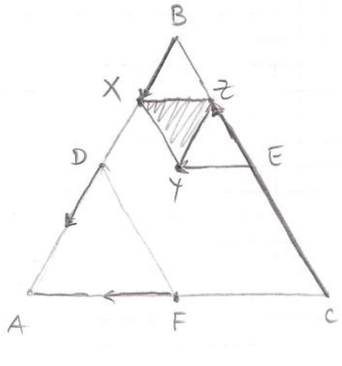
3.º Conjunto de Problemas do GAVE 10.º Ano Dezembro 2009

1.



$$X = B - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

Repare que $\overrightarrow{BX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

$$Y = C - \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$$
$$= C + \overrightarrow{FD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$$
$$= C + \overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$$
$$= E + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$$

$$Z = A - 2\left(\overrightarrow{CF} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}\right)$$
$$= A - 2\overrightarrow{CF} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DF}$$
$$= A + 2\overrightarrow{FC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FD}$$
$$= A + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FD}$$
$$= C + \frac{3}{2}\overrightarrow{CE}$$

Ora os triângulos [ABC] e [XYZ] são equiláteros e

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{BC}} = \frac{1}{4} \quad \text{logo}$$

$$\frac{A_{[XYZ]}}{A_{[ABC]}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_{[XYZ]}}{16} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{[XYZ]} = \frac{1}{16} \times 16 = 1$$

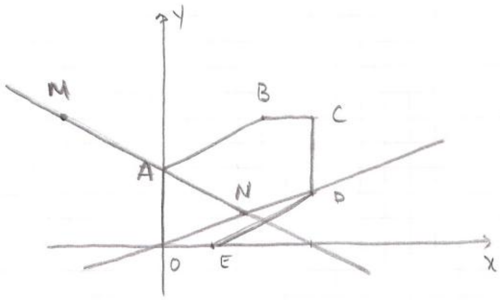
2.

2.1 O ponto C tem a mesma abcissa que o ponto D e a mesma ordenada que o ponto B, logo $C(6, 5)$ e assim $\overline{BC} = 2 = \overline{OE}$ e $\overline{DC} = 3 = \overline{OA}$

logo $E(2, 0)$ e $A(0, 3)$

1

2.2 $M(-4, 5)$



N é o ponto de intersecção das rectas OD e MA

i) $\vec{OD} = D - O = (6,2) - (0,0) = (6,2)$

Logo $m_{OD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ então $OD: y = \frac{1}{3}x + b$

Como $(0,0) \in OD$ sub. vem: $0 = \frac{1}{3} \times 0 + b$
$\Leftrightarrow b = 0$

$\therefore OD: y = \frac{1}{3}x$

ii) $\vec{AM} = M - A = (-4, 5) - (0, 3) = (-4, 2)$

Logo $m_{AM} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ então $y = -\frac{1}{2}x + b$

como $A(0,3) \in MA$ sub vem: $3 = -\frac{1}{2} \times 0 + b \Leftrightarrow b = 3$

$\therefore MA: y = -\frac{1}{2}x + 3$

iii)
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ \underset{(2)}{\frac{1}{3}x} = \underset{(3)}{-\frac{1}{2}x} + \underset{(6)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 2x = -3x + 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 5x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \times \frac{18}{5} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} \\ x = \frac{18}{5} \end{cases} \quad \therefore N\left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

2

2.3 1) Primeiro definimos a recta ED.

$\overrightarrow{ED} = D - E = (6,2) - (2,0) =$
$= (4,2)$

Logo $m_{ED} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ então $ED: y = \frac{1}{2}x + b$

Como $E(2,0) \in ED$ sub. vem: $0 = \frac{1}{2} \times 2 + b$
$\Leftrightarrow 0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

$\therefore ED: y = \frac{1}{2}x - 1$

Logo $[ED]: y = \frac{1}{2}x - 1 \wedge 2 \leq x \leq 6$

2.4. Só nos falta definir a recta AB. Mas $AB // ED$

Logo $m_{AB} = m_{ED} = \frac{1}{2}$ então $AB: y = \frac{1}{2}x + b$

Como $A(0,3) \in AB$ sub vem: $3 = \frac{1}{2} \times 0 + b \Leftrightarrow b = 3$

Logo $AB: y = \frac{1}{2}x + 3$

A condição é

$y < \frac{1}{2}x + 3 \wedge y > \frac{1}{2}x - 1 \wedge 0 < x < 6 \wedge 0 < y < 5$

3.

3.1 1) Como O é o ponto médio de [AC] então C é simétrico de A em relação à origem. Logo se $A(a,b)$ então $C(-a,-b)$

3

Além disso $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$\Leftrightarrow (-2a,-2b) = (10,2) + (-6,-8)$

$\Leftrightarrow (-2a,-2b) = (4,-6)$

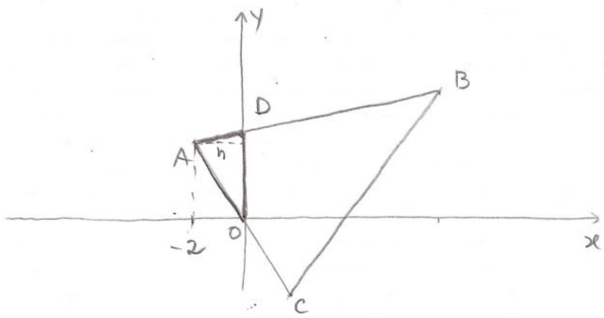
$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 4 \\ -2b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$

$\vec{AC} = C - A$
$= (-a,-b) - (a,b)$
$= (-2a,-2b)$

Logo $A(-2,3)$ e $C(2,-3)$

3.2. Ora $B = A + \vec{AB}$
$= (-2,3) + (10,2) = (8,5)$

3.3.



$A_{[AOD]} = \frac{\overline{OD} \times h}{2}$

Ora $h = 2$ então

$A_{[AOD]} = \frac{\overline{OD} \times \cancel{2}}{\cancel{2}} = \overline{OD}$

Temos que $\vec{AB} = (10,2)$ logo $m_{AB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

então $AB: y = \frac{1}{5}x + b$ Como $A(-2,3) \in AB$ sub vem:

$3 = \frac{1}{5} \times (-2) + b \Leftrightarrow 3 = -\frac{2}{5} + b$

$\therefore AB: y = \frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

$\Leftrightarrow 3 + \frac{2}{5} = b \Leftrightarrow b = \frac{17}{5}$

4

Assim $D(0,y) \in AB$ sub. vem $y = \frac{1}{5} \times 0 + \frac{17}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{17}{5}$ então $D\left(0, \frac{17}{5}\right)$

(Podia ser feito com o sistema $\begin{cases} y = \frac{1}{5}x + \frac{17}{5} \\ x = 0 \end{cases}$)

Logo $A_{[AOD]} = \overline{OD} = \frac{17}{5}$ //

3.4.

Centro $M_{[AB]} = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (3, 4)$

raio $= \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{10^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{100+4}}{2} = \frac{\sqrt{104}}{2}$

então uma equação de circunferência de diâmetro [AB] é: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{\sqrt{104}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{104}{4} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 26$

Sub. (0,0) na equação vem: $(0-3)^2 + (0-4)^2 = 26$

$\Leftrightarrow 9 + 16 = 26$

$\Leftrightarrow 25 = 26$ P.F

Como $25 < 26$, o ponto $(0,0)$ (origem) está no interior da circunferência.

5

4.

4.1.

i) $\begin{cases} y = ax + b \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = ax + b \\ \text{---} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a} \\ \text{---} \end{cases}$ logo $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

ii) $\begin{cases} y = ax + b \\ y = -2ax + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ ax + \cancel{b} = -2ax + \cancel{b} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 3ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a \times 0 + b \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = b \\ x = 0 \end{cases}$ logo $B(0, b)$

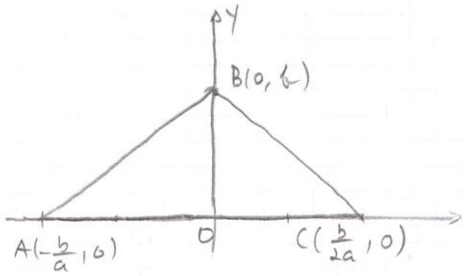
iii) $\begin{cases} y = -2ax + b \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2ax + b \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax = b \\ \text{---} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{2a} \\ y = 0 \end{cases}$ Logo $C\left(\frac{b}{2a}, 0\right)$

Como $a > 0$ e $b > 0$ então $-\frac{b}{a} < 0$ e $\frac{b}{2a} > 0$.

Logo: $\overrightarrow{\text{v.s.f.f}}$

6



$\overline{AC} = \frac{b}{a}_{(2)} + \frac{b}{2a} = \frac{3b}{2a}$

$\overline{OB} = b$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\frac{3b}{2a} \times b}{2} = \frac{3b^2}{4a}$$ //

4.2

$$A_{[ABC]} = 225 \Leftrightarrow \frac{3b^2}{4a} = 225$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{a} = 300 \Leftrightarrow b^2 = 300a$$

além disso como $(3,4)$ é paralelo a um dos lados só pode ser a $\overrightarrow{AB}$ assim $\overrightarrow{AB} = k(3,4)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,b) - (-\frac{b}{a}, 0) = (\frac{b}{a}, b)$

logo $(\frac{b}{a}, b) = k(3,4) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = 3k \\ b = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4k}{a} = 3k \\ \text{———} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 3k\,a \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 4k \end{cases}$

mas como $b^2 = 300a$ vem $b^2 = 300 \times \frac{4}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 = 400 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{400} \underset{b>0}{\Longrightarrow} b = 20$

7

logo $\begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 20 \end{cases}$ e assim $A\left(-\frac{20}{\frac{4}{3}}, 0\right) = \left(-\frac{20 \times 3}{4}, 0\right)$

$= (-15, 0)$

$B(0, 20)$ e $C\left(\frac{20}{2 \times \frac{4}{3}}, 0\right) = \left(\frac{20 \times 3}{8}, 0\right)$

$= \frac{15}{2}$

Assim $P_{[ABC]} = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 15 + \frac{15}{2}$

$= \frac{45}{2}$

$= \underset{(2)}{25} + \frac{45}{2} + \frac{5\sqrt{73}}{2}$

$= \frac{95 + 5\sqrt{73}}{2}$

C.A.

$\overrightarrow{AB} = B - A$

$= (0, 20) - (-15, 0)$

$= (15, 20)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$

$\overrightarrow{BC} = C - B =$

$= \left(\frac{15}{2}, 0\right) - (0, 20)$

$= \left(\frac{15}{2}, -20\right)$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + (-20)^2}$

$= \sqrt{\frac{1825}{4}} =$

$= \frac{\sqrt{1825}}{2} = \frac{5\sqrt{73}}{2}$

1825	5
365	5
73	73
1	

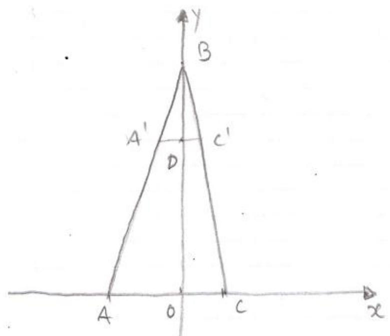
8

4.3 i) Se $a=3$ e $b=9$ então $A_{[ABC]} = \frac{3\times 9^2}{4\times 3} = \frac{81}{4}$

Como $A_{[AA'C'C]} = \frac{8}{9} A_{[ABC]}$ então $A_{[AA'C']} = \frac{1}{9} A_{[ABC]}$

$\Leftrightarrow \frac{A_{[AA'C']}}{A_{[ABC]}} = \frac{1}{9}$

Além disso $\Delta[ABC]$ e $\Delta[AA'C']$ são semelhantes, pois têm dois ângulos iguais, ABC é comum e BAC e $BA'C'$ são ângulos de lados paralelos.



$B(0,9)$; $A(-\frac{9}{3}, 0) = (-3,0)$
$C(\frac{3}{2}, 0)$

então $\frac{\overline{BD}}{\overline{BO}} = R$ onde $R^2 = \frac{1}{9}$

$\Downarrow$

$R = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{9} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{1}{3} \times 9 \Leftrightarrow \overline{BD} = 3$

Logo $\overline{OD} = 6$ e assim a recta $A'C'$ tem de equação:
$y=6$.

ii) $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,9) - (-3,0) = (3,9)$ logo $m_{AB} = \frac{9}{3} = 3$

então $AB: y = 3x + b$, como $B(0,9) \in AB$, sub vem: $9 = 3\times 0 + b \Leftrightarrow b = 9$.

$\therefore AB: y = 3x + 9$

$$\begin{cases} y = 3x + 9 \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3x + 9 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3x \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases}$$ logo $A'(-1, 6)$

iii) $\overrightarrow{CB} = B - C = (0, 9) - \left(\frac{3}{2}, 0\right) = \left(-\frac{3}{2}, 9\right)$ então $m_{BC} = \frac{9}{-\frac{3}{2}} = -6$

logo $BC: y = -6x + b$, como $B(0, 9) \in BC$ sub. vem:

$9 = -6 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 9$

$\therefore BC: y = -6x + 9$

$$\begin{cases} y = -6x + 9 \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -6x + 9 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -6x \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{-6} = \frac{1}{2} \\ y = 6 \end{cases}$$ logo $C'\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ //

5\. i) Como P é o ponto médio de [AB] então $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$

e $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP}$

Como Q é o ponto médio de [BC] então $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}$

e $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{QC}$

Da mesma forma $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AS}$ $(\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SD})$ e $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CR}$ $(\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{RD})$

10

ii) Temos que : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

$= 2\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{AS}$

$= 2(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS}) = 2\overrightarrow{PS}$

Logo $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Por outro lado $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= 2\overrightarrow{QC} + 2\overrightarrow{CR}$

$= 2(\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR}) = 2\overrightarrow{QR}$

Logo $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

então $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

iii) Temos que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{BQ}$

$= 2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}) = 2\overrightarrow{PQ}$

Logo $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Por outro lado $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$= 2\overrightarrow{SD} + 2\overrightarrow{DR}$

$= 2(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}) = 2\overrightarrow{SR}$

Logo $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

então $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ [PQRS] é um paralelogramo

5.2

i) $S = P + \overrightarrow{PS} = P + \overrightarrow{QR}$

$= (2,4) + (0,-4)$

$= (2,0)$

$\overrightarrow{QR} = R - Q =$

$= (6,3) - (6,7)$

$= (0,-4)$

11

(ii) $B = A + \overrightarrow{AB} = A + 2\,\overrightarrow{AP}$

$= (0,2) + 2(2,2)$

$= (0,2) + (4,4)$

$= (4,6)$

$\overrightarrow{AP} = P - A$

$= (2,4) - (0,2)$

$= (2,2)$

$C = B + \overrightarrow{BC} = B + 2\,\overrightarrow{BQ}$

$= (4,6) + 2(2,1)$

$= (4,6) + (4,2)$

$= (8,8)$

$\overrightarrow{BQ} = Q - B$

$= (6,7) - (4,6)$

$= (2,1)$

$D = C + \overrightarrow{CD} = C + 2\,\overrightarrow{CR}$

$= (8,8) + 2(-2,-5)$

$= (8,8) + (-4,-10)$

$= (4,-2)$

$\overrightarrow{CR} = R - C$

$= (6,3) - (8,8)$

$= (-2,-5)$

6.

6.1

i) $D = A + \overrightarrow{AD}$

$= A + \overrightarrow{BC}$

$= (-1,-2) + (12,8)$

$= (11,6)$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = C - B$

$= (8,10) - (-4,2)$

$= (12,8)$

ii) $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9^2 + 12^2}$

$= \sqrt{225} = 15$

$\overrightarrow{AC} = C - A$

$= (8,10) - (-1,-2)$

$= (9,12)$

Como [ABCD] e [AEFG] são semelhantes a sua razão de semelhança é dada por $\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

12

assim $\frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{GF}} = \frac{3}{2}$ assim $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ e

$\overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GF}$

Logo $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{GF}$

$= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$

Logo $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Então $F = A + \overrightarrow{AF}$

$= A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$= (-1,-2) + \frac{2}{3}(9, 12)$

$= (-1,-2) + (6,8)$

$= (5,6)$ //

6.3 Ao fim de cinco minutos ambos os pontos se deslocam 5cm. Seja P o ponto que se desloca sobre $\dot{A}C$ e Q o ponto que se desloca sobre $\dot{A}B$.

i) como $\overline{AC} = 15$ então $P = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} =$

$= (-1,-2) + \frac{1}{3}(9,12)$

$= (-1,-2) + (3,4)$

$= (2,2)$

13

(ii) Que $\vec{AB} = B - A$
$= (-4, 2) - (-1, -2)$
$= (-3, 4)$

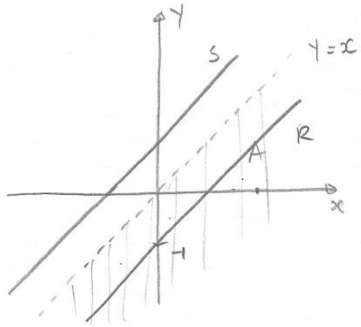
$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

então $d = B(-4, 2)$

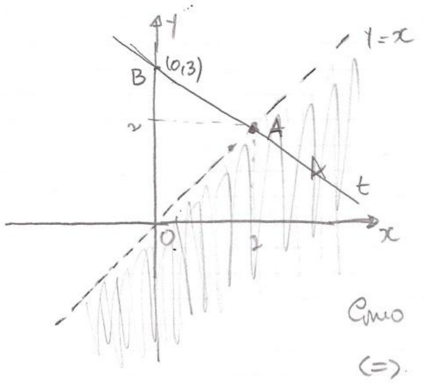
Logo $\overline{PQ} = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2}$
$= \sqrt{36} = 6$ //

$\vec{PQ} = Q - P$
$= (-4, 2) - (2, 2)$
$= (-6, 0)$

7.



7.1 . R: $y = x - 1$
S: $y = x + 1$



$A(2,2)$ $B(0,3)$

$\vec{AB} = B - A = (0,3) - (2,2)$
$= (-2, 1)$

$m_t = -\frac{1}{2}$ logo $t: y = -\frac{1}{2}x + b$

Como $A(2,2) \in t$ sub vem: $2 = -\frac{1}{2} \times 2 + b$
$\Leftrightarrow b = 3$, $\therefore y = -\frac{1}{2}x + 3$

14

7.2 $(k, 6-k) \in A \Leftrightarrow 6-k \geq k$

$\Leftrightarrow -k-k \geq -6$

$\Leftrightarrow -2k \geq -6$

$\Leftrightarrow k \leq 3$

Logo $k \in]-\infty, 3]$

8.1. Nas soluções.

8.2 $A(1,1,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-1,-1,1)$, $D(1,-1,1)$
$E(1,-1,-1)$, $F(-1,-1,-1)$, $G(-1,1,-1)$, $H(1,1,-1)$
$N(1,0,1)$, $M(1,-1,0)$ e $P(-1,0,1)$

$\overline{XW} = \overline{XB}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2} = \sqrt{12}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 12$

↓
elevando ao quadrado

Superfície esférica de centro em X e raio $\sqrt{12}$ (contém o ponto B)

$X = A + \overrightarrow{CG}$

$= (1,1,1) + (0,2,-2)$

$= (1,3,-1)$

C.A. $\overrightarrow{CG} = G - C =$

$= (-1,1,-1) - (-1,-1,1)$

$= (0,2,-2)$

$\overline{XB} = \sqrt{(-1-1)^2+(1-3)^2+(1+1)^2}$

$= \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$

8.3 $\overrightarrow{XD} = D - X = (1,-1,1) - (1,3,-1)$

$= (0,-4,2)$

então $XD: \ (x,y,z) = (1,3,-1) + \alpha(0,-4,2) \ , \alpha \in \mathbb{R}$

Fazendo a intersecção vem:

$$\begin{cases} (x,y,z) = (1,-1,-1) + k(0,1,1) \\ (x,y,z) = (1,3,-1) + \alpha(0,-4,2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + k \\ z = -1 + k \\ x = 1 \\ y = 3 - 4\alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y + 1 = k \\ z + 1 = k \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y + \cancel{1} = z + \cancel{1} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = z \\ \text{---} \\ \text{---} \\ y = 3 - 4\alpha \\ y = -1 + 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ -1 + 2\alpha = 3 - 4\alpha \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 6\alpha = 4 \\ \text{---} \end{cases}$$

16

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ y = z \\ k = 1 + z \\ \_\_\_ \\ \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ y = -1 + 2 \times \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = \frac{1}{3} \\ k = \frac{4}{3} \\ x = 1 \\ \alpha = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \therefore \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

8.4

$E(1, -1, -1)$

$$Y = X + \frac{1}{2}\overrightarrow{XF}$$

$$= (1, 3, -1) + \frac{1}{2}(-2, -4, 0)$$

$$= (1, 3, -1) + (-1, -2, 0)$$

$$= (0, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{XF} = F - X$$

$$= (-1, -1, -1) - (1, 3, -1)$$

$$= (-2, -4, 0)$$

$$Z = X + (\vec{u} + \overrightarrow{AC})$$

$$= (1, 3, -1) + (0, 1, 1) + (0, -1, 0) + (-2, -2, 0)$$

$$= (-1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{MN} = N - M$$

$$= (1, 0, 1) - (1, -1, 0)$$

$$= (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B$$

$$= (-1, 0, 1) - (-1, 1, 1)$$

$$= (0, -1, 0)$$

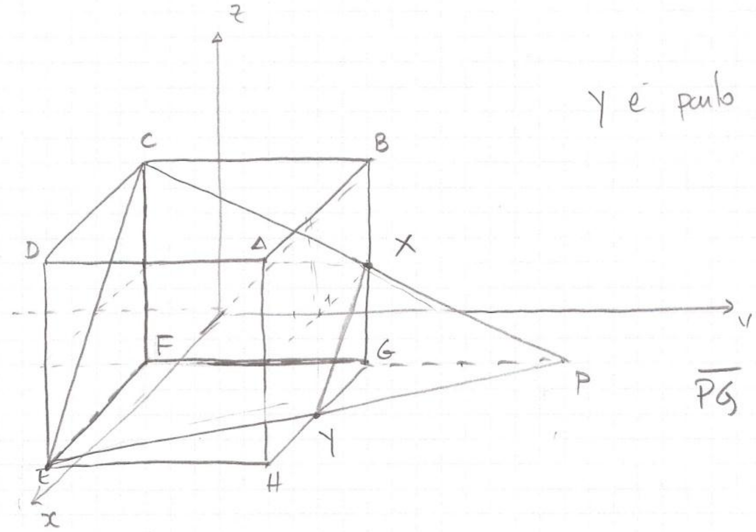
$$\overrightarrow{AC} = C - A$$

$$= (-1, -1, 1) - (1, 1, 1)$$

$$= (-2, -2, 0)$$

17

Y é ponto médio de [HG]



$\overline{PG} = 2$

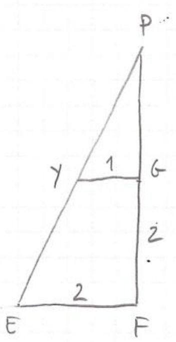
$$V_{pedido} = V_{[EFCP]} - V_{[YGXP]}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\overline{EF} \times \overline{FC}}{2} \times \overline{FP} - \frac{1}{3} \times \frac{\overline{YG} \times \overline{XG}}{2} \times \overline{GP}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2 \times \cancel{2}}{\cancel{2}} \times 4 - \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

NOTA



$\Delta[EFP]$ é semelhante ao $\Delta[YGP]$ (Justifica), então:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{YG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PG}+2}{\overline{PG}} = \frac{2}{1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{PG} + 2 = 2\overline{PG}$$

$$\Leftrightarrow -\overline{PG} = -2 \Leftrightarrow \overline{PG} = 2$$

18

9.

9.1 Como $G(10, 10, 10)$ então o lado do quadrado tem comprimento 10

Ora $[FG]$: $x = 10 \wedge 0 \leq y \leq 10 \wedge z = 10$

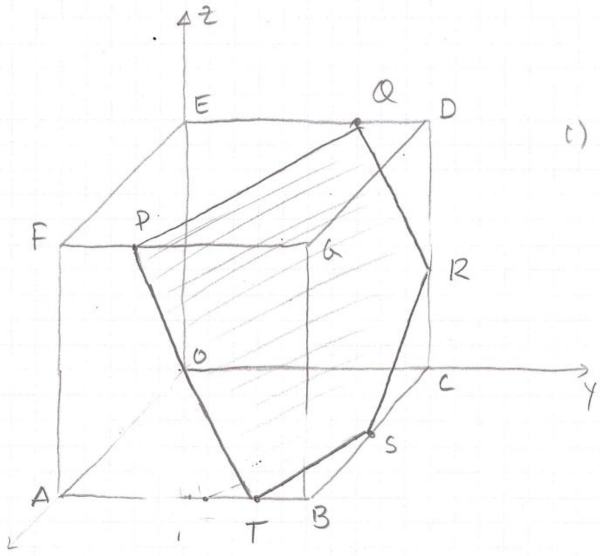
Como $P \in [FG]$ e tem ordenada 3 então $P(10, 3, 10)$

$[ED]$: $x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 10 \wedge z = 10$

Como $Q \in [ED]$ e tem ordenada 7 então $Q(0, 7, 10)$

$[BC]$: $0 \leq x \leq 10 \wedge y = 10 \wedge z = 0$

Como $S \in [BC]$ e tem abcissa 5 então $S(5, 10, 0)$



c) $\overrightarrow{QP} = P - Q =$

$= (10, 3, 10) - (0, 7, 10)$

$= (10, -4, 0)$

AB : $x = 10 \wedge z = 0$

T é o ponto de intersecção da recta AB com a recta que passa em S e é paralela a $\overrightarrow{PQ}$. Então:

$$\begin{cases} (x, y, z) = (5, 10, 0) + k(10, -4, 0) \\ x = 10 \wedge z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

19

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5+10k \\ y = 10-4k \\ z=0 \\ x=10 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 5+10k \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ y = 10 - 4\times\frac{1}{2} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y=8 \\ z=0 \\ x=10 \\ z=0 \end{cases}$$ Logo $T(10,8,0)$

ii) $\overrightarrow{PT} = T - P = (10,8,0) - (10,3,10) = (0,5,-10)$

$DC: \; x=0 \wedge y=10$

R é o ponto de intersecção da recta DC com a recta que passa em Q e é paralela a $\overrightarrow{PT}$, então:

$$\begin{cases} (x,y,z) = (0,7,10) + k(0,5,-10), \; k\in\mathbb{R} \\ x=0 \wedge y=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=7+5k \\ z=10-10k \\ x=0 \\ y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 10=7+5k \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ k=\frac{3}{5} \\ z = 10-10\times\frac{3}{5} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ K = \frac{3}{5} \\ z = 10 - 6 = 4 \\ x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \qquad \text{logo } R(0, 10, 4)$$

9.2 $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 7, 10) - (10, 3, 10) = (-10, 4, 0)$

$PQ: (x, y, z) = (0, 7, 10) + k(-10, 4, 0) \quad , k \in \mathbb{R}$

$xOz: y = 0$

$$\begin{cases} (x, y, z) = (0, 7, 10) + k(-10, 4, 0) \quad , k \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -10k \\ y = 7 + 4k \\ z = 10 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 0 = 7 + 4k \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ k = -\frac{7}{4} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \times \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{35}{2} \\ \text{—} \\ z = 10 \\ y = 0 \end{cases} \qquad I\left(\frac{35}{2}, 10, 0\right)$$

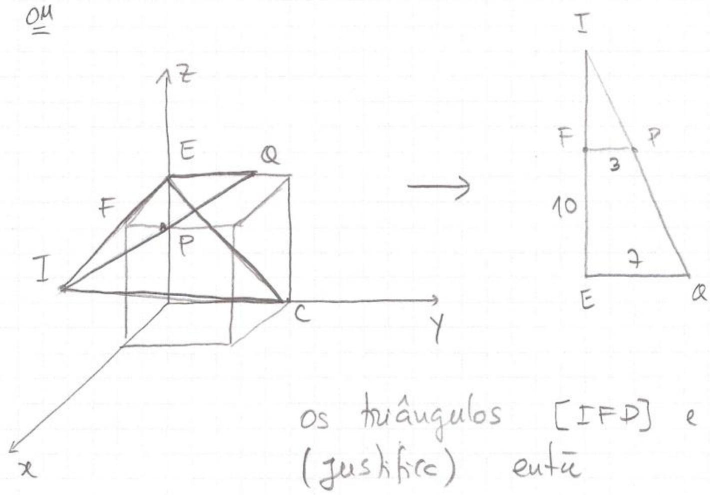
Então $A_{[EIC]} = \dfrac{\overline{IE} \times \overline{EC}}{2} = \dfrac{\frac{35}{2} \times \sqrt{200}}{2} =$

$= \frac{35}{4} \times \sqrt{200} = \frac{35}{4} \times 10\sqrt{2} = \qquad \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$= \frac{175}{2}\sqrt{2}$ //

21

ou



os triângulos [IFP] e [IEQ] são semelhantes (justifica) então

$$\frac{\overline{EQ}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{EI}}{\overline{FI}} \Leftrightarrow \frac{7}{3} = \frac{10+\overline{FI}}{\overline{FI}}$$

$$\Leftrightarrow 7\overline{FI} = 30 + 3\overline{FI}$$

$$\Leftrightarrow 4\overline{FI} = 30 \Leftrightarrow \overline{FI} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

Logo $\overline{EI} = 10 + \frac{15}{2} = \frac{35}{2}$ e $\overline{EC} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$$\therefore A_{[EIC]} = \frac{\overline{EI} \times \overline{EC}}{2} = \frac{\frac{35}{2} \times 10\sqrt{2}}{2} = \frac{350}{4}\sqrt{2} =$$

$$= \frac{175}{2}\sqrt{2}$$

*

$$\overline{EC}^2 = 10^2 + 10^2 \Leftrightarrow \overline{EC}^2 = 200$$

$$\underset{\overline{EC}>0}{\Rightarrow} \overline{EC} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

22