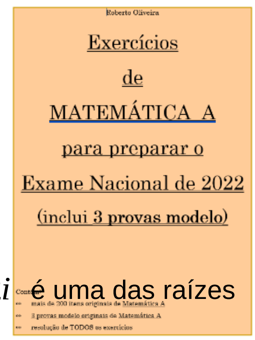
(D) $|z+2-i| \leq 3 \ \wedge \ \text{Re}(z) \geq 0 \ \wedge \ \text{Im}(z+i) \geq 0$

3. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e considere a equação $z^4 = w$, onde $w \in \mathbb{C}$.

Sabe-se que o número $\sqrt{2}e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, é uma das soluções da equação e o seu afixo é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial.

Qual é a área desse polígono?

(A) 4 **(B)** 2 **(C)** $\sqrt{8}$ **(D)** $\sqrt{12}$



4. Dado um número real a, sabe-se que, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, o número $a-2i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $\frac{17}{16}-9i$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o(s) valor(es) de a.

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número $z = \cos^2\theta + \left(\text{sen}^2\theta - \cos\theta + i\cos\theta\right)i + i + i^3$, com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Determine, caso exista(m), o(s) valor(es) de θ para o(s) qual(ais) se tem $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$.

6. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = 2e^{i\frac{\pi}{10}}$.

Pretende-se determinar todos os números naturais n de modo que z^n seja um imaginário puro de coeficiente negativo.

Qual das expressões a seguir permite determinar esses valores de n ?

(A) $n = 5 + 20k, k \in \mathbb{Z}$

(B) $n = 5 + 10k, k \in \mathbb{Z}$

(C) $n = 20k - 5, k \in \mathbb{Z}$

(D) $n = 10k - 5, k \in \mathbb{Z}$

7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo $w = \frac{15}{2i-4} + \frac{2-i^{45}}{2}$.

Sabe-se que w é uma das raízes de índice 6 de um número complexo z.

Determine o número z e apresente-o na forma algébrica.

8. Seja a um número real superior a 1.

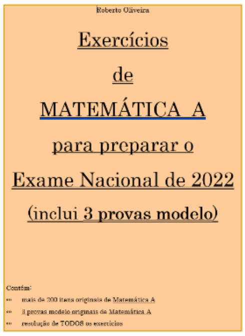
Qual é o valor de $\log_a\left(3^{\ln a}\right) - 3$?

(A) $\ln(9e)$

(B) $\ln(3e)$

(C) $\ln\left(\frac{3}{e^3}\right)$

(D) $\ln\left(\frac{9}{e^9}\right)$



9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e^{2x}}{x} - 4x$.

9.1. Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

9.2. Considere a reta r, secante ao gráfico de f, nos pontos de abcissas a e 2, com $a \in]0, 2[$.

Sabe-se que o declive da reta r é 15.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

– apresente o valor pedido arredondado às centésimas.

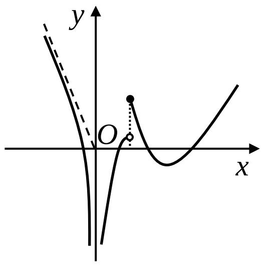
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

10. Seja $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ uma função tal que:

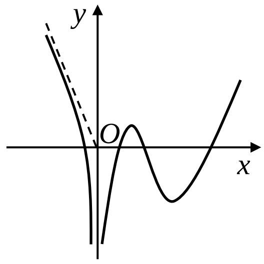
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}<0$;
- existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, para qualquer $x\in\left]0,+\infty\right[$;
- $f''(x)<0$, para qualquer $x\in\left]-\infty,0\right[$.

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função *f*.

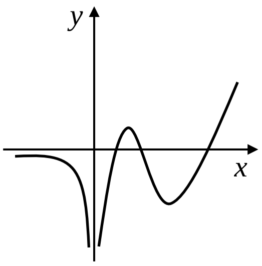
I)



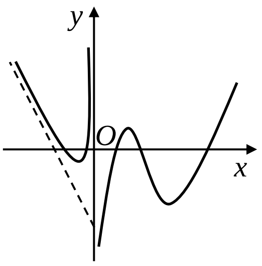
II)



III)



IV)



Elabore uma composição na qual:

- identifique a opção que pode representar a função *f* ;
- apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

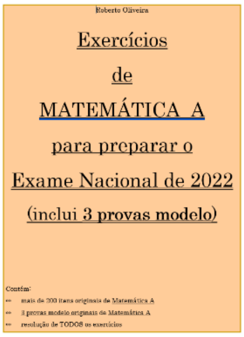
Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.

11. Seja *f* uma função, de domínio $\mathbb{R}$, e seja f'' a segunda derivada da função *f*.

Sabe-se que f'' tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x)=(x+5)^2\times e^{-x}\times\ln x$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico da função *f* tem exatamente quatro pontos de inflexão.
(B) O gráfico da função *f* tem exatamente três pontos de inflexão.
(C) O gráfico da função *f* tem exatamente dois pontos de inflexão.
(D) O gráfico da função *f* tem exatamente um ponto de inflexão.



12. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases} k+\dfrac{e^x-e}{3-3x} & \text{se } x<1 \\ \cos(\pi x)-\pi x+\pi & \text{se } x\geq 1\end{cases}$, sendo k um número real.

Sem recorrer à calculadora, determine k, sabendo que g é contínua.

13. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, de domínio $\mathbb{R}$, é definida por $f'(x) = (5x+1)e^{3-2x}$.
Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, se existir(em).

14. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \ln^2 x$.
Seja t a reta tangente ao gráfico da função h no ponto $a \in \mathbb{R}^+$ e seja r a reta perpendicular à reta t.
Sabendo que o declive de r é igual a $-a$, determine a.

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	
16	8	8	16	16	8	16	8	16	16	16	8	16	16	16	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0,\ldots,n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$