2.º Conjunto de problemas do GAVE 10.º Ano. Novembro 2009

1.

1.1. Os pontos A e B são a intersecção da recta AB com a circunferência. Assim temos:

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-3)^2=5 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(5-3)^2=5 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+4=5 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4+4-5=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \underset{F.R.}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=3 \vee x=1 \\ \end{cases}$$

Logo $A(1,5)$ e $B(3,5)$. As coordenadas de C e D serão $C(3,1)$ e $D(1,1)$ pois o centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(2,3)$.

1.2. Ora $\overline{AB}=2$

Intersectando a circunferência com o eixo Oy vem

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-5)^2=5 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0-2)^2+(y-5)^2=5 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+y^2-10y+25-5=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-10y+24=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

1

$\begin{cases} y=4 \vee y=6 \\ x=0 \end{cases}$ Ou seja os pontos de intersecção do eixo Oy com a circunferência têm de coordenadas $E(0,4)$ e $F(0,6)$ e $\overline{EF}=2$

Logo as duas áreas são iguais porque as cordas [AB] e [EF] têm o mesmo comprimento.

1.3 Por exemplo:

$$\left((x-2)^2+(y-3)^2 \leq 5 \ \wedge \ x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3\right)$$

$$\vee$$

$$\left((x-2)^2+(y-3)^2 \leq 5 \ \wedge \ y \leq 1 \ \vee \ y \geq 5\right)$$

2.

2.1 O ponto $C \in Oy$ então $C(0,y)$ e C pertence à circunferência, substituindo vem:

$$(0+4)^2+(y-6)^2=25$$
$$\Leftrightarrow 16+y^2-12y+36-25=0$$
$$\Leftrightarrow y^2-12y+27=0$$
$$\Leftrightarrow y=9 \vee y=3$$ então $G(0,3)$ e $C(0,9)$

O ponto D pertence à recta $CD: y=9$ então $D(x,9)$ e D pertence à circunferência, substituindo vem:

$$(x+4)^2+(9-6)^2=25$$
$$\Leftrightarrow x^2+8x+16+3^2=25$$

2

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 8x + 16 + 9 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 8x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x+8) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -8$ $\qquad$ então $\quad D(-8, 9)$

2.2. $A(-4, 6)$ e $D(-8, 9)$. A equação da mediatriz de $[AD]$ é dada por:

$$(x+4)^2 + (y-6)^2 = (x+8)^2 + (y-9)^2$$

$\Leftrightarrow \quad \cancel{x^2} + 8x + 16 + \cancel{y^2} - 12y + 36 = \cancel{x^2} + 16x + 64 + \cancel{y^2} - 18y + 81$

$\Leftrightarrow \quad -12y + 18y = 16x - 8x - 16 - 36 + 64 + 81$

$\Leftrightarrow \quad 6y = 8x + 93$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{8}{6}x + \frac{93}{6}$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{31}{2}$

2.3. $(x+4)^2 + (y-6)^2 \leq 25 \quad \wedge \quad y \leq 6 \quad \wedge \quad -4 \leq x \leq 0$

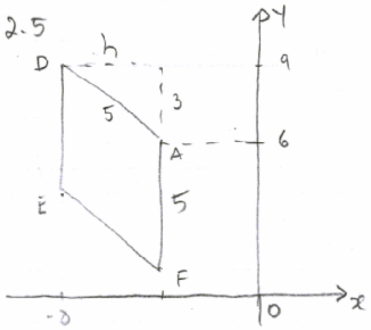
2.4. $P_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overbrace{\overline{AD}}^{raio}$ $\qquad$ $B(0, 6)$

$= 4 + 3 + 8 + 5$ $\qquad$ $C(0, 9)$

$= 20$ $\qquad$ $A(-4, 6)$

$D(-8, 9)$

2.5



$h^2 + 3^2 = 5^2$

$\Leftrightarrow \quad h^2 = 16$

$\Leftrightarrow \quad h = \pm\sqrt{16}$

Como $h > 0$ então $h = 4$

$A_{[ADEF]} = 5 \times 4 = 20$

3

3. A equação da circunferência é $x^2+y^2=(\sqrt{6})^2$
$\Leftrightarrow x^2+y^2=6$

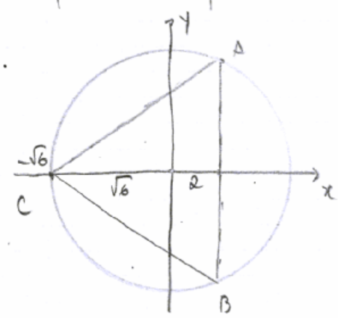
3.1. $A(2, y)$ e $B(2, y)$ substituindo vem:

$2^2+y^2=6 \Leftrightarrow y^2=6-4 \Leftrightarrow y^2=2$
$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2}$

Como A pertence ao primeiro quadrante vem:

$A(2,\sqrt{2})$ e $B(2,-\sqrt{2})$

3.2. O ponto C tem de coordenadas $(-\sqrt{6}, 0)$



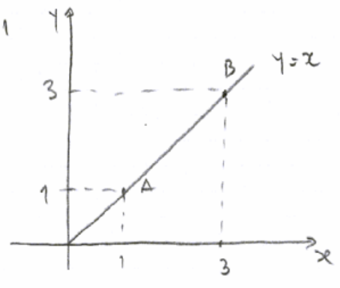
base $=\overline{AB}=2\sqrt{2}$
altura $=\sqrt{6}+2$

$A_{[ABC]}=\dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}\times(2+\sqrt{6})}{\cancel{2}}$
$=\sqrt{2}(2+\sqrt{6})$
$=2\sqrt{2}+\sqrt{12}=$
$=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

então metade da área é $\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+2\sqrt{3})=\sqrt{2}+\sqrt{3}\simeq 3,14$ //

4

4.1



$P(x, 2x)$ e

$\overline{AP}=\overline{BP}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(2x-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(2x-3)^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(2x-1)^2=(x-3)^2+(2x-3)^2$

elevando ao quadrado

4

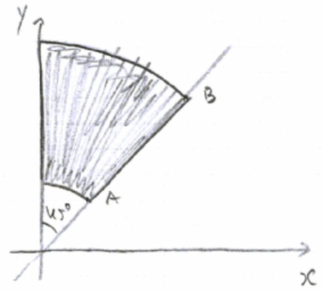
$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + \cancel{4x^2} - 4x + 1 = x^2 - 6x + 9 + \cancel{4x^2} - 12x + 9$

$\Leftrightarrow \quad -6x + 6x + 12x = 9 + 9 - 1 - 1$

$\Leftrightarrow \quad 6x = 16$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ logo $P\left(\frac{8}{3}, 2 \times \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$

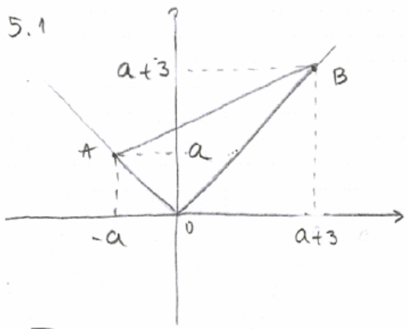
4.2



$$A_{\text{sombreada}} = \frac{1}{8}\left(A_{\underset{\text{raio } 3}{\bigcirc}} - A_{\underset{\text{raio } 1}{\bigcirc}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\pi \times 3^2 - \pi \times 1^2\right) = \frac{1}{8} \times 8\pi = \pi$$

5.1



$\overline{AO} = a\sqrt{2}$ (T. Pitágoras)

$\overline{OB} = (a+3)\sqrt{2}$

Com $a > 0$

$\frac{\overline{AO} \times \overline{OB}}{2} = 10$

$\Leftrightarrow \overline{AO} \times \overline{OB} = 20$

$\Leftrightarrow a\sqrt{2} \times (a+3)\sqrt{2} = 20$

$\Leftrightarrow 2a(a+3) = 20$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 6a - 20 = 0$

$\Leftrightarrow a = 2 \vee \cancel{a = -5}$

5

então $A(-2,2)$ e $B(5,5)$

5.2 O ângulo AOB é recto, pois OA e OB são perpendiculares. Então o arco AB tem amplitude 180° pelo que [AB] é um diâmetro da circunferência

5.3 e 5.4 nas soluções.

6. $P(0,1)$

$Q(x,y)$ e $\boxed{x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}}$

$$\overline{QP} = \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+y^2-2y+1} =$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4y+y^2-2y+1} = \sqrt{y^2+2y+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} = y+1 \qquad y = \frac{x^2}{4} > 0 \text{ então}$$

justificação $\quad y+1>0$

7.

7.1. $A_{prisma} = 2\times 30^2 + 4\times 30\times 15 = 3600$

7.2 $O(0,0,0)$ o outro extremo da diagonal espacial é $A(30,30,15)$. A equação é dada por:

$$(x-30)^2+(y-30)^2+(z-15)^2 = (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2$$

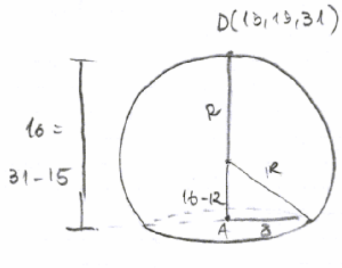
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-60x+900+\cancel{y^2}-60y+900+\cancel{z^2}-30z+225 = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}$$

$$\Leftrightarrow -60x-60y-30z+2025=0 \underset{:-15}{\Leftrightarrow} 4x+4y+2z-135=0 \;//$$

6

7.3 $0 \leq x \leq 30 \wedge 0 \leq z \leq 15 \wedge y = 0$

7.4. O centro da esfera é $C(15, 15, z)$



$$R^2 = (16-R)^2 + 8^2$$
$$\Leftrightarrow \cancel{R^2} = 256 - 32R + \cancel{R^2} + 64$$
$$\Leftrightarrow 32R = 320 \Leftrightarrow R = \frac{320}{32} = 10$$

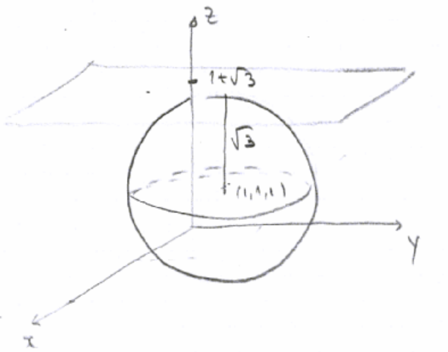
$B(15,15,15)$ então $\overline{AD} = 16$

então Raio é 10 e $16 - 10 = 6$ logo o centro é $C(15, 15, 15+6) = (15, 15, 21)$

A condição pedida é:

$$(x-15)^2 + (y-15)^2 + (z-21)^2 \leq 100 \wedge z \geq 15$$

8.1



Raio é $\sqrt{3}$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$

é a equação da S.E.

Um ponto que tem as três coordenadas iguais é da forma (a, a, a). Substituindo na equação da S.E vem:

$(a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-1)^2 = 3 \Leftrightarrow$

7

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + a^2 - 2a + 1 + a^2 - 2a + 1 = 3$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 6a + \cancel{3} = \cancel{3}$

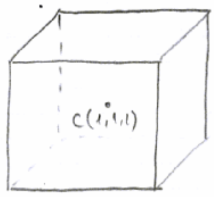
$\Leftrightarrow 3a^2 - 6a = 0$

$\Leftrightarrow a(3a - 6) \Leftrightarrow a = 0 \vee 3a - 6 = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2$

Logo as coordenadas dos pontos pedidos são $(0,0,0)$ e $(2,2,2)$

8.3



O centro da S.E. também é o centro do cubo, logo o lado do cubo tem comprimento 2

então $V_{cubo} = 2^3 = 8$

9.

9.1 $P(1-a, a-2, \sqrt{5}) \in 3.^\circ$ octantes se e só se

$1-a < 0 \wedge a - 2 < 0 \wedge \underbrace{\sqrt{5} > 0}_{P.V.}$

$\Leftrightarrow -a < -1 \wedge a < 2$

$\Leftrightarrow a > 1 \wedge a < 2$

$\therefore a \in]1, 2[$

8

9.2 S.E : $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 5^2$

Substituindo $P(1-a, a-2, \sqrt{5})$ na equação da S.E. vem:

$$(\cancel{1}-a-\cancel{1})^2 + (a-2+4)^2 + (\sqrt{5})^2 = 25$$

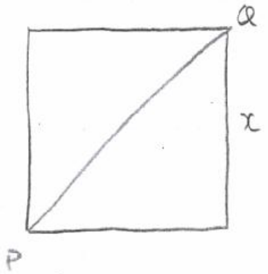
$$\Leftrightarrow a^2 + (a+2)^2 + 5 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 + 4a + 4 - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -4 \vee a = 2$$

9.3 Como Q é o ponto simétrico de P em relação ao eixo Oy então $Q(a-1, a-2, -\sqrt{5})$



$$A_{\square} = x^2 = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\sqrt{4a^2-8a+24}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(4a^2-8a+24)$$

$$= 2a^2 - 4a + 12$$

Pelo Teorema de Pitágoras.

$$x^2 + x^2 = \overline{PQ}^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = \overline{PQ}^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a-a+1)^2 + (\cancel{a}-2-\cancel{a}+2)^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{(2-2a)^2 + 4\times 5} = \sqrt{4-8a+4a^2+20} = \sqrt{4a^2-8a+24}$$

9

10. $x^2+y^2+z^2-4x-4y-16z=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-4y+z^2-16z=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=4+4+64$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=72$

Logo $V(2,2,8)$ e $A(4,0,0)$; $B(4,4,0)$ e $C(0,4,0)$

De facto $A(x,0,0)$ e pertence à S.E. Substituindo vem:

$x^2+0^2+0^2-4x-4\times 0-16\times 0=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=4 \Rightarrow A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$ e $C(0,4,0)$

10.1

$$V_{[VOABC]}=\frac{1}{3}A_{[OABC]}\times \text{altura}$$

$$=\frac{1}{3}\times 4\times 4\times 8=\frac{128}{3}$$

10.2

Temos que:

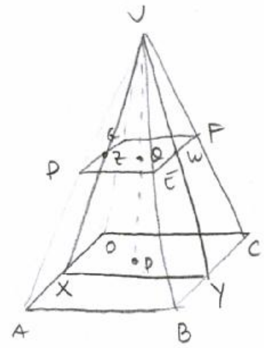
$$\underbrace{\frac{V_{[VOABC]}}{V_{[VDEFG]}}}_{R^3}=8 \Leftrightarrow R^3=8 \Leftrightarrow R=\sqrt[3]{8}=2$$

Assim: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=2 \Leftrightarrow 4=2\times\overline{DE}$

$\Leftrightarrow \overline{DE}=2$

10

DA mesma forma



$$\frac{\overline{PV}}{\overline{VQ}} = 2 \Leftrightarrow 8 = 2\overline{VQ}$$
$$\Leftrightarrow \overline{VQ} = 4$$

e $\overline{PQ} = 2$

então $D(3,1,4)$; $E(3,1,4)$

$F(1,3,4)$ e $G(1,1,4)$

10.3 Centro $(2,2,2)$, Raio $= 2$

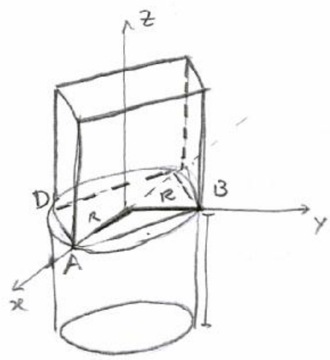
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \leq 4$$

10.4 A linha que o ponto V descreve em torno da aresta [AC] é uma circunferência de centro $M(2,0,0)$ e raio $\overline{MV}$ contida no plano $x=2$

$$\overline{MV} = \sqrt{(2-2)^2+(0-2)^2+(0-8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

A condição pedida é $(x-2)^2+y^2+z^2 = 68 \wedge x = 2$

11.1



$$V_{cilindro} = \pi R^2 \times \overline{AB}$$

$$V_{cubo} = \overline{AB}^3$$

$$\overline{AB}^2 = R^2 + R^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2R^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{2R^2} \Rightarrow \overline{AB} = R\sqrt{2}$$

$\overline{AB} > 0$ e $R > 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}}$$

11

$$V_{sólido} = 32(\pi + 2) \Leftrightarrow \pi R^2 \times \overline{AB} + \overline{AB}^3 = 32(\pi + 2)$$

$$\Leftrightarrow \pi \times \left(\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \overline{AB} + \overline{AB}^3 = 32(\pi + 2)$$

$$\Leftrightarrow \pi \times \frac{\overline{AB}^2}{2} \times \overline{AB} + \overline{AB}^3 = 32(\pi + 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \overline{AB}^3 + \underset{(2)}{\overline{AB}^3} = \underset{(2)}{32}(\pi + 2)$$

$$\Leftrightarrow \pi \overline{AB}^3 + 2\overline{AB}^2 = 64(\pi + 2)$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^3 \cancel{(\pi + 2)} = 64 \cancel{(\pi + 2)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^3 = 64$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt[3]{64} = 4$$

11.2 Ora $\overline{AB} = R\sqrt{2} \Leftrightarrow R = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{2}$

Então $A(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, 2\sqrt{2}, 0)$, $C(-2\sqrt{2}, 0, 0)$, $D(0, -2\sqrt{2}, 0)$

$E(2\sqrt{2}, 0, 4)$, $F(0, 2\sqrt{2}, 4)$, $G(-2\sqrt{2}, 0, 4)$ e $H(0, -2\sqrt{2}, 4)$

11.3

11.3.1 $[DH]: \ y = -2\sqrt{2} \wedge x = 0 \wedge 0 \leq z \leq 4$

11.3.2 $x^2 + y^2 + (z+4)^2 \leq 8 \wedge z = -4$

12

11.4

$$x^2 + (\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 6$$

$$\underset{x>0}{\Rightarrow} x = \sqrt{6}$$

$$y^2 = 2^2 + 2^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 8 \underset{y>0}{\Rightarrow} y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$A_{total} = 4 \times 2\sqrt{6} + 4 \times 2\sqrt{8} = 8\sqrt{6} + 8\sqrt{8}$$