Teste de Matemática A

2020 / 2021

Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

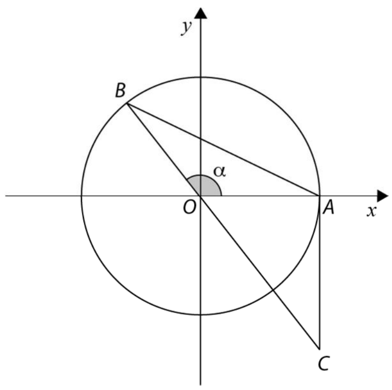
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere a expressão $P(x) = \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(1 - \operatorname{tg} x)^2}$.

Para todo o x onde a igualdade tem significado, podemos concluir que $P(x)$ é igual a:

(A) $\frac{1}{\cos^2 x}$ **(B)** $\cos^2 x$ **(C)** $\cos x$ **(D)** $-\cos x$

2. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica.



Sabe-se que:

- os pontos A e B são pontos da circunferência;
- o ponto A pertence ao eixo das abcissas;
- a reta AC é tangente à circunferência no ponto A;
- o ponto O pertence à reta BC;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

2.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ pode ser dada, em função de α, por $A(\alpha) = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}$.

2.2. Considere o valor de α para o qual se tem $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\operatorname{sen}(2021\pi - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Para este valor de α, e sem recorrer à calculadora a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

2.3. Considere os pontos A' e B', dos quais se sabe que são os pontos simétricos de A e de B, respetivamente, relativamente ao eixo das ordenadas.

Sabe-se que existe um valor de α para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual à área do trapézio $[AA'BB']$.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α, em radianos, com aproximação às centésimas.

2.4. Considere agora as funções f e g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, definidas por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} x \cos x - \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine uma expressão geral para as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

3. De dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabe-se que $||\vec{u}|| = 4$, $||\vec{v}|| = 5$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

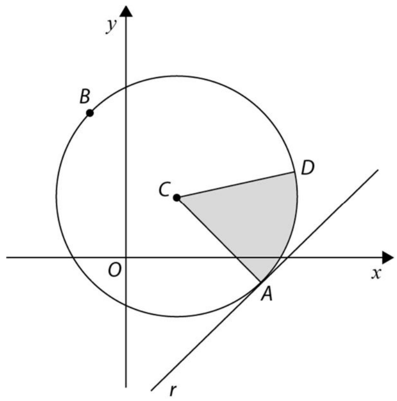
(A) $(\vec{u} + \vec{v}) . (\vec{u} + \vec{v}) = \sqrt{39}$

(B) $||\vec{u} + \vec{v}|| = 39$

(C) $(\vec{u} - \vec{v}) . (\vec{u} - \vec{v}) = 43$

(D) $||\vec{u} - \vec{v}|| = 43$

4. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro C e de diâmetro $[AB]$ e a reta t tangente à circunferência no ponto A.



Sabe-se ainda que:

- as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente, $(3, -1)$ e $(-1, 4)$;
- a área do setor circular representado a sombreado na figura é $\frac{41\pi}{48}$.

4.1. Seja r a reta paralela à reta t e que passa no centro da circunferência.

Qual é a equação reduzida da reta r?

(A) $y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$

(B) $y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$

(C) $y = \frac{4}{5}x + \frac{23}{10}$

(D) $y = \frac{5}{4}x$

4.2. Seja α a inclinação da reta AC. Determine o valor exato de $\operatorname{sen} \alpha$.

Apresente o resultado sob a forma de fração com o denominador racionalizado.

4.3. Determine o valor exato do produto escalar $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

4.4. Qual é o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a condição $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$?

(A) Reta perpendicular à reta BD a passar em B.

(B) Reta perpendicular à reta BD a passar em D.

(C) Circunferência de diâmetro $[BD]$.

(D) Mediatriz do segmento de reta $[BD]$.

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 10$$

5.1. Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa negativa, ordenada 3 e cota 1.

Considere o plano tangente à superfície esférica no ponto P. Uma equação desse plano poderá ser:

(A) $5x - 5y - 2z + 37 = 0$

(B) $5x - 5y - 2z + 7 = 0$

(C) $3x - y - 3 = 0$

(D) $3x - y + 15 = 0$

5.2. Seja C o centro da superfície esférica e seja C' o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOz. Determine a amplitude do ângulo $C'OC$.

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**4.4.**	**5.1.**	**5.2.**	
10	20	20	25	25	10	10	20	20	10	10	20	**200**

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$$P(x)=\frac{(\operatorname{sen}x-\cos x)^2}{(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x)(1-\operatorname{tg}x)^2}=\frac{\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x}{1\times(1-2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x)}=$$

$$=\frac{1-2\operatorname{sen}x\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}-2\operatorname{tg}x}=$$

$$=\frac{1-2\operatorname{sen}x\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}-2\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}=$$

$$=\frac{1-2\operatorname{sen}x\cos x}{\frac{1-2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x}}=$$

$$=\cos^2 x$$

2. Seja *D* a projeção ortogonal do ponto *B* sobre o eixo Ox.

2.1. $A_{[ABC]}=A_{[AOB]}+A_{[AOC]}=\frac{\overline{OA}\times\overline{BD}}{2}+\frac{\overline{OA}\times\overline{AC}}{2}=$

$$=\frac{1\times\operatorname{sen}\alpha}{2}+\frac{1\times(-\operatorname{tg}\alpha)}{2}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

2.2. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\operatorname{sen}(2021\pi-\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 3\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{6}$$

Como $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, vem que:

$\frac{1}{36}+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{35}{36}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{35}}{6}$

Como $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, então $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{35}}{6}$.

Como $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, vem que:

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{\sqrt{35}}{6}}=-\frac{1}{\sqrt{35}}=-\frac{\sqrt{35}}{35}$

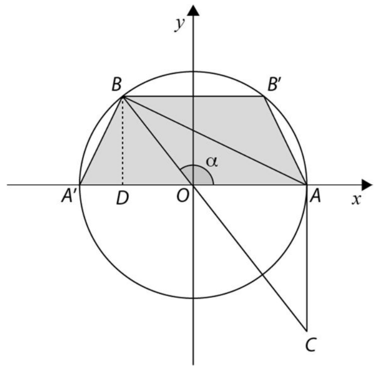
Assim:

$$A_{[ABC]}=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{6}-\left(-\frac{\sqrt{35}}{35}\right)}{2}=\frac{\frac{35+6\sqrt{35}}{210}}{2}=$$

$$=\frac{35+6\sqrt{35}}{420}$$

2.3. $A_{[AA'BB']} = \frac{\overline{AA'}+\overline{BB'}}{2} \times \overline{BD} = \frac{2+(-2\cos\alpha)}{2} \times \operatorname{sen}\alpha =$

$= (1 - \cos\alpha) \times \operatorname{sen}\alpha$

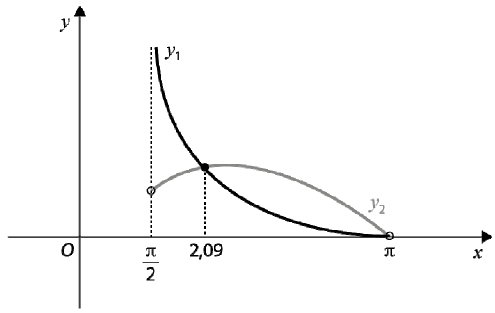


Pretende-se o valor de α tal que $A_{[ABC]} = A_{[AA'BB']}$, isto é, o valor de α tal que $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2} = (1 - \cos\alpha) \times \operatorname{sen}\alpha$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determinemos o ponto de interseção das curvas y_1 e y_2, onde:

$y_1 = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{2}$

$y_2 = (1 - \cos x) \times \operatorname{sen} x$



$\alpha \approx 2{,}09$ rad

2.4. Pretende-se os valores de $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ tais que $f(x) = g(x)$. Assim:

$\frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{tg}x}{2} = \operatorname{sen}x\cos x - \frac{\operatorname{tg}x}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}x - \operatorname{tg}x = 2\operatorname{sen}x\cos x - \operatorname{tg}x$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x(1 - 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x = 0 \ \vee \ 1 - 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x = 0 \ \vee \ \cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = k\pi \ \vee \ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3. Opção (C)

$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 =$

$= 4^2 + 2 \times (-1) + 5^2 =$

$= 39$

Como $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, então $39 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$. Logo, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{39}$.

$(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 =$

$= 4^2 - 2 \times (-1) + 5^2 =$

$= 43$

Logo, $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{43}$.

4.

4.1. Opção (A)

Sabe-se que a reta t é tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ no ponto *A*, logo as retas t e AB são perpendiculares. Assim, $m_t = -\frac{1}{m_{AB}}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 4) - (3, -1) = (-4, 5)$

$m_{AB} = -\frac{5}{4}$

$m_t = \frac{4}{5}$

Como a reta r é paralela à reta t, então os seus declives são iguais.

A equação reduzida da reta r é, então, da forma $y = \frac{4}{5}x + b$.

Como $C \in r$, vem que:

$\frac{3}{2} = \frac{4}{5} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow b = \frac{7}{10}$

A equação reduzida da reta r é $y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$.

Cálculo auxiliar

C é o ponto médio de [*AB*]. Assim:

$C = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{-1 + 4}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

4.2. Como *C* é o centro da circunferência e [*AB*] é o seu diâmetro, então a reta *AC* é a reta *AB*.

Assim, $m_{AC} = -\frac{5}{4}$ e, como $\text{tg}\,\alpha = m_{AC}$, vem que $\text{tg}\,\alpha = -\frac{5}{4}$.

Como $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$1 + \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{41}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{41}$$

Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, vem que:

$$\text{sen}^2\alpha + \frac{16}{41} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{16}{41} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{25}{41} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}} \ \vee \ \text{sen}\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

Como α é a inclinação da reta *AC*, $\alpha \in [0, \pi[$, e como $\text{tg}\alpha < 0$, então $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Assim, $\text{sen}\alpha > 0$. Logo, $\text{sen}\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$.

4.3. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{CD}}\right) =$

$= r \times r \times \cos(\pi - \beta) =$

$= \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{\sqrt{41}}{2} \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$

$= \frac{41}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= -\frac{41\sqrt{3}}{8}$

Cálculos auxiliares

Seja r o raio da circunferência e β a amplitude do ângulo *ACD*:

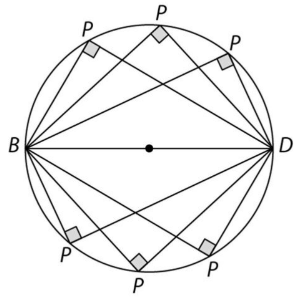
- $r = \|\overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2}}{2} = \frac{\sqrt{16+25}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$
- $A_{\text{setor circular}} = \frac{\beta \times \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2}{2} = \frac{41}{8}\beta$

Logo:

$\frac{41\pi}{48} = \frac{41}{8}\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{8}{48}\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$

4.4. Opção (C)

Como um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto, verifica-se que todos os pontos *P* que satisfazem a condição $\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PD} = 0$ são pontos pertencentes a uma circunferência de diâmetro [*BD*].



5.

5.1. Opção (D)

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 10$

Sabemos que $P(a, 3, 1)$, com $a < 0$, pertence à superfície esférica, logo:

$(a+1)^2 + (3-2)^2 + (1-1)^2 = 10 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow a + 1 = 3 \quad \vee \quad a + 1 = -3$

$\Leftrightarrow a = 2 \quad \vee \quad a = -4$

Como $a < 0$, então $a = -4$.

Assim, $P(-4, 3, 1)$.

Seja C o centro da superfície esférica.

$\overrightarrow{CP}$ é um vetor normal ao plano α, logo:

$\overrightarrow{CP} = (-4, 3, 1) - (-1, 2, 1) = (-3, 1, 0)$

Logo, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto P é da forma:

$$-3x + y + d = 0$$

Como *P* pertence ao plano, vem que $-3 \times (-4) + 3 + d = 0$ e, portanto, $d = -15$.

Assim, $-3x + y - 15 = 0$ é uma equação do plano pretendido, o que é equivalente a $3x - y + 15 = 0$.

5.2. $C(-1, 2, 1)$ e $C'(-1, -2, 1)$

Tem-se que $C'\hat{O}C = (\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}})$ e $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{\overrightarrow{OC'}.\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC'}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|}$.

Então:

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{(-1,-2,1).(-1,2,1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{1-4+1}{6}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = -\frac{1}{3}$

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$, isto é, $\left(\widehat{\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OC}}\right) \approx 109{,}5°$.