Matemática A – 10º ano
Itens do GAVE – Proposta de Resolução – Março de 2010

1

1.1 Se o triângulo [ABC] é rectângulo, $\overline{AB}=30$ e $\overline{BC}=40$, então, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=30^2+40^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=900+1600 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2=2500 \Leftrightarrow \overline{AC}=\sqrt{2500} \Leftrightarrow \overline{AC}=50$$

1.2 Os triângulos [ABC] e [BDC] são semelhantes logo:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{50}{40}=\frac{30}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD}=\frac{30\times 40}{50} \Leftrightarrow \overline{BD}=24$$

Também se tem que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \frac{30}{24}=\frac{40}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overline{DC}=\frac{40\times 24}{30} \Leftrightarrow \overline{DC}=32$$

Então: $\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{DC} \Leftrightarrow \overline{AD}=50-32 \Leftrightarrow \overline{AD}=18$

1.3 Os triângulos [APQ] e [ADB] são semelhantes, logo:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{x}{18}=\frac{\overline{PQ}}{24} \Leftrightarrow \overline{PQ}=\frac{24x}{18} \Leftrightarrow \overline{PQ}=\frac{4}{3}x$$

Os triângulos [BDC] e [RSC] são semelhantes, logo:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{RS}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{SC}} \Leftrightarrow \frac{24}{\frac{4x}{3}}=\frac{32}{\overline{SC}} \Leftrightarrow 24\times\overline{SC}=32\times\frac{4}{3}x \Leftrightarrow 24\times\overline{SC}=\frac{128}{3}x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{SC}=\frac{\frac{128}{3}x}{24} \Leftrightarrow \overline{SC}=\frac{128}{72}x \Leftrightarrow \overline{SC}=\frac{16}{9}x$$

1.4.1

$D_f=]0;18[$

1.4.2 $f(x)=c\times l \Leftrightarrow f(x)=\overline{PS}\times\overline{PQ} \Leftrightarrow f(x)=(\overline{AC}-\overline{AP}-\overline{SC})\times\frac{4}{3}x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)=\left(50-x-\frac{16}{9}x\right)\times\frac{4}{3}x \Leftrightarrow f(x)=\frac{200}{3_{(9)}}x-\frac{4}{3_{(9)}}x^2-\frac{64}{27}x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1800x-36x^2-64x^2}{27} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1800x-100x^2}{27}$$

1.4.3 zeros de f:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1800}{27}x-\frac{100}{27}x^2=0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{100}{27}x+\frac{1800}{27}\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee -\frac{100}{27}x+\frac{1800}{27}=0 \Leftrightarrow x=0 \vee -100x=-1800 \Leftrightarrow x=0 \vee x=18$$

$$\left.\begin{array}{l} x_V=\frac{0+18}{2}=9 \\ y_V=f(9)=\frac{1800\times 9-100\times 9^2}{27}=300 \end{array}\right\} V(9,300)$$

Como a concavidade da parábola é virada para baixo, $x_v=9$ é o maximizante de f e 300 é o máximo.

Se $x=9$, as dimensões do rectângulo de maior área são:

$$b=\overline{PS}=\overline{AC}-\overline{AP}-\overline{SC}=50-9-\frac{16}{9}\times 9=25$$

$$l=\overline{PQ}=\frac{4}{3}\times 9=\frac{36}{3}=12$$

1.5.1

$D_g=]0;18[$

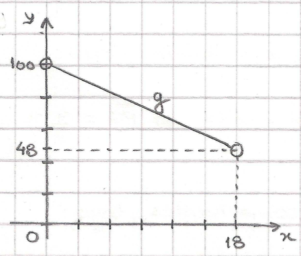
1.5.2

$$g(x)=2\times\overline{PS}+2\times\overline{PQ}\Leftrightarrow g(x)=2\times\left(50-x-\frac{16}{9}x\right)+2\times\frac{4}{3}x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=100-\underset{(9)}{2x}-\underset{(1)}{\frac{32}{9}}x+\underset{(3)}{\frac{8}{3}}x\Leftrightarrow g(x)=100-\frac{18}{9}x-\frac{32}{9}x+\frac{24}{9}x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=100-\frac{26}{9}x$$

1.5.3



1.5.4 $D'_g=]48;100[$

2

2.1 $D_f=]0;8[$

2.2 $f(x)=\frac{b\times a}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\overline{QP}\times\overline{PB}}{2}$

Como os triângulos [ABC] e [QPC] são semelhantes e o triângulo [ABC] é isósceles, o triângulo [QPC] também será e $\overline{QP}=\overline{CP}=x$

Então:

$$f(x)=\frac{x\times(8-x)}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{8x-x^2}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{8}{2}x-\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$$

2.3

zeros de f:

$$f(x)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+4x=0\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{2}x+4\right)=0\Leftrightarrow x=0 \vee -\frac{1}{2}x+4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee -\frac{1}{2}x=-4\Leftrightarrow x=0 \vee x=8$$

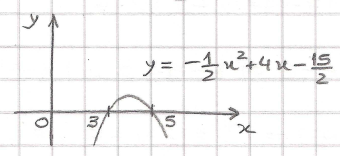
$$\left.\begin{array}{l} x_v=\frac{0+8}{2}=4 \\ y_v=f(4)=-\frac{1}{2}\times 4^2+4\times 4=8 \end{array}\right\} V(4,8)$$

Como a concavidade da parábola é virada para baixo, $x_v=4$ é o maximizante de f e 8 é o máximo.

Se $x=4=\overline{QP}$ então $\overline{PB}=8-4=4$ e o triângulo [PBQ] de maior área é isósceles.

2.4 $f(x) < \frac{15}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 4x < \frac{15}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{15}{2} < 0$

CA: $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 5$



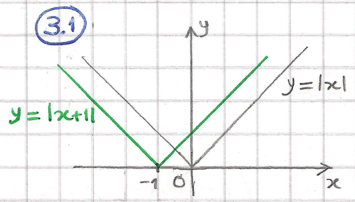
$-\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{15}{2} < 0 \Leftrightarrow x < 3 \vee x > 5$

Como $D_f =]0;18[$, $x \in]0;3[\cup]5;8[$

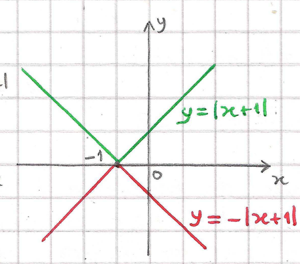
3 $j(x) = -|x+1| + 3$

$D_j = \mathbb{R}$

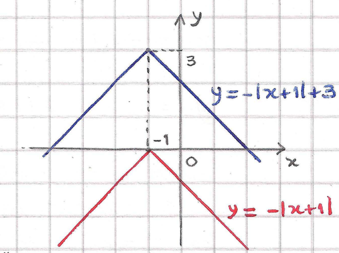
3.1



"Deslocamento" horizontal 1 unidade para a esquerda



Simetria relativamente ao eixo Ox

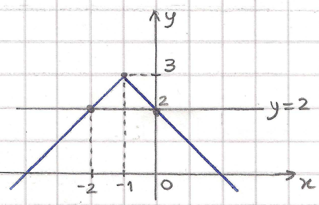


"Deslocamento" vertical 3 unidades para cima

3.2 $j(x) > 2 \Leftrightarrow -|x+1| + 3 > 2 \Leftrightarrow -|x+1| > 2 - 3 \Leftrightarrow -|x+1| > -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x+1| < 1 \Leftrightarrow x+1 < 1 \wedge x+1 > -1 \Leftrightarrow x < 1-1 \wedge x > -1-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x < 0 \wedge x > -2$

CS $=]-2;0[$

3.3



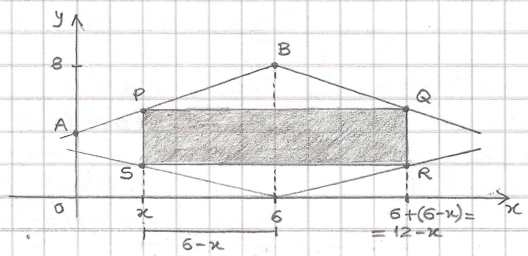
CS $=]-2;0[$

4

4.1 $B(6,8) \rightarrow$ o ponto B é o vértice do gráfico de f

Como $x_A = 0$ e $x_B = 6$, $D_h = [0,6[$

4.2



$\overline{SR} = (12-x) - x = 12 - 2x$

$h(x) = \overline{SR} \times \overline{PS} \Leftrightarrow h(x) = (12-2x) \times \overline{PS}$

$\overline{PS} = f(x) - g(x) \Leftrightarrow \overline{PS} = -\frac{2}{3}|x-6| + 8 - \frac{1}{3}|x-6|$

Como $x<6$ então $x-6<6-6 \Leftrightarrow x-6<0$ e $|x-6| = -x+6$.

Então:

$\overline{PS} = -\frac{2}{3}(-x+6) + 8 - \frac{1}{3}(-x+6) \Leftrightarrow \overline{PS} = \frac{2}{3}x - \frac{12}{3} + 8 + \frac{1}{3}x - \frac{6}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{PS} = \frac{3}{3}x - 4 + 8 - 2 \Leftrightarrow \overline{PS} = x+2$

Assim $h(x) = (12-2x) \times (x+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x) = 12x + 24 - 2x^2 - 4x \Leftrightarrow h(x) = 24 + 8x - 2x^2$

4.3 zeros de h:

$h(x) = 0 \Leftrightarrow 24 + 8x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 6$

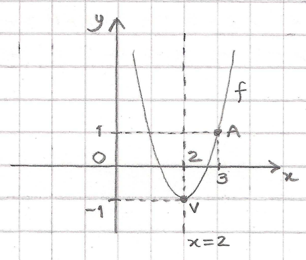
$$\left.\begin{array}{l} x_V = \frac{-2+6}{2} \Leftrightarrow x_V = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x_V = 2 \\ y_V = h(2) = 24 + 8 \times 2 - 2 \times 2^2 = 32 \end{array}\right\} V(2,32)$$

Como a concavidade da parábola é virada para baixo, $x_V = 2$ é o maximizante de h e 32 é o máximo.

Se $x=2$, $\overline{SR} = 12 - 2 \times 2 \Leftrightarrow \overline{SR} = 8$ e $\overline{PS} = 2+2 \Leftrightarrow \overline{PS} = 4$, ou seja, as dimensões do rectângulo que tem maior área são 8 e 4.

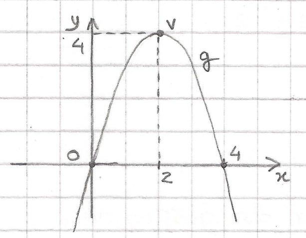
5

5.1



$D' = [-1; +\infty[$

5.2



$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,4]$

5.3

f: $V(2,-1)$

$f(x) = a(x-2)^2 - 1$

Ponto $A(3,1)$:

$f(3) = 1 \Leftrightarrow a(3-2)^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 2$

Logo: $f(x) = 2(x-2)^2 - 1$

g: zeros: 0 e 4

$g(x) = a(x-0)(x-4)$

$g(x) = a.x.(x-4)$

Ponto $V(2,4)$:

$g(2) = 4 \Leftrightarrow a.2.(2-4) = 4 \Leftrightarrow$

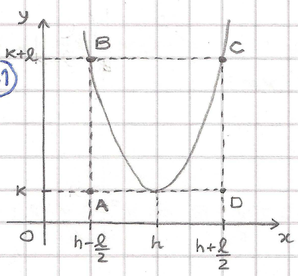
$\Leftrightarrow -4a = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = -1$

Logo: $g(x) = -x(x-4)$

6

6.1



Se o vértice $V(h,k)$ é o ponto médio de $[AD]$ e ℓ é a medida do lado do quadrado do $[ABCD]$, então $x_D = h+\frac{\ell}{2}$

Se $f(h)=k$ então $f(h+\frac{\ell}{2})=k+\ell$

Então:

$$f(h+\tfrac{\ell}{2})=k+\ell \Leftrightarrow a(\cancel{h}+\tfrac{\ell}{2}-\cancel{h})^2+k=k+\ell \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=k+\ell-k \Leftrightarrow a.\left(\frac{1}{2}\ell\right)^2=\ell \Leftrightarrow a.\frac{1}{4}.\ell-\ell=0 \Leftrightarrow \ell\left(a.\frac{1}{4}\ell-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

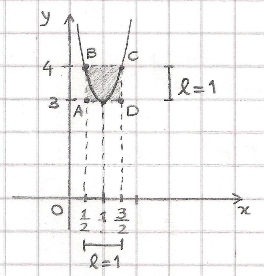
$$\Leftrightarrow \underbrace{\ell=0}_{\text{Equação impossível}} \vee \frac{1}{4}a\ell-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}a\ell=1 \Leftrightarrow a\ell=4 \Leftrightarrow \ell=\frac{4}{a}$$

6.2

$$f(x)=4x^2-8x+7 \Leftrightarrow f(x)=4(x^2-2x)+7 \Leftrightarrow f(x)=4(x^2-2x+1-1)+7$$

$$\Leftrightarrow f(x)=4(x^2-2x+1)-4+7 \Leftrightarrow f(x)=4(x-1)^2+3$$

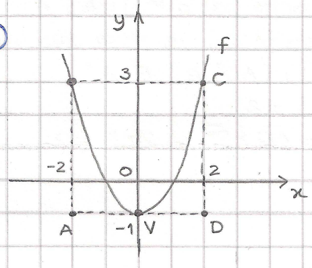
Então o vértice da parábola tem coordenadas $(1,3)$ e $\ell=\frac{4}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ell=1.$



$A(\frac{1}{2},3)$ e $D(\frac{3}{2},3)$

$B(\frac{1}{2},4)$ e $C(\frac{3}{2},4)$

6.3



$V(0,-1)$ logo $h=0$
$k=-1$

$\ell=4 \Leftrightarrow \frac{4}{a}=4 \Leftrightarrow a=\frac{4}{4} \Leftrightarrow a=1$

Então $f(x)=1(x-0)^2-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)=x^2-1$

7

7.1 Coordenadas do ponto A, vértice da parábola:

$f(x)=11 \Leftrightarrow x^2-6x+11=11 \Leftrightarrow x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x-6)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee$
$\vee\ x-6=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=6$

$$\left.\begin{array}{l} x_V=\dfrac{0+6}{2}=3 \\ y_V=f(3)=3^2-6\times3+11=2 \end{array}\right\} V(3,2) \text{ ou seja } A(3,2)$$

Recta r: $y=1x+b$
$A(3,2)$: $2=3+b \Leftrightarrow b=-1$
$r: y=x-1$

Recta t: $y=-2x+b$
$A(3,2)$: $2=-2\times3+b \Leftrightarrow 2=-6+b \Leftrightarrow b=8$
$t: y=-2x+8$

Ponto B: $f(x) = x-1 \Leftrightarrow x^2-6x+11 = x-1 \Leftrightarrow x^2-6x-x+11+1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow x=4 \vee x=3$
$y_B = f(4) = 4^2-6\times4+11 = 3$
Então $B(4,3)$

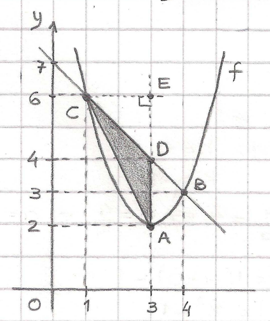
Ponto C: $f(x) = -2x+8 \Leftrightarrow x^2-6x+11 = -2x+8 \Leftrightarrow x^2-6x+2x+11-8=0$
$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=3 \vee x=1$
$y_C = f(1) = 1^2-6\times1+11 = 6$
Então $C(1,6)$

$\overline{AC} = \sqrt{(3-1)^2+(2-6)^2} = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$
$\overline{AB} = \sqrt{(3-4)^2+(2-3)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$\overline{BC} = \sqrt{(4-1)^2+(3-6)^2} = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$\overline{AC}^2 \overset{?}{=} \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \sqrt{20}^2 \overset{?}{=} \sqrt{2}^2 + \sqrt{18}^2 \Leftrightarrow 20 \overset{?}{=} 2+18 \Leftrightarrow 20 \overset{?}{=} 20$
Proposição verdadeira logo o $\Delta[ABC]$ é rectângulo.

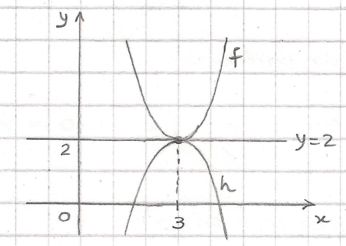
7.2 Se D pertence ao eixo de simetria da parábola então $x_D=3$
Recta CB:
$\overrightarrow{CB} = B-C = (4,3)-(1,6) = (3,-3)$ logo $m_{CB} = \frac{-3}{3} = -1$

CB: $y = -1x+b$
$C(1,6)$: $6 = -1\times1+b \Leftrightarrow 6 = -1+b \Leftrightarrow b=7$
Então CB: $y = -x+7$
Se o ponto D pertence ao segmento [CB] e $x_D=3$:
$y = -3+7 \Leftrightarrow y=4$ e $D(3,4)$



Seja E o ponto tal que [CE] é a altura do triângulo [ACD] relativa ao lado [AD]
Então $[CE] \perp [AD]$ e $E(3,6)$
$\overline{AD} = 2$ e $\overline{CE} = 2$
Logo $A = \frac{\overline{AD} \times \overline{CE}}{2} = \frac{2\times2}{2} = 2$

7.3



vértice $V(3,2)$
Se a concavidade da parábola gráfico de f era virada para cima e $a=1$, então a concavidade da parábola gráfico de h é virada para baixo e $a=-1$
Então $h(x) = -1(x-3)^2+2$

8

8.1 $x = 9{,}15\text{ m} \longrightarrow f(9{,}15) = 0{,}32\times9{,}15 - 0{,}01\times9{,}15^2$
$f(9{,}15) \simeq 2{,}09\text{ m}$ $\longrightarrow$ como o jogador mais alto da barreira tem 1,95 metros de altura, significa que a bola passa por cima da barreira.

$x = 25\,m \longrightarrow f(25) = 0{,}32 \times 25 - 0{,}01 \times 25^2$

$f(25) = 1{,}75\ m$ → como a barra da baliza está a 2,44 metros do chão, significa que a bola passa por baixo dela, ou seja, entra na baliza.

Conclusão: É golo!

8.2 zeros de f:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 0{,}32x - 0{,}01x^2 = 0 \Leftrightarrow x(-0{,}01x + 0{,}32) = 0 \Leftrightarrow$

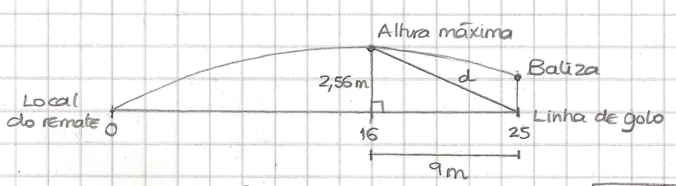
$\Leftrightarrow x = 0 \lor -0{,}01x + 0{,}32 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 32$

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{0+32}{2} = 16 \\ y_v = f(16) = 0{,}32 \times 16 - 0{,}01 \times 16^2 = 2{,}56 \end{array}\right\} V(16; 2{,}56)$$

Como a parábola tem a concavidade virada para baixo, $x_v = 16$ é o maximizante de f e 2,56 é o máximo, ou seja, a altura máxima atingida pela bola é 2,56 metros

8.3 Se o maximizante é 16 então a bola atinge a altura máxima a 16 metros do local onde é rematada.



$d^2 = 2{,}56^2 + 9^2 \Leftrightarrow d^2 = 87{,}5536 \Leftrightarrow d = \sqrt{87{,}5536} \Leftrightarrow d \approx 9{,}4\,m$