www.esffranco.edu.pt

Teste Intermédio

MATEMÁTICA A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 20.03.2014

10.º Ano de Escolaridade

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(A)**

Os pontos no exterior da circunferência estão limitados por duas retas horizontais (pelo que estão excluídas as alternativas (C) e (D)). A distância entre essas retas parece ser igual ao diâmetro da circunferência (3) pelo que também está excluída a alternativa (B).

2. Resposta **(C)**

Como a área do triângulo maior é $\frac{36}{25}$ vezes a área do menor, logo $\overline{SO} = \sqrt{\frac{36}{25}} \times \overline{QO} = \frac{6}{5} \times \overline{QO}$ pelo que as coordenadas de S são $\frac{6}{5}(2,5) = (\frac{12}{5},6)$.

3. Resposta **(D)**

$C + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{AB} = C + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = E$.

4. Resposta **(A)**

Pela condição dada, a reta é paralela ao eixo Ox, pelo que um vetor diretor é colinear ao vetor $(1,0,0)$. Assim, estão excluídas as alternativas (B) e (D). Como qualquer ponto dessa reta tem coordenadas $(x,5,-3)$, sendo x um número real, logo a alternativa (C) é também rejeitada.

5. Resposta **(B)**

O gráfico de (A) não pode representar a função pedida pois ele mostra que a temperatura da água tendeu, com o passar do tempo, para uma temperatura inferior à ambiente (e deveria tender para a temperatura ambiente);

O gráfico de (C) também não pode representar a função pedida pois ele mostra que a temperatura da água foi igual a $70\ ^\circ\mathrm{C}$ após 3 minutos (e deveria ter sido após 2 minutos);

O gráfico de (D) também não pode representar a função pedida pois ele mostra que, quando a Rosália apagou o lume, a temperatura da água foi igual a $95\ ^\circ\mathrm{C}$ (e deveria ter sido $90\ ^\circ\mathrm{C}$).

GRUPO II

1.1.1. $\boxed{D_f =]-\infty, 1] \cup]2, 4[}$ e $\boxed{D'_f = [-5, +\infty[}$.

1.1.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -7 \vee x = 1}$.

1.1.3. Um intervalo de valores reais onde a função f é, simultaneamente, negativa e decrescente pode ser $]-7, -4]$ ou $]-7, -5[$ ou $]-4,58; -4[$ ou ...

1.2. $f(x) \times f(-1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \times 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

$\therefore$ C.S. $= \boxed{]-\infty, -7] \cup [-2, 1]}$

2.1. Como o gráfico da função f representa uma parábola com a concavidade voltada para baixo, é necessário calcular a 2.ª coordenada do seu vértice:

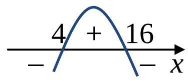
A 1.ª coordenada é igual a $-\frac{b}{2a} = -\frac{300}{2 \times (-15)} = 10$;

$\therefore$ o lucro máximo é igual a $f(10) = \boxed{2400}$ euros.

2.2. A condição a resolver é $f(x) \leq 1860$ no intervalo $[2, 20]$.

$-15x^2 + 300x + 900 \leq 1860 \Leftrightarrow -15x^2 + 300x - 960 \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 20x - 64 \leq 0$

Ora, $-x^2 + 20x - 64 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 16$



$\therefore -x^2 + 20x - 64 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \vee x \geq 16$

Atendendo a que $x \in [2, 20]$, tem-se que o conjunto solução da condição dada é $\boxed{[2, 4] \cup [16, 20]}$

Interpretação: o lucro será inferior ou igual a 1860 euros se forem vendidas entre 20 e 40 mochilas ou entre 160 e 200 mochilas (inclusive).

3.1. A área do paralelogramo $[ABCD]$ é dada pelo produto entre a sua base e a sua altura.

Como o raio da circunferência é 2, conclui-se que a altura do paralelogramo é 4.

$\overrightarrow{BH} = (-2, 2) \Leftrightarrow H - B = (-2, 2) \Leftrightarrow (3, 5) - B = (-2, 2)$ pelo que as coordenadas do ponto B são $(5,3)$.

Assim, a base do paralelogramo vale 5 unidades pelo que a área pedida é igual a $4 \times 5 = \boxed{20}$.

3.2. A equação da reta AH é da forma $y = mx + b$. Atendendo a que as coordenadas do ponto A são $(0,3)$, tem-se $b = 3$. Um vetor da reta AH é $\overrightarrow{AH} = (3, 5) - (0, 3) = (3, 2)$.

Assim, $m = \frac{2}{3}$ pelo que a equação pedida é $\boxed{y = \frac{2}{3}x + 3}$

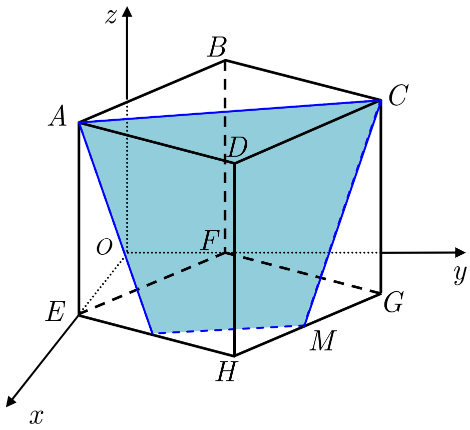
Nota: Um outro processo para calcular o declive da reta AH é usar as coordenadas dos dois pontos, ou seja, $m = \frac{2-4}{0-3} = \frac{2}{3}$.

3.3. Se os pontos têm ordenada 4 e pertencem à circunferência, tem-se:

$(x-3)^2 + (4-5)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 3 \Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{3} \vee x = 3 - \sqrt{3}$

$\therefore$ as abcissas pedidas são $\boxed{3 + \sqrt{3}}$ e $\boxed{3 - \sqrt{3}}$

4.1. A secção produzida no cubo pelo plano ACM é o trapézio colorido da figura:



4.2. As coordenadas do ponto A são $(x,0,5)$, sendo $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

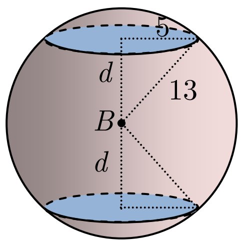
$\therefore$ as coordenadas de A são $(4,0,5)$.

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano mediador do segmento $[AB]$. Então, tem-se:

$$\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 + \cancel{(z-5)^2} = x^2 + (y-3)^2 + \cancel{(z-5)^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 6y + 9 \Leftrightarrow \boxed{-8x + 6y = -7}$$

4.3. Há duas soluções para o problema. O plano definido por $z = k$ está a d unidades, na vertical, do ponto B. Como a secção produzida na esfera é um círculo de área 25π, tem-se que o seu raio é 5 (pois $5^2\pi = 25\pi$.)



$\therefore d = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

Atendendo a que a cota do ponto B é 5, tem-se:

$k = 5 + 12 \vee k = 5 - 12$, ou seja, k pode tomar os valores $\boxed{-7}$ ou $\boxed{17}$.

FIM