

www.esffranco.edu.pt

Teste Intermédio

MATEMÁTICA A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 20.03.2014

10.º Ano de Escolaridade

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta (B)

Os pontos no exterior da circunferência estão limitados por duas retas horizontais (pelo que estão excluídas as alternativas (C) e (D)). A distância entre essas retas parece ser igual ao diâmetro da circunferência (4) pelo que também está excluída a alternativa (A).

2. Resposta (D)

Como a área do triângulo maior é $\frac{36}{25}$ vezes a área do menor, logo $\overline{SO} = \sqrt{\frac{36}{25}} \times \overline{QO} = \frac{6}{5} \times \overline{QO}$ pelo que as coordenadas de S são $\frac{6}{5}(5, 2) = (6, \frac{12}{5})$.

3. Resposta (B)

$$C + \overline{OD} - \overline{AB} = C + \overline{OD} + \overline{CO} = D.$$

4. Resposta (B)

Pela condição dada, a reta é paralela ao eixo Oy , pelo que um vetor diretor é colinear ao vetor $(0,1,0)$. Assim, estão excluídas as alternativas (A) e (C). Como qualquer ponto dessa reta tem coordenadas $(5, y, -3)$, sendo y um número real, logo a alternativa (D) é também rejeitada.

5. Resposta (C)

O gráfico de (A) não pode representar a função pedida pois ele mostra que a temperatura da água tendeu, com o passar do tempo, para uma temperatura inferior à ambiente (e deveria tender para a temperatura ambiente);

O gráfico de (B) também não pode representar a função pedida pois ele mostra que a temperatura da água foi igual a 70°C após 3 minutos (e deveria ter sido após 2 minutos);

O gráfico de (D) também não pode representar a função pedida pois ele mostra que, quando a Rosália apagou o lume, a temperatura da água foi igual a 95°C (e deveria ter sido 90°C).

GRUPO II

1.1.1. $D_f =]-4, -2[\cup]-1, +\infty[$ e $D'_f =]-\infty, 5]$.

1.1.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 7$.

1.1.3. Um intervalo de valores reais onde a função f é, simultaneamente, positiva e decrescente pode ser $[4, 7[$ ou $]5, 7[$ ou $]4; 4, 58[$ ou ...

1.2. $f(x) \times f(1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \times (-2) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$
 \therefore C.S. = $[-1, 2] \cup [7, +\infty[$

2.1. Como o gráfico da função f representa uma parábola com a concavidade voltada para baixo, é necessário calcular a 2.^a coordenada do seu vértice:

A 1.^a coordenada é igual a $-\frac{b}{2a} = -\frac{300}{2 \times (-15)} = 10$;

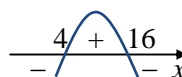
\therefore o lucro máximo é igual a $f(10) = 2600$ euros.

2.2. A condição a resolver é $f(x) \leq 2060$ no intervalo $[2, 20]$.

$$-15x^2 + 300x + 1100 \leq 2060 \Leftrightarrow -15x^2 + 300x - 960 \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 20x - 64 \leq 0$$

Ora, $-x^2 + 20x - 64 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 16$

$\therefore -x^2 + 20x - 64 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \vee x \geq 16$



Atendendo a que $x \in [2, 20]$, tem-se que o conjunto solução da condição dada é $[2, 4] \cup [16, 20]$

Interpretação: o lucro será inferior ou igual a 2060 euros se forem vendidas entre 20 e 40 mochilas ou entre 160 e 200 mochilas (inclusive).

3.1. A área do paralelogramo $[ABCD]$ é dada pelo produto entre a sua base e a sua altura.

Como o raio da circunferência é 2, conclui-se que a altura do paralelogramo é 4.

$$\overline{BH} = (-2, 2) \Leftrightarrow H - B = (-2, 2) \Leftrightarrow (3, 4) - B = (-2, 2) \text{ pelo que as coordenadas do ponto } B \text{ são } (5, 2).$$

Assim, a base do paralelogramo vale 5 unidades pelo que a área pedida é igual a $4 \times 5 = 20$.

3.2. A equação da reta AH é da forma $y = mx + b$. Atendendo a que as coordenadas do ponto A são $(0, 2)$,

tem-se $b = 2$. Um vetor da reta AH é $\overline{AH} = (3, 4) - (0, 2) = (3, 2)$.

Assim, $m = \frac{2}{3}$ pelo que a equação pedida é $y = \frac{2}{3}x + 2$

Nota: Um outro processo para calcular o declive da reta AH é usar as coordenadas dos dois pontos, ou

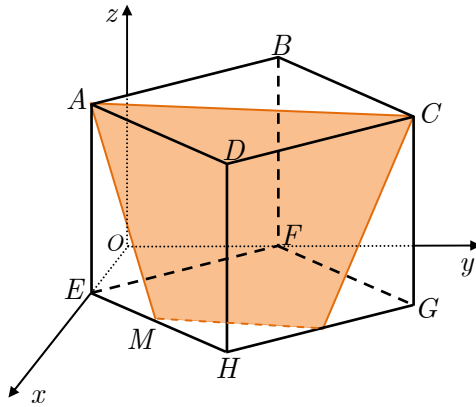
seja, $m = \frac{2-4}{0-3} = \frac{2}{3}$.

3.3. Se os pontos têm abscissa 2 e pertencem à circunferência, tem-se:

$$(2 - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4 \Leftrightarrow (y - 4)^2 = 3 \Leftrightarrow y - 4 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow y = 4 + \sqrt{3} \vee y = 4 - \sqrt{3}$$

\therefore as ordenadas pedidas são $4 + \sqrt{3}$ e $4 - \sqrt{3}$

4.1. A secção produzida no cubo pelo plano ACM é o trapézio colorido da figura:



4.2. As coordenadas do ponto A são $(x,0,5)$, sendo $x = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
 \therefore as coordenadas de A são $(3,0,5)$.

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano mediador do segmento $[AB]$. Então, tem-se:

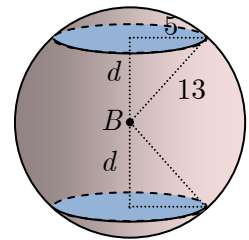
$$\begin{aligned} \overline{AP} = \overline{BP} &\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 = x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 \\ \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} &= \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 8y + 16 \Leftrightarrow \boxed{-6x + 8y = 7} \end{aligned}$$

4.3. Há duas soluções para o problema. O plano definido por $z = k$ está a d unidades, na vertical, do ponto B . Como a secção produzida na esfera é um círculo de área 25π , tem-se que o seu raio é 5 (pois $5^2\pi = 25\pi$.)

$$\therefore d = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Atendendo a que a cota do ponto B é 5, tem-se:

$$k = 5 + 12 \vee k = 5 - 12, \text{ ou seja, } k \text{ pode tomar os valores } \boxed{-7} \text{ ou } \boxed{17}.$$



FIM