Matemática A

Itens – 10.º Ano de Escolaridade

No Teste intermédio, que se irá realizar no dia 29 de Janeiro de 2010, os itens de grau de dificuldade mais elevado poderão ser adaptações de alguns dos itens que a seguir se apresentam.

Notas prévias:

1. Na resolução de alguns itens, poderá ser-lhe útil ter em conta que:

- a diagonal de um quadrado de lado a é igual a $\sqrt{2}\,a$
- a diagonal espacial de um cubo de aresta a é igual a $\sqrt{3}\,a$
- a altura de um triângulo equilátero de lado a é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$

2. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente o valor exacto.

1. Nas figuras 1 e 2 estão representados, a tracejado, dois hexágonos regulares geometricamente iguais e de lado 2.
Cada um dos hexágonos tem inscrita uma estrela com doze vértices.

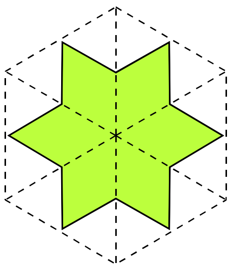

Figura 1

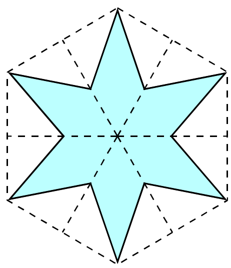

Figura 2

A estrela representada na figura 1 tem seis vértices coincidentes com os pontos médios dos lados do hexágono; cada um dos outros vértices coincide com o ponto médio de um segmento de recta cujos extremos são o centro e um vértice do hexágono.

A estrela representada na figura 2 tem seis vértices coincidentes com os vértices do hexágono; cada um dos outros vértices coincide com o ponto médio de um segmento de recta cujos extremos são o centro do hexágono e o ponto médio de um lado do hexágono.

Mostre que as áreas das duas estrelas são iguais.

2. Na figura 3 estão representadas duas circunferências: uma de centro O, de que $[AD]$ e $[FE]$ são dois diâmetros perpendiculares; outra de que $[BC]$ e $[FO]$ são dois diâmetros, também perpendiculares.

2.1. Calcule a área do pentágono $[ABCDE]$, supondo que $\overline{AO} = 2$

2.2. Designe $\overline{AO}$ por r.
Mostre que a área do pentágono $[ABCDE]$ é dada por $\frac{7}{4}\,r^2$

2.3. Admita agora que $\overline{AO} = 4$
Mostre que a área da região tracejada é igual a $3(\pi - 2)$

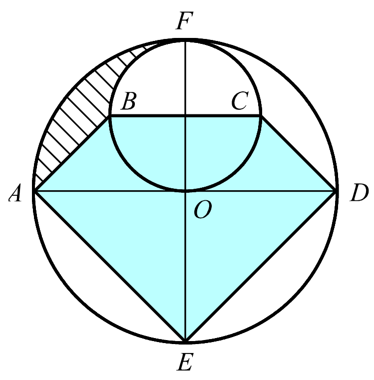

Figura 3

3. Na figura 4 está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.

Cada um dos pontos I, J, K, L, M e N é ponto médio de uma aresta.

O volume do cubo é igual a 8.

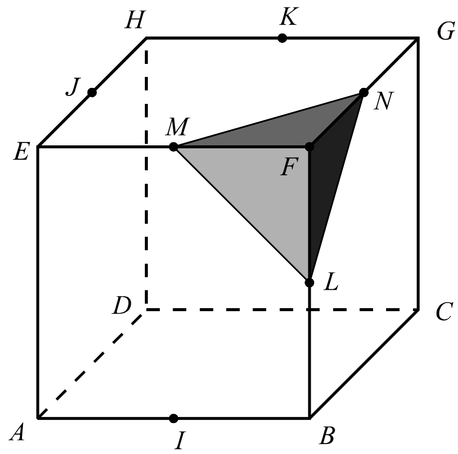

Figura 4

3.1. Considere o trajecto mais curto de I a J que passa pela aresta $[EF]$.

Determine o comprimento desse trajecto.

Sugestão: *comece por desenhar uma planificação do cubo, na qual esse trajecto possa ser representado por um segmento de recta.*

3.2. Seja P o ponto do trajecto referido na alínea anterior que pertence à aresta $[EF]$.

Determine a distância do ponto P a cada um dos extremos dessa aresta.

3.3. Na figura 5 está desenhada, em tamanho reduzido, uma planificação do cubo.

Represente, neste desenho, a região do cubo que está sombreada.

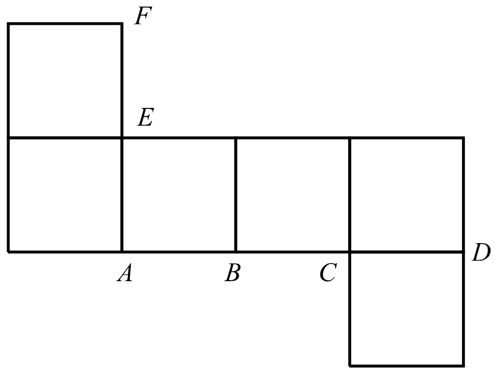

Figura 5

3.4. Determine a altura da pirâmide $[FLMN]$, relativa à base $[LMN]$.

Sugestão*: comece por determinar o volume da pirâmide, tomando para base uma das faces sombreadas.*

3.5. Considere a secção produzida no cubo pelo plano IJK.

3.5.1. Desenhe essa secção, utilizando a figura 6.

3.5.2. Determine o seu perímetro.

3.5.3. Determine a sua área.

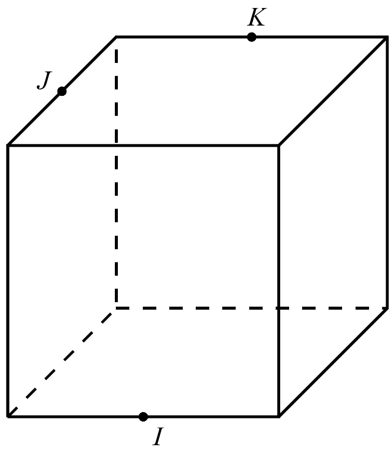

Figura 6

4. Na figura 7 estão representados uma esfera de centro O e raio 5 e um sólido que se pode decompor em dois cones.

O volume desse sólido é $\frac{8}{25}$ do volume da esfera.

O círculo de centro C é a base dos dois cones. Este círculo é a secção produzida na esfera pelo plano perpendicular a $[AB]$ no ponto C.

Os vértices dos cones são os extremos do diâmetro $[AB]$ da esfera.

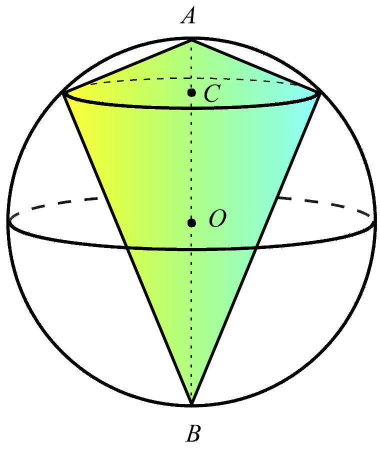

Figura 7

4.1. Mostre que $\overline{OC} = 3$

4.2. O plano que passa no centro da esfera e é perpendicular a $[AB]$ divide o cone de vértice B em dois sólidos, um dos quais também é um cone.

Determine o volume desse cone.

4.3. Na figura 8 está esquematizada uma planificação do cone de vértice B.

Determine:

4.3.1. O valor de x

4.3.2. A amplitude do ângulo α, em graus, arredondada às unidades.

Nota: sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

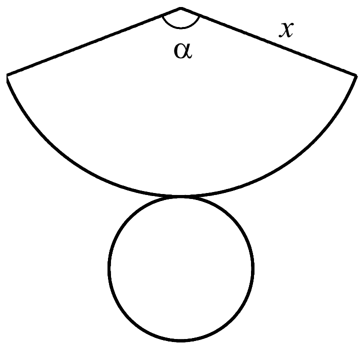

Figura 8

5. O triângulo $[ABC]$, representado na figura 9, é um triângulo equilátero. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem.

Numa rotação de $360°$ em torno de CN, o triângulo $[ACN]$ gera um cone de volume V.

Determine, em função de V, o volume do sólido gerado, na mesma rotação, pelo triângulo $[AMN]$.

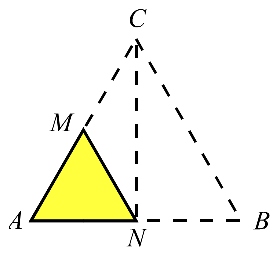

Figura 9

6. Na figura 10 estão representados uma pirâmide quadrangular regular e um cubo. Uma das faces do cubo está contida na base da pirâmide, e cada um dos vértices da face oposta pertence a uma aresta da pirâmide.

6.1. Associe a cada um dos pares de rectas, designados pelos números de 1 a 6, a posição relativa dessas rectas, indicada na chave.

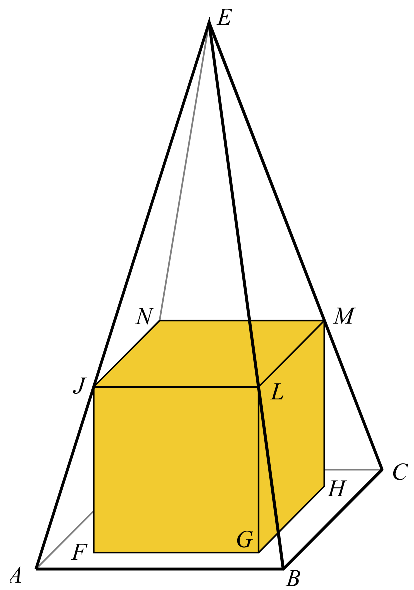

Figura 10

Pares de rectas

1 - BC e JN

2 - FH e HM

3 - AJ e HM

4 - BF e LN

5 - BE e MN

6 - AB e EL

Chave

A - Não complanares

B - Paralelas

C - Perpendiculares

D - Concorrentes não perpendiculares

6.2. Associe a cada um dos pares (recta, plano), designados pelos números de 1 a 6, a posição da recta em relação ao plano, indicada na chave.

Pares (recta, plano)

1 - FH e EJM

2 - GH e AEN

3 - MN e GHL

4 - AC e LMN

5 - CN e ABE

6 - AE e FHM

Chave

A - Recta contida no plano

B - Recta estritamente paralela ao plano

C - Recta perpendicular ao plano

D - Recta concorrente com o plano, mas não perpendicular

6.3. Sabe-se que a pirâmide tem volume igual a 144 e altura igual a 12.

6.3.1. Determine o perímetro do triângulo $[ABE]$.

6.3.2. Calcule o volume do cubo.

7. Pegou-se num cubo e em seis pirâmides regulares, cada uma delas com base geometricamente igual às faces do cubo e com altura igual à aresta do cubo. Colaram-se as pirâmides, pelas respectivas bases, às faces do cubo, uma pirâmide em cada face, de tal forma que as bases das pirâmides ficaram coincidentes com as faces do cubo. Obteve-se, assim, um novo poliedro (como é óbvio, os quadrados que são, simultaneamente, faces do cubo e bases das pirâmides não são faces deste poliedro).

7.1. Verifique que a fórmula de Euler é respeitada neste novo poliedro, embora ele não seja convexo.

7.2. Seja V_c o volume do cubo e seja V_p o volume do novo poliedro.
Determine o valor de $\frac{V_p}{V_c}$

7.3. Seja A_c a área total do cubo e seja A_p a área total do novo poliedro.
Determine o valor de $\frac{A_p}{A_c}$

7.4. Determine a área total do novo poliedro, sabendo que o seu volume é $192\ cm^3$.

8. Na figura 11 está representada uma peça constituída por um cilindro de plástico transparente e uma pirâmide quadrangular regular de madeira. A base da pirâmide está inscrita numa das bases do cilindro, e o vértice da pirâmide é o centro da outra base do cilindro.

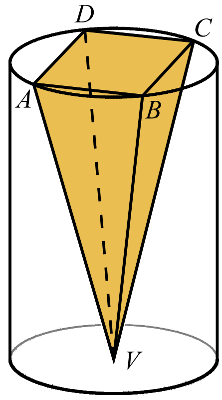

Figura 11

Sabe-se que:
- a altura do cilindro é $8\ m$
- a área da base do cilindro é $8\pi\ m^2$

8.1. Indique, justificando, o valor lógico (verdadeiro/falso) da seguinte afirmação:

«*A intersecção dos planos AVD e BVC é o ponto V.*»

8.2. Se planificarmos a superfície lateral do cilindro, obteremos um rectângulo.
Mostre que o seu perímetro é dado, em metros, por $8(\sqrt{2}\pi + 2)$

8.3. Mostre que o comprimento da aresta da base da pirâmide é $4\ m$.

8.4. Verteu-se um líquido na parte do cilindro que não está ocupada pela pirâmide, tal como se ilustra na figura 12. A altura do líquido é metade da altura do cilindro.

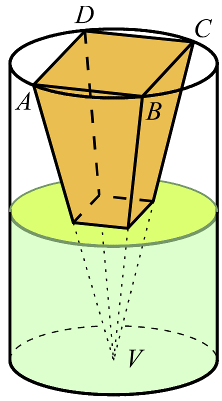

Figura 12

Quantos litros de líquido foram vertidos no cilindro? Apresente o resultado aproximado às unidades.

Nota: sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

9. Na figura 13 está representado um sólido que se pode decompor no cubo $[DEFGHIKL]$ e no paralelepípedo rectângulo $[HIJMNOPQ]$.

Sabe-se que:

- $\overline{HN} = \overline{DH}$
- o volume do paralelepípedo é igual a $\frac{5}{8}$ do volume do cubo;
- o ponto B é o ponto médio da aresta $[MJ]$.

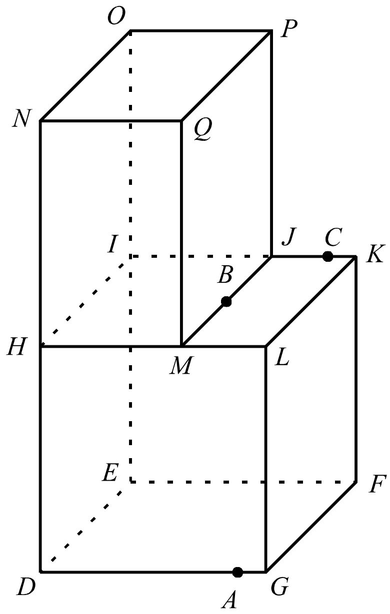

Figura 13

9.1. Admita que $\overline{DG} = 8$ e que $\overline{AG} = 1$
Determine $\overline{AB}$.

9.2. Represente, na figura 13, a secção produzida no sólido pelo plano ABC.

9.3. Indique a posição relativa dos seguintes pares de rectas:
HL e FL, HP e GL, HN e DK.

9.4. Indique, justificando, as amplitudes dos ângulos KHG e PMQ.

10. Na figura 14 estão representados um cubo e um octaedro.
O octaedro é o dual do cubo. Portanto, os vértices do octaedro são os centros das faces do cubo.

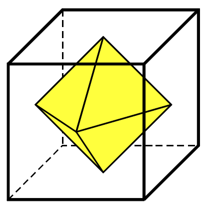

Figura 14

10.1. Mostre que o volume do octaedro é $\frac{1}{6}$ do volume do cubo.

10.2. O cubo e o octaedro são dois dos cinco poliedros convexos regulares (sólidos platónicos). Os outros três são, como sabe, o tetraedro, o dodecaedro e o icosaedro.

As faces do tetraedro, do octaedro e do icosaedro são triângulos equiláteros, as faces do cubo são quadrados, e as faces do dodecaedro são pentágonos regulares.

Considere agora as seguintes questões:

- Por que razão não podem existir poliedros convexos regulares cujas faces sejam polígonos com um número de lados superior a cinco?
- No caso dos poliedros convexos regulares de faces triangulares, o número máximo de faces que concorrem em cada vértice é cinco (icosaedro).
  Por que razão não podem existir poliedros convexos regulares de faces triangulares com mais faces a concorrerem num mesmo vértice?
- No caso do cubo e do dodecaedro, o número de faces que concorrem em cada vértice é três.
  Por que razão não podem existir poliedros convexos regulares de faces quadradas ou pentagonais com mais faces a concorrerem num mesmo vértice?

Elabore uma composição na qual responda às questões colocadas.
Pode, se o desejar, ilustrar a sua composição com desenhos que complementem as suas explicações.