Prova-Modelo de Exame de Matemática A

2021 / 2022

Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2} \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g \quad (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2 \quad (r - \text{raio})$

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \quad (r - \text{raio})$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a\ \cos b + \text{sen}\, b\ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \text{sen}\, a\ \text{sen}\, b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \,\text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\, \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$.

Em relação a uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, sabe-se que $\lim f(u_n)$ não existe.

Em qual das opções seguintes pode estar definida uma expressão analítica de f?

(A) $f(x) = \ln|x|$

(B) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

(C) $f(x) = \frac{\text{sen(x)}}{x}$

(D) $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$

2. Seja (u_n) uma progressão geométrica.

Sabe-se que, relativamente a (u_n), o primeiro, o segundo e o terceiro termos são $p-2$, $-2p$ e $-2p-2$, respetivamente, para um certo número real negativo p.

Determine, sem recorrer à calculadora, a soma de todos os termos da sucessão (u_n).

3. Sejam p e n números naturais tais que $p < n$. Sabe-se que ${}^{n}C_{p+1} - {}^{6}C_{p+1} = {}^{6}C_{p}$.

Considere que se inscreveu cada um dos elementos da linha de ordem n do triângulo de Pascal num cartão e se colocou num saco cada um desses cartões, indistinguíveis ao tato.

Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, três cartões do saco.

Qual é a probabilidade de saírem dois cartões com números iguais?

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{2}{7}$

(C) $\frac{3}{7}$

(D) $\frac{4}{7}$

4. Uma caixa contém bolas de várias cores, indistinguíveis ao tato, umas numeradas e outras não.

Das bolas existentes na caixa, sabe-se que:

- o número de bolas azuis é o dobro do número de bolas numeradas;
- das bolas numeradas, metade são azuis;
- cinco em cada oito bolas são azuis ou numeradas;
- três são azuis e numeradas.

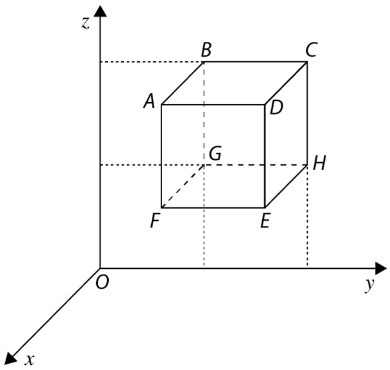
Determine o número de bolas que a caixa contém.

5. Num congresso internacional de Matemática, que se realiza nos Países Baixos, participam 15 palestrantes de diferentes nacionalidades: 5 chineses, 4 brasileiros, 3 neerlandeses, 1 português, 1 espanhol e 1 francês.

Os palestrantes estão instalados no mesmo hotel, e vão ser transportados para o hotel utilizando uma carrinha de dez lugares e um automóvel de cinco lugares.

Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os 15 palestrantes pelos 15 lugares disponíveis, de modo que os condutores sejam neerlandeses, os palestrantes chineses viajem no mesmo veículo e que, no automóvel, viajem palestrantes de nacionalidades todas distintas.

6. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- cada aresta do cubo é paralela a um dos eixos coordenados;
- o vértice B tem coordenadas $(0, 3, 6)$;
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(3, 3, -3)$.

* **6.1.** Qual das condições seguintes define a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo?

(A) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2+\left(z+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{27}{2}$

(B) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2+\left(z-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{27}{2}$

(C) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2+\left(z+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$

(D) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2+\left(z-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$

* **6.2.** Seja α o plano que passa por G e é perpendicular à reta OE, e seja P o ponto de interseção do plano α com a reta BE. Determine a distância do ponto P ao plano xOy.

7. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}} - 2$.

Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

8. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,e^{x} - 5e^{5}}{x-5} & \text{se} \quad x < 5 \\ x\log(x-5) & \text{se} \quad x > 5 \end{cases}$$

8.1. Sem recorrer à calculadora, averigue se existe $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$.

8.2. Em $]5, +\infty[$ o gráfico de g tem pontos cuja ordenada é inferior à abcissa.

Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas desses pontos.

Apresente a resposta na forma de intervalo de números reais.

9. Um foguetão, ao ser lançado, é impulsionado pela expulsão dos gases que resultam da queima do combustível. Admita que a velocidade de um foguetão, em quilómetros por segundo, desde o arranque até se esgotar o combustível é dada por:

$$v(t) = -4\ln(1 - 0{,}004t) - 0{,}001t \text{ , com } 0 \leq t \leq 150$$

A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.

9.1. A massa inicial do foguetão é 140 toneladas, das quais 75% correspondem à massa do combustível.

Sabe-se ainda que o foguetão demora 150 segundos a esgotar o combustível.

Qual é a taxa média de consumo do combustível em toneladas por segundo, desde o arranque até se esgotar o combustível?

(A) $0{,}65$ toneladas por segundo

(B) $0{,}7$ toneladas por segundo

(C) $0{,}75$ toneladas por segundo

(D) $0{,}8$ toneladas por segundo

9.2. Decorridos t_1 minutos após o arranque, a velocidade do foguetão é igual a um certo valor. Sabe-se que, passado igual período de tempo, a velocidade do foguetão é de mais $1{,}1$ km/s do que esse valor.

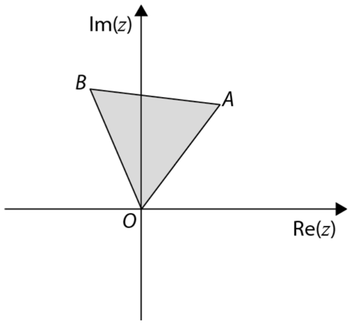
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a velocidade do foguetão no instante t_1.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido em quilómetros por segundo, arredondado às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

10. Na figura está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero $[OAB]$.



Sabe-se que o ponto A é o afixo de um número complexo z.

Qual é o número complexo cujo afixo é o ponto B?

(A) $\left(\sqrt{3}+i\right) z$

(B) $\left(1+\sqrt{3}\, i\right) z$

(C) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right) z$

(D) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\, i\right) z$

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} + i^{2023}$ e $z_2 = e^{i\theta}$, para um certo número real θ.

Sem recorrer à calculadora, prove que qualquer que seja o número real θ, $|z_1 + \overline{z_2}|^2 \in [0, 4]$.

12. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por:

$$f'(x) = \ln\left(e^x + 12e^{-x} + x\right)$$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, caso este(s) exista(m).

13. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = 3^{\cos(\pi+2x)-4\operatorname{sen}^2 x}$$

Determine, sem recorrer à calculadora, uma expressão geral para as abcissas dos pontos do gráfico da função h cuja ordenada é $\frac{1}{9}$.

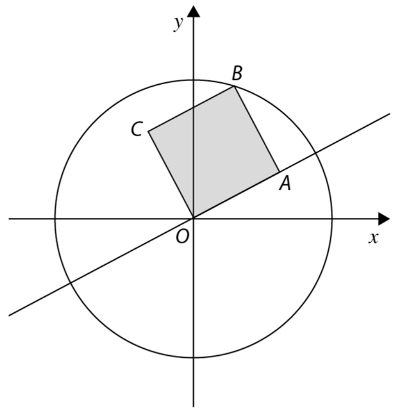
14. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos(2x)$$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$.

Sem recorrer à calculadora, prove que existe pelo menos um $c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f em c é perpendicular à reta tangente ao gráfico de g em c.

* **15.** Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e o quadrado $[OABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto B pertence à circunferência;
- o declive da reta OA é m.

Prove que a abcissa do ponto B é dada, em função de m, por $\frac{\sqrt{2}\,(1-m)}{2\sqrt{1+m^2}}$.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>10.</td><td>12.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">5.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">11.</td><td colspan="2">13.</td><td colspan="2">14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td colspan="12"></td><td>200</td></tr>
</table>

Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{se} \quad n \text{ ímpar} \\ \dfrac{-1}{n+1} & \text{se} \quad n \text{ par} \end{cases}$$

$\lim u_n = 0; \quad \lim \frac{1}{n+1} = 0^+ \text{ e } \lim \frac{-1}{n+1} = 0^-$

(A) $f(x) = \ln|x|$

$$\lim f(u_n) = \lim \ (\ln|u_n|) = \lim \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

(B) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0}$$

Averiguemos os limites laterais:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, de onde se conclui que não existe $\lim f(u_n)$.

(C) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

(D) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2. $u_1 = p - 2 \qquad u_2 = -2p \qquad u_3 = -2p - 2$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \Leftrightarrow \frac{-2p}{p-2} = \frac{-2p-2}{-2p} \Leftrightarrow 4p^2 = (p-2)(-2p-2)$$

$$\Leftrightarrow 4p^2 = -2p^2 - 2p + 4p + 4$$

$$\Leftrightarrow 6p^2 - 2p - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\times 6\times(-4)}}{12}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2 \pm 10}{12}$$

$$\Leftrightarrow p = 1 \quad \vee \quad p = -\frac{2}{3}$$

Como $p \in \mathrm{IR}^-$, então $p = -\frac{2}{3}$.

$u_1 = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$ $\quad\quad$ $u_2 = -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$$r = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{8}{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim\ S_n = \lim\left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left(-\frac{8}{3} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \lim\left(-\frac{8}{3} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{8}{3} \times \frac{1-0}{\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{8}{3} \times \frac{2}{3} =$$

$$= -\frac{16}{9}$$

Nota: $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \begin{cases} -\frac{1}{2^n} & \text{se} \quad n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{2^n} & \text{se} \quad n \text{ par} \end{cases}$

$$\lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

3. Opção (C)

$${}^{n}C_{p+1} - {}^{6}C_{p+1} = {}^{6}C_p \Leftrightarrow {}^{n}C_{p+1} = {}^{6}C_p + {}^{6}C_{p+1}$$

$$\Leftrightarrow {}^{n}C_{p+1} = {}^{7}C_{p+1}$$

$$\Leftrightarrow n = 7$$

A linha de ordem 7 do triângulo de Pascal é constituída pelos seguintes elementos:

${}^{7}C_0 = 1$ $\quad$ ${}^{7}C_1 = 7$ $\quad$ ${}^{7}C_2 = 21$ $\quad$ ${}^{7}C_3 = 35$ $\quad$ ${}^{7}C_4 = 35$ $\quad$ ${}^{7}C_5 = 21$ $\quad$ ${}^{7}C_6 = 7$ $\quad$ ${}^{7}C_7 = 1$

A probabilidade de saírem dois cartões com números iguais é:

$$\frac{4 \times {}^{2}C_2 \times {}^{6}C_1}{{}^{8}C_3} = \frac{3}{7}$$

4. Consideremos os acontecimentos:

A: "A bola ser azul."

B: "A bola estar numerada."

Sabemos que:

$P(A) = 2P(B)$

$$P(A|\, B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(B)$$

$P(A \cup B) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 2P(B) + P(B) - \frac{1}{2}P(B) = \frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}P(B) = \frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$

Logo, $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

$\frac{1}{8} = \frac{3}{n} \Leftrightarrow n = 24$

A caixa contém 24 bolas.

5. ${}^3A_2 \times {}^4C_3 \times 9! \times 4!$

${}^3A_2$ é o número de maneiras distintas de escolher ordenadamente quais os condutores de nacionalidade neerlandesa da carrinha e do automóvel.

A carrinha (exceto o lugar do condutor) será ocupada pelos cinco palestrantes chineses, três palestrantes brasileiros e o palestrante neerlandês que não foi escolhido para conduzir, o que pode ser feito de ${}^4C_3 \times 9!$ maneiras distintas.

O automóvel (exceto o lugar de condutor) será ocupado por um brasileiro, um português, um espanhol e um francês, o que pode ser feito de 4! modos distintos.

6.

6.1 Opção (D)

Pretende-se uma condição que defina a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo, logo o seu centro é equidistante de quaisquer destes vértices e, em particular, dos vértices B e E.

O centro é o ponto médio de $[BE]$:

$E = B + \overrightarrow{BE} = (0,3,6) + (3,3,-3) = (3,6,3)$

centro $= \left(\frac{0+3}{2}, \frac{3+6}{2}, \frac{6+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

Como $[BE]$ é um diâmetro da superfície esférica:

raio $= \frac{d(B,E)}{2} = \frac{\|\overrightarrow{BE}\|}{2} = \frac{\sqrt{3^2+3^2+(-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2}$

Portanto, a condição pedida é $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^2$, ou seja,

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

6.2. O vértice B tem coordenadas $(0,3,6)$ e o vértice E tem coordenadas $(3,6,3)$.

$E = B + \overrightarrow{BE} = (0,3,6) + (3,3,-3) = (3,6,3)$

Assim, o vértice G tem coordenadas $(0,3,3)$.

O plano α é perpendicular à reta OE, logo é definido por uma equação do tipo $3x+6y+3z+d=0$. Como o vértice G pertence ao plano α, então:

$3\times 0+6\times 3+3\times 3+d=0 \Leftrightarrow 18+9+d=0 \Leftrightarrow d=-27$

Logo, o plano α pode ser definido por $3x+6y+3z-27=0$ ou, de forma equivalente, por $x+2y+z-9=0$.

Equação vetorial da reta BE: $(x,y,z)=(0,3,6)+k(3,3,-3), k\in\mathbb{R}$

Um ponto genérico da reta BE é do tipo $(3k,3+3k,6-3k)$, com $k\in\mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano α, obtemos:

$$\begin{aligned}3k+2(3+3k)+(6-3k)-9=0 &\Leftrightarrow 3k+6+6k+6-3k-9=0\\ &\Leftrightarrow 6k+3=0\\ &\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Para $k=-\frac{1}{2}$, obtemos o ponto P de coordenadas

$\left(3\times\left(-\frac{1}{2}\right),3+3\times\left(-\frac{1}{2}\right),6-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{15}{2}\right)$.

Logo, a distância do ponto P ao plano xOy é a cota de P, que é $\frac{15}{2}$.

7. Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}-2\right)\underbrace{=}_{(0\times\infty)}$$

Considerando a mudança de variável $y=\frac{1}{x}$, $x\to 0^+ \Rightarrow y\to +\infty$:

$$\begin{aligned}&=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}e^y-2\right)=\\ &=\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{limite notável}}-2=\\ &=+\infty-2\\ &=+\infty\end{aligned}$$

A reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de f e é a única, visto que a função é contínua em todos os pontos do seu domínio, IR^+.

Assíntotas não verticais:

Como o domínio da função é IR^+, só faz sentido o estudo das assíntotas não verticais ao seu gráfico quando $x\to+\infty$:

$$\begin{aligned}m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}-2}{x}=\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{2}{x}\right)=\end{aligned}$$

$$= e^{\frac{1}{+\infty}} - \frac{2}{+\infty} =$$

$$= e^0 - 0 =$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - 2 - x \right) \underbrace{=}_{(+\infty - \infty)} \lim_{x \to +\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right) - 2 \underbrace{=}_{(\infty \times 0)}$$

Considerando a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$, $x \to +\infty \Rightarrow y \to 0^+$:

$$= \lim_{y \to 0^+} \left(\frac{1}{y} (e^y - 1) \right) - 2 =$$

$$= \underbrace{\lim_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} - 2 =$$

$$= 1 - 2 =$$

$$= -1$$

A reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

8.

8.1. $D_g = \mathrm{IR} \backslash \{5\}$

$\lim_{x \to 5} g(x)$ existe se e só se $\lim_{x \to 5^-} g(x) = \lim_{x \to \to 5^+} g(x)$.

- $\lim_{x \to 5^-} \frac{xe^x - 5e^5}{x-5} = \lim_{x \to 5^-} \frac{e^5(xe^{x-5} - 5)}{x-5} =$

  Considerando a mudança de variável $y = x - 5$, $x \to 5 \Rightarrow y \to 0^-$:

$$= e^5 \lim_{y \to 0^-} \frac{(y+5)e^y - 5}{y} =$$

$$= e^5 \lim_{y \to 0^-} \frac{ye^y + 5e^y - 5}{y} =$$

$$= e^5 \left(\lim_{y \to 0^-} \frac{ye^y}{y} + \lim_{y \to 0^-} \frac{5(e^y - 1)}{y} \right) =$$

$$= e^5 \left(e^0 + 5 \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} \right) =$$

$$= e^5 (1 + 5 \times 1) =$$

$$= 6e^5$$

- $\lim_{x \to 5^+} \left(x \log(x - 5) \right) = 5 \times \log 0^+ =$

$$= 5 \times (-\infty) =$$

$$= -\infty$$

Como $\lim_{x \to 5^-} g(x) \neq \lim_{x \to 5^+} g(x)$, então não existe $\lim_{x \to 5} g(x)$.

8.2. Pretende-se os valores de x do intervalo $]5,+\infty[$ que satisfazem a condição $g(x) < x$:

$x\log(x-5) < x \Leftrightarrow x\log(x-5) - x < 0$

$\Leftrightarrow x\,(\log(x-5) - 1) < 0$

x	5		15	$+\infty$
x		$+$	$+$	$+$
$\log(x-5)-1$		$-$	0	$+$
$x(\log(x-5)-1)$		$-$	0	$+$

Cálculo auxiliar

$\log(x-5) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log(x-5) = 1$

$\Leftrightarrow x - 5 = 10$

$\Leftrightarrow x = 15$

$x \in]5, 15[$

9.

9.1. Opção (B)

$140 \times 0{,}75 = 105$

$105 : 150 = 0{,}7$ toneladas/segundo

9.2. $v(t_1 + t_1) = 1{,}1 + v(t_1) \Leftrightarrow v(2t_1) = 1{,}1 + v(t_1)$

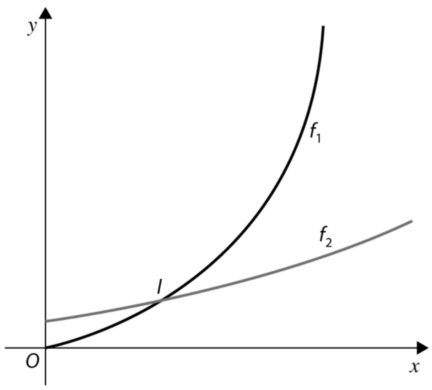
Utilizando x como variável independente:

$v(2x) = 1{,}1 + v(x) \Leftrightarrow -4\ln(1 - 0{,}008x) - 0{,}002x = 1{,}1 - 4\ln(1 - 0{,}004x) - 0{,}001x$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$f_1(x) = -4\ln(1 - 0{,}008x) - 0{,}002x$

$f_2(x) = 1{,}1 - 4\ln(1 - 0{,}004x) - 0{,}001x, \quad 0 \le x \le 150$



$I(49{,}98; 1{,}94)$

$v(49{,}98) = -4\ln(1 - 0{,}004 \times 49{,}98) - 0{,}001 \times 49{,}98 \approx 0{,}84$ km/s

10. Opção (C)

Como o triângulo [*OAB*] é equilátero, então os pontos *A* e *B* são afixos de dois números complexos com o mesmo módulo e cujo argumento difere de $\frac{\pi}{3}$ rad.

Assim, sendo *A* o afixo de um número complexo $z = re^{i\theta}$, então *B* é o afixo do número complexo $z' = re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

Tem-se que:

$$re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)} = re^{i\theta} \times e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} =$$
$$= re^{i\theta} \times \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= z \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

11. $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} + i^{2023} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) + i^3 =$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + (-i) =$$
$$= 1 + i - i =$$
$$= 1$$

$\overline{z_2} = e^{i(-\theta)}$

Assim, $z_1 + \overline{z_2} = 1 + e^{i(-\theta)} = 1 + \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(-\theta) = \;\; 1 + \cos\theta - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$|z_1 + \overline{z_2}|^2 = \left(\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\mathrm{sen}\,\theta)^2}\right)^2 =$$
$$= 1 + 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}_{1} =$$
$$= 1 + 2\cos\theta + 1 =$$
$$= 2 + 2\cos\theta$$

Como, para qualquer valor real de θ, se tem:

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

então:

$$-2 \leq 2\cos\theta \leq 2$$

e:

$$0 \leq 2 + 2\cos\theta \leq 4$$

isto é:

$$|z_1 + \overline{z_2}|^2 \in [0, 4]$$

12. $f''(x) = (\ln(e^x + 12e^{-x} + x))' =$

$$= \frac{(e^x+12e^{-x}+x)'}{e^x+12e^{-x}+x} =$$
$$= \frac{e^x-12e^{-x}+1}{e^x+12e^{-x}+x}$$

$f''(x) = 0$

$\frac{e^x-12e^{-x}+1}{e^x+12e^{-x}+x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 12e^{-x} + 1 = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{12e^{-x}}_{>0} + \underbrace{x}_{>0} \neq 0 \leftarrow$ Condição universal em IR^+

$\Leftrightarrow e^x - \frac{12}{e^x} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 12 + e^x = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 3 \quad \vee \quad \underbrace{e^x = -4}_{\text{condição impossível em IR}}$

$\Leftrightarrow x = \ln 3$

Cálculo auxiliar

Considerando $e^x = y$

$y^2 - 12 + y = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{-1+7}{2} \ \vee \ y = \frac{-1-7}{2}$

$\Leftrightarrow y = 3 \ \vee \ y = -4$

x	0		ln 3	$+\infty$
Sinal de f''		$-$	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f		∩	PI	∪

Cálculos auxiliares

$$f''(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - 12e^{-\ln 2} + 1}{e^{\ln 2} + 12e^{-\ln 2} + \ln 2} = \frac{2 - 12 \times \frac{1}{2} + 1 \quad (< 0)}{2 + 12 \times \frac{1}{2} + \ln 2 \quad (> 0)}$$

$$f''(\ln 4) = \frac{e^{\ln 4} - 12e^{-\ln 4} + 1}{e^{\ln 4} + 12e^{-\ln 4} + \ln 4} = \frac{4 - 12 \times \frac{1}{4} + 1 \quad (> 0)}{4 + 12 \times \frac{1}{4} + \ln 4 \quad (> 0)}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, \ln 3]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[\ln 3, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de abcissa ln 3.

13. $h(x) = \frac{1}{9}$

$3^{\cos(\pi+2x) - 4\text{sen}^2 x} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{-\cos(2x) - 4\text{sen}^2 x} = 3^{-2} \Leftrightarrow -\cos(2x) - 4\text{sen}^2 x = -2$

$\Leftrightarrow \cos(2x) + 4\text{sen}^2 x = 2$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 4\text{sen}^2 x = 2$

$\Leftrightarrow 1 - \text{sen}^2 x + 3\text{sen}^2 x = 2$

$\Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}$

14. Pretendemos provar que:

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[: f'(c) \times g'(c) = -1$$

$f'(x) = 2\text{sen}x \cos x + 2\text{sen}(2x) = \text{sen}(2x) + 2\text{sen}(2x) = 3\text{sen}(2x)$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Seja h a função definida em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ por $h(x) = f'(x) \times g'(x) = \frac{-3\text{sen}(2x)}{x^2}$.

h é contínua por se tratar do quociente de duas funções contínuas.

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3\text{sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{-3\times 1}{\frac{\pi^2}{16}} = -\frac{48}{\pi^2} \quad (< -1)$$

$$h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-3\text{sen}\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)}{\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2} = \frac{3}{\frac{9\pi^2}{16}} = \frac{48}{9\pi^2} \quad (> -1)$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) < -1 < h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$\exists c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[: h(c) = -1$, ou seja, $\exists c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[: f'(c) \times g'(c) = -1$

15. Seja α a inclinação da reta OA.

Como m é o declive da reta OA, então $m = \text{tg}\,\alpha$.

Como *B* pertence à circunferência trigonométrica e é um vértice do quadrado de diagonal [*OB*], então a abcissa de *B* pode ser dada, em função de α, por $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\alpha \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\,\alpha \times \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(1-m)}{2\sqrt{1+m^2}} \quad \text{c.q.d.}$$

Cálculos auxiliares

Como $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$1 + m^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+m^2}} \quad (\cos\alpha > 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, vem que:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{1+m^2-1}{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{m^2}{1+m^2}} \quad (\text{sen}\,\alpha > 0)$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \quad (m > 0)$$